Alcune osservazioni sui concetti di definizione e di dimostrazione nell'insegnamento della matematica Terza parte

Giuliano Mazzanti, Valter Roselli, Luigi Tomasi

Abstract. This paper is the third part of a contribution in which we offer some observations and reflections on the concepts of theorem and demonstration and on the role of examples and counterexamples, which can be useful, from a didactic point of view, to teachers of secondary school.
This material can also be used by undergraduate university students interested in a career as secondary school mathematics teachers.
This third part of the paper is about the issue of theorem and demonstration in the teaching of mathematics at secondary school.

Sommario. Questo articolo è la terza parte di un contributo in cui proponiamo alcune osservazioni e riflessioni sui concetti di teorema e dimostrazione e sul ruolo di esempi e controesempi, che possono risultare utili, da un punto di vista didattico, a docenti della Scuola secondaria di I e di II grado.
Tale materiale può essere utilizzato proficuamente anche dagli studenti universitari della laurea magistrale interessati a intraprendere l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.
Questa terza parte è dedicata specificamente ai concetti di teorema e di dimostrazione nella didattica della matematica nella scuola secondaria.

Alcune osservazioni sui concetti di definizione e di dimostrazione nell'insegnamento della matematica Terza parte

Giuliano Mazzanti*, **Valter Roselli***, **Luigi Tomasi****
* Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Ferrara
** Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Adria (RO)

1. Introduzione

Questo articolo è la terza parte di un contributo le cui prime due parti sono state pubblicate nei numeri di Febbraio e Aprile 2013 di questa rivista, rispettivamente dedicate ai concetti di definizione e di teorema nella didattica della matematica. Si vedano le introduzioni alle precedenti due parti dell'articolo in cui si fa riferimento, da un lato alle recenti indicazioni curriculari per la matematica relative al riordino della Scuola secondaria di II grado del 2010 e, dall'altro alle conoscenze e competenze minime di matematica per l'accesso all'Università contenute nel *Syllabus di Matematica,* del 1999, proposto dell'UMI - Unione Matematica Italiana.

In questa terza parte affrontiamo alcune problematiche di carattere didattico relative allo studio di un teorema. Si discute inoltre sul ruolo logico degli esempi e dei controesempi. Infine si conclude con alcuni "problemi curiosi" in cui vengono evidenziate una parte delle tematiche discusse in questo lavoro.

2. Suggerimenti didattici per lo studio di un teorema

Ritorniamo ora a parlare dei teoremi, fornendo in modo schematico, alcuni suggerimenti didattici relativi allo studio di un teorema:

- dare l'enunciato del teorema, precisando l'ipotesi (A) e la tesi (B) anche se nell'enunciato queste non sono esplicitamente indicate.
- individuare il tipo di dimostrazione (per casi, dimostrazione diretta, indiretta –cioè per assurdo o per passaggio alla contronominale- per induzione,…).
- individuare i passaggi nella dimostrazione, dove vengono utilizzate le varie ipotesi.
- precisare quali concetti (ossia definizioni) e quali teoremi si usano nella dimostrazione (prerequisiti).
- qualora fosse possibile, fornire un'interpretazione geometrica (vedi ad esempio la formula del quadrato di un binomio oppure il teorema di Rolle).
- fornire alcuni esempi di applicazione del teorema e non "generalizzare", ossia verificare attentamente che tutte le ipotesi del teorema siano soddisfatte.
- chiedersi se vale l'implicazione inversa ed eventualmente fornire un controesempio[1].

Su questi due ultimi punti proponiamo ulteriori considerazioni nei paragrafi seguenti.

2.1. Esempi riguardanti la "generalizzazione"

Cominciamo fornendo alcuni esempi relativi ad errate generalizzazioni di alcuni noti risultati.

Esempio 1. (Primo criterio di uguaglianza dei triangoli)

Nel primo criterio di uguaglianza è opportuno sottolineare l'importanza che l'angolo uguale sia quello *compreso* fra le coppie corrispondenti di lati uguali. Ad esempio (figura 1) i triangoli ABC e $AB'C$ hanno due lati e un angolo uguali ($AB = AB'$, AC e

[1] La domanda ha senso solo se il teorema è della forma "se A allora B", mentre la risposta è ovviamente implicita nel caso di teoremi della forma "A se e solo se B" o equivalentemente "condizione necessaria e sufficiente affinché valga A è che valga B''.

l'angolo in C in comune), ma i due triangoli non sono evidentemente uguali.

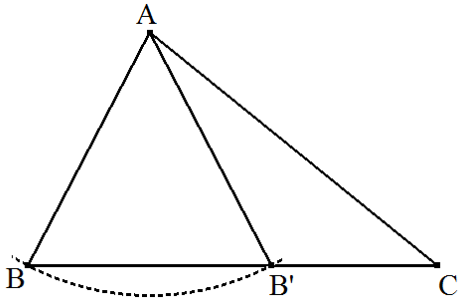

Figura 1

Esempio 2. (Secondo criterio di uguaglianza dei triangoli)
Consideriamo il triangolo rettangolo non isoscele ABC della figura 2 (ipotenusa BC e altezza relativa AH).

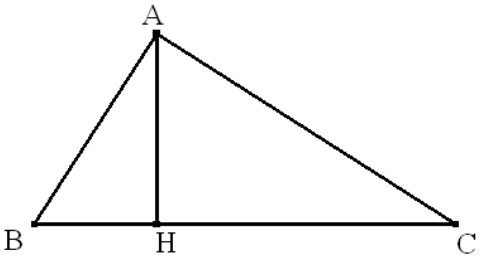

Figura 2

I triangoli AHB e AHC hanno: AH in comune, $H\hat{B}A = H\hat{A}C$ e $H\hat{A}B = H\hat{C}A$ in entrambi i casi perché complementari di uno stesso angolo.
Una "superficiale" applicazione del secondo criterio di uguaglianza dei triangoli porterebbe allora a concludere che i triangoli AHB e AHC sono uguali, da cui seguirebbe che $AB = AC$ e che quindi tutti i triangoli rettangoli sono isosceli. Ovviamente l'errore consiste nel fatto che il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli ri-

chiede che le coppie di angoli uguali siano quelle adiacenti al lato uguale (o, come si suol dire, "ugualmente posti rispetto a tale lato").

Esempio 3. (Terzo criterio di uguaglianza dei triangoli)
Osserviamo anche che il terzo criterio di uguaglianza viene, a volte, generalizzato ai poligoni, affermando, erroneamente, che se due poligoni (con il numero di lati maggiore di 3) hanno i lati uguali allora essi sono uguali.

Esempio 4. (Legge di annullamento del prodotto)
La proprietà di annullamento del prodotto, ossia che $ab = 0$ implica $a = 0$ oppure $b = 0$, a volte viene generalizzata in modo erroneo, ad esempio $ab = 1$ implica $a = 1$ oppure $b = 1$ (errore che a volte viene commesso nella risoluzione di equazioni algebriche).

Esempio 5. (Formula di Erone)
Un'altra generalizzazione errata potrebbe riguardare la formula di Erone (I sec. d.C.), che, come noto, permette di calcolare l'area *A* di un triangolo note le lunghezze a, b, c dei suoi lati, precisamente

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove con p si indica la lunghezza del semiperimetro del triangolo.
Si può notare che l'esistenza di tale formula è motivata dal fatto che se di un triangolo sono note le misure dei suoi lati, il triangolo è univocamente determinato.
Notiamo che è "più difficile" il calcolo dell'area di un triangolo di cui siano noti i lati (che è unico) rispetto al calcolo dell'area di triangoli di cui siano assegnate le misure di un lato e della relativa altezza (che sono invece infiniti).
Si potrebbe pensare di estendere la formula di Erone al calcolo dell'area di un qualunque quadrilatero di cui siano noti i lati. La formula a cui si potrebbe pensare è la seguente (indicando con a, b, c, d le misure dei lati del quadrilatero e con p il suo semiperimetro)

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad .$$

Tuttavia questa formula, per motivi dimensionali, non può rappresentare un'area.

Per i quadrati e i rettangoli esiste la possibilità di calcolare l'area noti i lati, utilizzando le usuali formule. Meno evidente, ma altrettanto possibile, è il calcolo dell'area di un trapezio che non sia un parallelogrammo, note le misure dei suoi lati.

Con riferimento alla figura 3, tracciamo da *C* la parallela al lato *AD* e indichiamo con *E* la sua intersezione con la base *AB*.

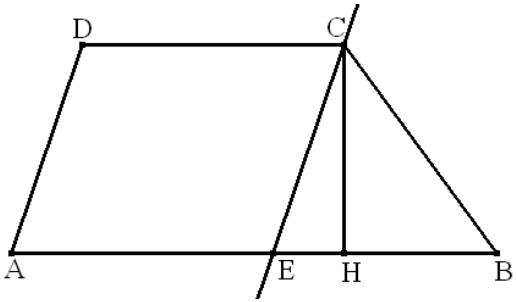

Figura 3

Ricaviamo ora le misure dei lati del triangolo *ECB*; *EC=AD*, *CB* è dato ed $EB = AB - AE = AB - DC$. Con la formula di Erone possiamo pertanto ricavare l'area del triangolo *ECB* e poi da questa risalire alla misura dell'altezza *CH* relativa alla base *EB*. *CH* è però anche l'altezza del trapezio *ABCD*, di cui ora possiamo ricavare l'area.

Se si passa ai parallelogrammi, che non siano né quadrati né rettangoli, la possibilità di trovarne l'area conoscendo soltanto i lati viene meno, basta pensare ad esempio a un rombo di lato assegnato ℓ. In questo caso si può solo dire che l'area è minore o uguale a ℓ^2 e anzi può assumere qualunque valore non nullo compreso tra 0 e ℓ^2.

Una generalizzazione (628 d.C.) della formula di Erone, dovuta a Brahamagupta (598 - 668), matematico e astronomo indiano, afferma che l'area *A* di un quadrilatero *inscritto* (figura 4) in una cir-

conferenza (quadrilatero di cui siano note le misure a, b, c, d dei suoi lati e indicato con p il suo semiperimetro) è data da

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,.$$

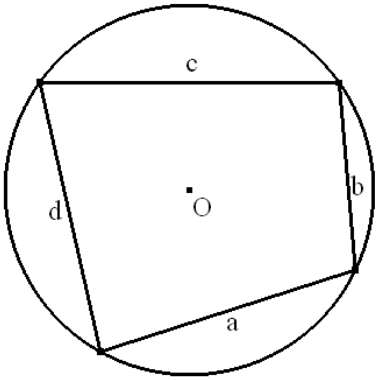

Figura 4

2.2. Esempi riguardanti l'invertibilità di una implicazione

Forniamo ora alcuni esempi relativi al problema dell' "invertibilità di una implicazione".

Esempio 1. (Equivalenza di equazioni)
Come noto, se α è soluzione di $f(x) = g(x)$ allora α è soluzione di $f(x)^2 = g(x)^2$. Ovviamente di questa proprietà non vale l'inverso, ad esempio se $f(x) = x$ e $g(x) = 2$, allora 2 è soluzione di $f(x) = g(x)$ e quindi anche di $f(x)^2 = g(x)^2, (x^2 = 4)$, ma –2 è soluzione di $f(x)^2 = g(x)^2$ ma non di $f(x) = g(x)$ e questo è uno dei motivi per i quali nella risoluzione di un'equazione irrazionale è necessaria la "verifica" (solo per potenze con esponente pari).
Non sempre la verifica è però agevole; non solo, in alcuni casi è addirittura impossibile da eseguire, ad esempio

$\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-9}$. Elevando al quadrato si ottiene $x^2-9=x^2-9$, che è vera per ogni x reale, mentre non è vero che la relazione di partenza sia vera per ogni x reale (deve essere $x\geq 3$). In questi casi è necessario sostituire la verifica diretta con una discussione dell'esistenza dei radicali coinvolti.
A proposito delle equazioni irrazionali, notiamo inoltre che nei libri di testo di geometria analitica è consuetudine, nel ricavare l'equazione canonica sia dell'ellisse che dell'iperbole, non verificare l'equivalenza tra l'equazione iniziale e quella finale, che si ottiene dopo addirittura due elevamenti a quadrato. Riteniamo che provare tale equivalenza non sia necessario perché potrebbe essere non proponibile a livello elementare, ma pensiamo che, comunque, sia opportuno precisare che, in quel caso, vale tale equivalenza.

Esempio 2. (Divisibilità)
Un altro esempio è il seguente:
se due numeri naturali m,n sono tali che $m\cdot n$ divide il numero naturale k allora sia m che n dividono k.
Il viceversa non è vero, cioè se due numeri m, n dividono k non è detto che il loro prodotto divida k. Ad esempio $m=12$ e $n=9$ dividono entrambi $k=72$, ma $mn=108$ non divide 72.

Esempio 3. (Teorema di Pitagora)
In molti testi viene riportato, in modo corretto, il seguente enunciato del Teorema di Pitagora :
"in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti".
Tale teorema si può enunciare anche nella forma "Se… allora…".
Molto spesso, però, tale teorema viene erroneamente utilizzato per verificare se un triangolo, di cui siano note le lunghezze dei lati, sia o meno rettangolo. Ovviamente, se la relazione di Pitagora non vale (ossia se il quadrato del lato maggiore non è uguale alla somma dei quadrati dei lati minori), allora si può correttamente concludere che

il triangolo non è rettangolo, questo in base alla contronominale del teorema di Pitagora (che è ad esso equivalente); mentre nulla si può dire sulla natura del triangolo qualora valga la relazione suddetta, purché non si sia prima dimostrato che vale anche l' "inverso del teorema di Pitagora", cosa che raramente viene fatta, oppure spesso nei libri di testo non è messa nel dovuto risalto [11].

Si osservi che, in alcuni dei primi esercizi di geometria analitica, si richiede di verificare che un triangolo, note le coordinate cartesiane dei suoi vertici, è rettangolo, cosa che richiede in realtà anche l'uso dell' "inverso del teorema di Pitagora".

Si noti che, per enunciare quest'ultimo teorema non si può parlare di "cateti" e "ipotenusa" nella sua ipotesi. Pertanto un enunciato corretto dell' "inverso del teorema di Pitagora" può essere, ad esempio, il seguente:

> "se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due, allora il triangolo è rettangolo e ha per ipotenusa il primo dei lati considerati".

La dimostrazione di tale teorema deriva sostanzialmente dal fatto che il triangolo è una "figura rigida"[2]. Vediamone una possibile dimostrazione di carattere algebrico, basata su un ragionamento per assurdo.

Supponiamo, ad esempio, che il triangolo sia ottusangolo in A e che valga la relazione $a^2 = b^2 + c^2$ (figura 5). Condotta dal vertice C l'altezza CH relativa ad AB, posto $HA = x$, dovrà essere $x \neq 0$. Applicando una prima volta il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CHA si ha $CH^2 = b^2 - x^2$ e applicandolo di nuovo al triangolo rettangolo CHB si ha $CH^2 = a^2 - (x+c)^2$.

---

[2] Sia T un triangolo in cui i lati a,b,c verifichino la relazione $a^2 = b^2 + c^2$. Indichiamo con T' il triangolo rettangolo di cateti b e c e sia a' la sua ipotenusa. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo T' risulta $(a')^2 = b^2 + c^2$ e quindi $a'=a$. Ne segue che i triangoli T e T' sono congruenti e quindi anche T è un triangolo rettangolo.

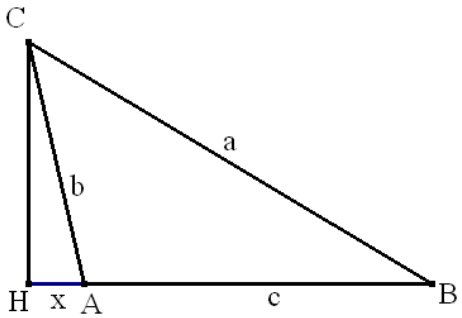

Figura 5

Uguagliando le due espressioni, svolgendo i calcoli e tenendo presente l'ipotesi ($a^2 = b^2 + c^2$), si giunge alla condizione $c \cdot x = 0$, relazione falsa in quanto sia c che x sono diversi da 0. Questo è assurdo e perciò il triangolo non può essere ottusangolo in A.

In modo analogo si dimostra che, nell'ipotesi precedente, il triangolo non può neppure avere un angolo acuto in A. Si conclude dunque che ABC è rettangolo in A.

Possiamo osservare che nell'enunciato del teorema di Pitagora si utilizzano i quadrati costruiti sui lati soltanto per comodità, ma il teorema si può enunciare considerando una qualunque terna di figure simili (non solo poligoni) "costruite" sui lati (figura 6).

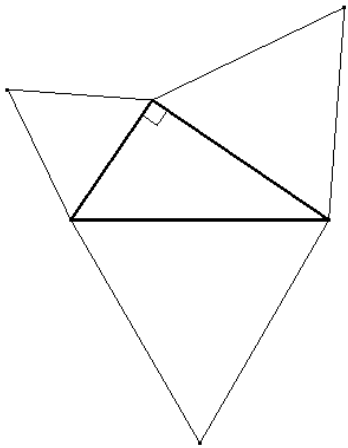

Figura 6

Abbiamo visto che, a volte, viene citato il teorema di Pitagora, ma in realtà si sta usando il suo inverso. Da un punto di vista matematico ciò non è corretto, anche se, valendo appunto tale inverso, si ottengono comunque risultati validi.

Esempio 4. (Teorema di Talete)
In questo caso è necessario porre molta attenzione all'uso del teorema di Talete e del suo "inverso". Ricordiamo l'enunciato del teorema di Talete:

> "Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, i segmenti di una trasversale sono proporzionali ai segmenti corrispondenti dell'altra, cioè sono proporzionali i segmenti compresi fra le stesse parallele".

Cosa si intende in questo caso per "inverso del teorema di Talete"? Su un testo per il biennio della Scuola secondaria di II grado troviamo questa formulazione (errata):

> "se un fascio di rette individua su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali, allora le rette sono parallele".

Prima osservazione: se si usa il termine "fascio di rette" si hanno due possibilità, o le rette sono tutte parallele (fascio improprio) e in questo caso non avremmo nulla da dimostrare, oppure le rette passano tutte per uno stesso punto (fascio proprio) e in questo caso sarebbe impossibile dimostrare che le rette sono parallele. Quindi si dovrebbe almeno sostituire la parola "fascio" con "insieme".
Il testo citato riporta una dimostrazione che ha al suo interno un grossolano errore e proprio nel ragionamento per assurdo e in particolare nella negazione di "tutte le rette sono parallele", affermando che "tutte le rette sono parallele, tranne una, che non risulta, quindi, ad esse parallela".
Rimane comunque il dubbio se il teorema così enunciato sia comunque vero. La risposta è negativa ed è anche facilmente dimostrabile con un controesempio (vedi figura 7).

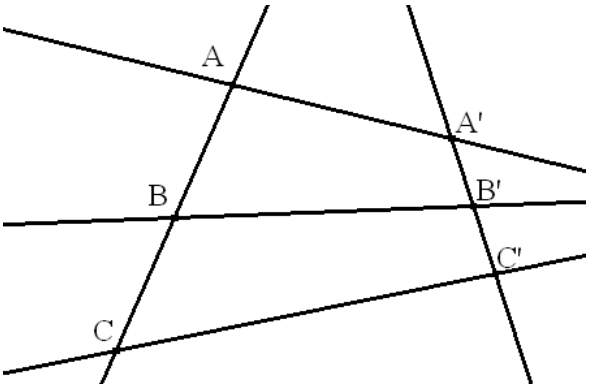

Figura 7

I segmenti *AB* e *BC* (figura 7) sono congruenti; i segmenti *A'B'* e *B'C'* sono congruenti, quindi *AB*, *BC* e *A'B'*, *B'C'* sono direttamente proporzionali, ma chiaramente le rette *AA'*, *BB'*, *CC'* non sono parallele.

È opportuno precisare che, dalla formulazione generale del teorema di Talete, segue, come caso particolare, il seguente risultato:

"Siano date tre rette tagliate da due trasversali. Se le tre rette sono parallele allora i segmenti corrispondenti sulle due trasversali sono proporzionali".

L'inverso "parziale" del teorema di Talete può essere allora enunciato come segue:

> "Siano date tre rette tagliate da due trasversali. Se i segmenti corrispondenti sulle due trasversali sono proporzionali e *se due delle tre rette sono parallele* , allora anche la terza è parallela a quelle due".

Questo risultato viene applicato soprattutto ai triangoli nelle seguenti formulazioni:

A) una retta parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

B) inverso di A): se due lati di un triangolo sono divisi in parti proporzionali, la retta congiungente i punti di suddivisione è parallela al terzo lato.

3. Ruolo di esempi e controesempi nei teoremi e nelle dimostrazioni

Proponiamo ora alcune osservazioni sul ruolo di *esempi* e *controesempi* nei teoremi e nelle dimostrazioni, tenendo presente che molto spesso gli studenti si chiedono perché in alcuni casi con un esempio si dimostra una proprietà, mentre in altri questo non è possibile (anzi si utilizzano gli esempi per smentire una proprietà). Vediamo ora, in alcune situazioni, che tutto ciò dipende dal tipo di enunciato del teorema da dimostrare.

a) Enunciato di carattere generale (vero): "Tutti i quadrati hanno le diagonali uguali". Pur potendo fornire vari esempi di tale proprietà non possiamo esaurire tutti i casi possibili (che sono infiniti) e quindi questa proprietà richiede una dimostrazione generale. Si tenga però presente che se la proprietà è di carattere generale ma riguarda un insieme finito, allora teoricamente si potrebbero esaurire , con degli esempi, tutti i casi possibili.

b) Enunciato di carattere generale (falso): "Tutti i rettangoli hanno le diagonali perpendicolari".
In questo caso è possibile fornire esempi di rettangoli con le diagonali perpendicolari (quadrati) ma è anche possibile trovare esempi di rettangoli le cui diagonali non sono perpendicolari (rettangoli non quadrati). Pertanto l'affermazione iniziale è falsa e per certificarla come tale è sufficiente dare un controesempio, ossia un rettangolo che non abbia le diagonali perpendicolari.
Un enunciato dello stesso tipo (falso) è stato presentato nella seconda parte di questo articolo relativamente alla "congettura" di Fermat sui numeri primi del tipo $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

c) Enunciato di carattere esistenziale (falso): "Esiste un numero primo pari maggiore di 2".
In questo caso è possibile ovviamente fornire degli esempi di numeri pari, maggiori di 2, non primi, ma per provare che l'enunciato è falso si dovrà fornire una dimostrazione Per dimo-

strare che il precedente enunciato è falso si dovrà provare che ogni numero pari maggiore di 2 non è primo.
Un enunciato dello stesso tipo (esistenziale, falso) è dato dal cosiddetto "ultimo teorema di Fermat", così formulato: "Esistono numeri naturali $n > 2$ tali che l'equazione $x^n + y^n = z^n$, ha soluzioni intere non banali (ossia, con *x*, *y*, *z* non nulli)".

d) Enunciato di carattere "esistenziale" (vero): "Esiste un numero primo pari". In questo caso per la dimostrazione è sufficiente fornire un esempio di numero primo pari (il numero 2).
"Esiste uno ed un solo numero primo pari" (proprietà vera).In questo caso oltre a fornire un esempio di numero primo pari bisogna provare che esso è unico e questa affermazione non è dimostrabile con esempi.

e) Enunciato di carattere "esistenziale" (vero): "Esiste un numero primo maggiore di $1000^{1000000000}$".
In questo caso l'esistenza di tale numero primo è assicurata dal teorema sull'infinità dei numeri primi, mentre fornire un esempio concreto di un tale numero è assai arduo.

f) "Esistono segmenti incommensurabili" (vero). In questo caso basta trovare un esempio, che potrebbe essere quello del lato e della diagonale di uno stesso quadrato, ma la verifica che questi sono effettivamente incommensurabili richiede una dimostrazione (non semplice).

A volte, in matematica, si dimostra l'esistenza di "oggetti" pur non fornendo esempi concreti di essi (esistenza non costruttiva). Consideriamo il seguente esempio [5]:

Esistono due numeri irrazionali a e b tali che a^b sia razionale.

Proviamo con $a = b = \sqrt{2}$. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è razionale abbiamo trovato l'esempio, mentre se è irrazionale, ponendo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$ si ha $a^b = 2$. Viene quindi dimostrata l'esistenza dei due numeri irrazionali, senza però stabilire quale delle coppie di numeri proposte sia quella richiesta. Ciò non esclude che sia possibile provare, per altra via, quale delle due coppie abbia i requisiti richiesti.

Per concludere, proponiamo tre "problemi" curiosi, abbastanza noti, in cui si possono evidenziare alcune delle tematiche discusse in precedenza.

Problema 1. Questo problema riguarda l'aspetto della "generalizzazione", ossia dedurre una regola generale a partire da alcuni esempi per i quali quella regola è rispettata.
Una spia, al fine di introdursi in una base nemica, osserva ed ascolta, non visto, i seguenti dialoghi tra la sentinella e alcuni militari che arrivano all'entrata della base:

sentinella	*militare*
«sei»	*«tre»*
«otto»	*«quattro»*
«dieci»	*«cinque»*
«dodici»	*«sei»*

In ognuno dei casi precedenti, la sentinella permette al militare di entrare.
A questo punto la spia ritiene di aver scoperto "la parola d'ordine" e si presenta alla sentinella, la quale dice: «quattordici» e la spia risponde: «sette».
Ma la sentinella non permette alla spia di entrare. Perché?

Dalle risposte ascoltate la spia aveva dedotto che la risposta al numero proposto dalla sentinella dovesse essere la metà del numero stesso e così era stato fino a quel punto. Purtroppo, per la spia, la regola concordata consisteva nel rispondere, al numero proposto dalla sentinella, con il numero delle lettere che compongono la parola che esprime quel numero. Quindi la spia, per poter entrare, avrebbe dovuto rispondere a "quattordici" con "undici".

Problema 2. Questo problema riguarda invece l'uso corretto delle ipotesi, anche quando queste potrebbero sembrare, a prima vista, non significative.

Dialogo fra due amici (matematici!) *A* e *B*:

A. Sto andando a casa dai miei figli a festeggiare un compleanno.

B. Quanti figli hai e che età hanno?

A. Ne ho tre e invece di dirti la loro età ti dico solo che il prodotto delle loro età è 36.

B. È troppo poco, mi devi fornire altri elementi.

A. Ti dico ancora che la somma delle loro età corrisponde al tuo numero di casa..

Dopo averci pensato un po' *B* afferma:

B. Ancora non posso stabilire la loro età.

Interviene ancora *A*:

A. Ti do quest'ultimo indizio: il più grande ha gli occhi verdi.

Solo dopo questo indizio *B* riesce a risolvere il problema:

B. Adesso posso dire che i tuoi figli hanno rispettivamente 2, 2 *e* 9 *anni.*

Vediamo quale ragionamento ha portato *B* alla conclusione. Poiché il prodotto dei numeri (interi) che esprimono le età dei tre figli è 36, si possono presentare i seguenti casi, indicando a fianco anche le rispettive somme delle tre età:

1 , 1 , 36 somma=38
1 , 2 , 18 somma=21
1 , 3 , 12 somma=16
1 , 4 , 9 somma=14
1 , 6 , 6 somma=13
2 , 2 , 9 somma=13
2 , 3 , 6 somma=11
3 , 3 , 4 somma=10.

Poiché *B* conosce il proprio numero di casa, il fatto di non essere in grado di rispondere dopo aver avuto l'informazione relativa alla somma delle età, sta a indicare che il numero di casa di *B* è 13, in quanto è l'unico a comparire due volte nella lista delle possibili somme (in tutti gli altri casi la risposta di *B* sarebbe stata possibile

senza bisogno di ulteriori informazioni). A quel punto *B* aveva due alternative circa le età, precisamente 1, 6, 6 oppure 2, 2, 9.
L'ultima informazione fornita da *A*, apparentemente inutile, sta invece a indicare che c'è il figlio maggiore e quindi la risposta esatta è appunto 2, 2, 9.
E se l'ultima informazione di *A* fosse stata: *Il più piccolo è un maschio?* In tal caso, fermo restando i ragionamenti precedenti, la conclusione sarebbe stata 1, 6, 6.

Problema 3. Quest'ultimo esempio illustra l'uso o meno degli esempi nelle dimostrazioni.
Supponiamo di avere una normale scacchiera formata da 64 *caselle quadrate, come in figura 8.*
Si hanno a disposizione 32 *tasselli rettangolari di dimensioni una pari al lato di ogni casella della scacchiera e l'altra doppia (vedi figura 8). Ci chiediamo se sia possibile ricoprire con questi* 32 *tasselli l'intera scacchiera.*

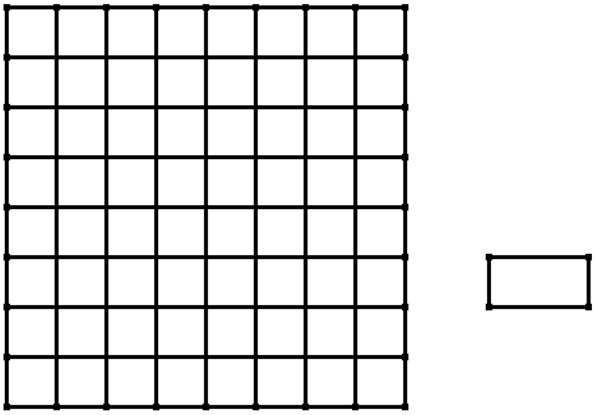

Figura 8

La risposta è affermativa; basta infatti disporre i tasselli in orizzontale (o in verticale) a partire da uno dei vertici. In questo caso siamo riusciti a dimostrare una certa proprietà attraverso un esempio.
Supponiamo ora di avere una scacchiera "mutilata", ossia ottenuta eliminando due caselle che si trovano in vertici opposti, come in figura 9.

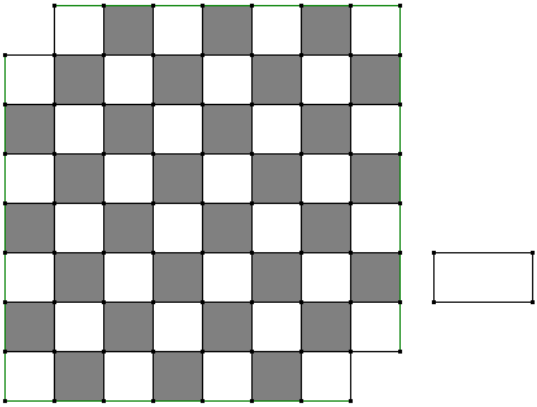

Figura 9

Si hanno ora a disposizione 31 *tasselli rettangolari delle stesse dimensioni del caso precedente. Ci chiediamo se sia possibile ricoprire con questi* 31 *tasselli l'intera scacchiera "mutilata".*
Dopo alcuni tentativi, si fa strada l'idea che ciò non sia possibile. Non possiamo però escludere che sia possibile ottenere quanto richiesto utilizzando una tecnica particolare, diversa da quelle da noi usate. Pertanto, se vogliamo convincerci che non esiste un modo per ricoprire la scacchiera "mutilata", dobbiamo fornire una dimostrazione e non possiamo invece basarci solo sulla nostra incapacità di fare quanto richiesto.
Un modo per dimostrare l'impossibilità di ricoprire la scacchiera "mutilata" con i 31 tasselli rettangolari, consiste nell'osservare che le due caselle eliminate hanno lo stesso colore, supponiamo entrambe nere. Pertanto rimangono sulla scacchiera 30 caselle nere e 32 bianche. Ora, comunque si dispongano i primi 30 tasselli, tenen-

do presente che ogni tassello ricopre due caselle di colore diverso, rimangono scoperte due caselle entrambe bianche e pertanto con l'ultimo tassello non sarà possibile ricoprirle.
Questo problema è riportato in *L'ultimo Teorema di Fermat* di Simon Singh, Rizzoli, Milano 1998 e in *Com'è bella la Matematica* di Ian Stewart, Bollati Boringhieri, Torino, 2006. Vedi anche *Enigmi e giochi matematici*, volumi 1, 2, 3, 4, di Martin Gardner, Sansoni, Firenze, 1966-67.
Nell'ultimo esempio si evidenzia anche un altro possibile modo di procedere in alcune dimostrazioni, ossia si individua una costruzione o una strategia non implicita nelle ipotesi (nell'esempio, la colorazione delle caselle), che permette o aiuta a dimostrare la proprietà richiesta. Un esempio più prettamente matematico di questo modo di procedere si può ritrovare nella dimostrazione del teorema dell'angolo esterno ("ogni angolo esterno di un triangolo è maggiore di ogni angolo interno non adiacente").

Conclusioni

Le osservazioni e considerazioni riportate in questo articolo (vedi anche Prima e Seconda parte) si possono estendere a vari contesti, diversi da quelli esaminati, in quanto le tematiche trattate sono comuni a quasi tutti i rami della matematica. Desideriamo però puntualizzare che le osservazioni proposte devono comunque essere "filtrate" dal docente, che - in ogni caso - deve adattarle alle caratteristiche e alle esigenze dei suoi studenti. Dal punto di vista didattico alcuni dei temi proposti non sono di facile trattazione in classe e sarà necessaria una certa gradualità e la scelta di attività e contesti opportuni in cui emerga la necessità della riflessione e del chiarimento dei concetti esposti. Rimandiamo alla bibliografia per ulteriori approfondimenti didattici (in particolare a [12], [14], [16] e [17]).

Bibliografia

[1] G. Accascina, M. Barra, C. Bernardi, M. Menghini, *Movimento, percezione e dimostrazione*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 29 A-B n. 4, Luglio-Agosto 2006, pp. 313-346.

[2] S. Antonini, M.A. Mariotti, *La dimostrazione per assurdo: un modello per un'analisi cognitiva e didattica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 29, A-B n. 4, Luglio-Agosto 2006, pp. 385-414.

[3] S. Baruk, *Dizionario di Matematica Elementare*, edizione italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti. Zanichelli, Bologna, 1998.

[4] F. Bellissima, P. Pagli, *La verità trasmessa. La logica attraverso le dimostrazioni matematiche*. Sansoni, Firenze, 1993.

[5] C. Bonotto, F. Ferronato, *La logica nella scuola secondaria: una proposta*. La matematica e la sua didattica, n. 2, 2003, pp. 139-169.

[6] C. Bernardi, *Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della "e"*. Progetto Alice, n. 1, Anno 2000-I, pp. 11-21.

[7] M. Ferrari, *Uno strumento per definire e dimostrare: il principio di induzione matematica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 11-B, Dicembre 1988, pp. 1169-1198.

[8] L. Grugnetti, *Argomentare e dimostrare nella scuola media*. Atti XV Convegno nazionale N.R.D. per la Scuola media, Salice Terme, 1996.

[9] M. Impedovo, *Errori tipici in matematica e inopportunità didattiche*. Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, anno XXV, suppl. al n. 10 (1998), pp. 37-54.

[10] C. Marchini, *Argomentazione e dimostrazione. Alcune riflessioni sugli aspetti didattici*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 10, n. 2, 1985, pp. 121-140.

[11] G. Mazzanti, B. Piochi , *Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica*. Didattica delle Scienze, n. 149, Ottobre 1990, pp. 45-50.

[12] D. Paola, O. Robutti, *La dimostrazione alla prova. Itinerari per un insegnamento integrato di algebra, logica, informatica, geometria*, in MIUR-UMI, *Matematica ed aspetti didattici*. Liceo "G. Ricci-Curbastro", Lugo di Romagna, 2001, pp. 87-189.
[13] A. Scimone, F. Spagnolo, *Il caso emblematico dell'inverso del teorema di Pitagora, nella storia della trasposizione didattica attraverso i manuali*. La matematica e la sua didattica, n. 2, 2005, pp. 217-227.
[14] MIUR-UMI-SIS, *Matematica 2003, La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola secondaria di secondo grado*, Liceo Vallisneri, Lucca 2004.
[15] V. Villani, *Errori nei testi scolastici: calcolo numerico, logica, informatica*. Archimede, Anno XLVI, 1994, pp 3-18.
[16] V. Villani, *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Aritmetica e Algebra)*, Pitagora, Bologna 2003.
[17] V. Villani, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Geometria)*, Pitagora, Bologna 2006.