Alcune osservazioni sui concetti di definizione e di dimostrazione nell'insegnamento della matematica[1] Seconda parte

Giuliano Mazzanti, Valter Roselli, Luigi Tomasi

Abstract. This paper is the second part of a contribution in which we offer some observations and reflections on the concepts of definition, theorem and demonstration and on the role of examples and counterexamples, which can be useful, from a didactic point of view, to teachers of secondary school.
This material can also be used by undergraduate university students interested in a career as secondary school mathematics teachers.
This second part of the paper is about the issue of theorem and demonstration in the teaching of mathematics at secondary school.

Sommario. Questo articolo è la seconda parte di un contributo in cui proponiamo alcune osservazioni e riflessioni sui concetti di definizione, di teorema e dimostrazione e sul ruolo di esempi e controesempi, che possono risultare utili, da un punto di vista didattico, a docenti della Scuola secondaria di I e di II grado.
Tale materiale può essere utilizzato proficuamente anche dagli studenti universitari della laurea magistrale interessati a intraprendere l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.
Questa seconda parte è dedicata specificamente ai concetti di teorema e di dimostrazione nella didattica della matematica nella scuola secondaria.

[1] Questo articolo, in una forma più ridotta, è stato inizialmente pubblicato in AA.VV. (a cura di Giuliana Gnani e Valter Roselli), *Idee e proposte per un corso di aggiornamento in didattica della matematica* per docenti di Scuola Secondaria, Università di Ferrara, SSIS, 2008.

Alcune osservazioni sui concetti di definizione e di dimostrazione nell'insegnamento della matematica Seconda parte

Giuliano Mazzanti*, Valter Roselli*, Luigi Tomasi**
* Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Ferrara
** Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Adria (RO)

1. Introduzione

Questo articolo è la continuazione di uno precedente, pubblicato nel numero di febbraio di questa rivista, dedicato al concetto di definizione nella didattica della matematica. Prendiamo ancora spunto dalle recenti *Indicazioni nazionali per la matematica* relative al riordino della Scuola secondaria di II grado (DPR 15 marzo 2010, n. 89) per presentare alcune considerazioni e osservazioni didattiche riguardo i concetti di teorema e dimostrazione. In questo documento si afferma:
Liceo scientifico – I biennio - Geometria - *Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli* Elementi *di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.*

Analogamente, per l'ingresso all'università, in diversi documenti sono indicate quelle che dovrebbero essere le conoscenze e competenze minime di matematica per uno studente che intenda seguire un corso di studi per una qualunque facoltà di carattere scientifico (e non solo). Tra le indicazioni presenti mettiamo in evidenza le seguenti ricavate dal *Syllabus di Matematica, Conoscenze e capacità*

per l'accesso all'Università, UMI - Unione Matematica Italiana, versione del 1999:

- *Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione.*
- *Implicazione. Condizioni sufficienti, condizioni necessarie.*
- *Conoscere il significato dei termini: assioma, definizione, teorema, lemma, corollario, ipotesi, tesi. Saper riconoscere ipotesi e tesi in un teorema. Dimostrazioni per assurdo.*
- *Quantificatori: $\forall$ (per ogni) ed $\exists$ (esiste). Uso dei quantificatori.*

A questi aggiungiamo:

- *Conoscenza del ruolo logico di esempi e controesempi.*

In questa seconda parte affrontiamo alcune problematiche di carattere didattico relative al concetto di teorema e ad alcune tipologie di dimostrazione.

2. Alcune osservazioni e considerazioni sul concetto di "teorema" e su quello di "dimostrazione"

Prima di affrontare l'argomento indicato, ricordiamo che vengono utilizzati molti altri termini con lo stesso significato di "teorema" [16]. Precisamente, in generale, il termine:
Lemma viene usato per indicare un risultato utile soprattutto per dimostrare qualche teorema "importante";
Corollario viene usato per indicare una conseguenza "immediata" di altri teoremi;
Proposizione viene usato come sinonimo di teorema, anche se in logica ha un significato diverso;
Legge-Regola-Proprietà vengono usati per indicare teoremi "di carattere numerico";

Criterio viene utilizzato per indicare in alcuni casi una condizione necessaria e sufficiente, e in altri una condizione soltanto sufficiente;
Principio ha vari significati, a volte di teorema, a volte anche di assioma.
Ricordiamo infine che per *congettura* si intende una proposizione della quale non si sa ancora se sia vera o falsa, pur avendola verificata in un numero "molto alto" di casi.
In questa parte non vogliamo fare un discorso troppo rigoroso, ma intendiamo proporre alcune considerazioni e osservazioni sul concetto di "teorema" e relative "dimostrazioni", che riteniamo possano essere utili da un punto di vista didattico.
In termini intuitivi si può dire che un "teorema" è composto da un "enunciato" e dalla (da una) "dimostrazione".
In generale un teorema è una particolare "proposizione" che si presenta nella forma di implicazione logica da dimostrare, è perciò una proposizione del tipo:
"Se A allora B" che viene anche indicata con la seguente scrittura $A \to B$; A si dice "ipotesi" e B "tesi" (del teorema).
Esempio. Consideriamo il teorema:
Se un quadrilatero Q è un quadrato allora il quadrilatero Q ha le diagonali uguali.
Il teorema precedente si può anche enunciare in una delle seguenti forme.
"Condizione necessaria affinché un quadrilatero Q sia un quadrato è che il quadrilatero Q abbia le diagonali uguali",
oppure:
"Condizione sufficiente affinché un quadrilatero Q abbia le diagonali uguali è che il quadrilatero Q sia un quadrato".
L'enunciato è stato dato evidenziando l'ipotesi e la tesi del teorema.
Molto spesso, però, viene presentato nella seguente forma :
"Le diagonali di un quadrato sono uguali".

Notiamo che in questa formulazione non sono chiaramente evidenti ipotesi e tesi, e pertanto, in questo caso, una prima difficoltà consiste nell'individuarle.
In matematica, per tradizione –ma anche nel linguaggio comune- a volte si usa una terminologia e a volte un'altra.
Ad esempio, il Teorema di Pitagora si enuncia, usualmente, affermando che "se un triangolo è rettangolo allora …." e non usando la terminologia "condizione necessaria affinché un triangolo sia rettangolo è che …", mentre, ad esempio, il legame tra continuità e derivabilità, in analisi, viene espresso di solito in uno dei seguenti modi: "condizione necessaria affinché una funzione f sia derivabile è che f sia continua" oppure "condizione sufficiente affinché f sia continua è che f sia derivabile".
In alcuni casi si usano indifferentemente l'una o l'altra, per esempio "se n è un multiplo di 4 allora n è pari", che può essere espresso dicendo che "condizione necessaria affinché n sia multiplo di 4 è che n sia pari" oppure "condizione sufficiente affinché n sia pari è che n sia multiplo di 4" o anche, più semplicemente, "un numero multiplo di 4 è pari".
Anche nel linguaggio comune si usano entrambe le terminologie, ad esempio "per andare al cinema devo uscire di casa" si può anche esprimere dicendo che "per andare al cinema è necessario uscire di casa" oppure "per uscire di casa è sufficiente andare al cinema".
Osserviamo tuttavia, dal punto di vista didattico, che l'utilizzazione della terminologia "condizione necessaria" oppure "condizione sufficiente" non è di facile assimilazione e uso per gli allievi perché richiede l'abilità di tradurre una data proposizione in un'implicazione della forma "$A \to B$", dove non sempre è agevole individuare la proposizione A e la proposizione B. Inoltre, nell'insegnamento non è sempre presente l'avvertenza di presentare questa proposizione nei due modi in cui la si può leggere:
- condizione necessaria per A è B;
- condizione sufficiente per B è A.

Possiamo quindi concludere che non sempre, nell'enunciato di un teorema, ipotesi e tesi vengono espresse in modo esplicito, come visto negli esempi precedenti.
Si tenga comunque presente che ci sono dei teoremi nel cui enunciato non compare l'ipotesi, ad esempio "esistono infinite rette", oppure "esiste un punto che divide un segmento in due parti uguali". La dimostrazione di questi teoremi richiede (soltanto) l'uso di assiomi della geometria euclidea.
Esistono poi teoremi nei quali ipotesi o tesi o entrambe possono essere congiunzioni o disgiunzioni di proposizioni, per esempio "se *n* è un numero primo, allora $n = 2$ *oppure n* è un numero dispari".
Oppure "se *Q* è un quadrato allora le diagonali di *Q* sono uguali *e* perpendicolari *e* si dimezzano".
In questo secondo enunciato si osservi che anche l'ipotesi ("*Q* è un quadrato") può essere espressa come congiunzione di più proposizioni, precisamente: "se *Q* è un parallelogramma *e Q* ha tutti i lati uguali *e* tutti gli angoli uguali allora …".
In questi casi, una delle maggiori difficoltà consiste, a volte, nel passare da una proposizione alla sua negazione (cosa che risulta fondamentale nelle cosiddette dimostrazioni "indirette").
Poniamoci ora una domanda: che cosa possiamo intendere per *dimostrazione*?
Nella logica matematica, usualmente, una dimostrazione di un teorema viene presentata come segue:
in una teoria *T* (dati gli enti primitivi e i relativi assiomi), per dimostrazione di una tesi *B* a partire dalle ipotesi $H_1, H_2, ..., H_n$ (l'ipotesi *A* è in questo caso la congiunzione di queste) si intende una sequenza finita e ordinata di proposizioni (enunciati) che termina con la tesi *B* ed è tale che ogni proposizione della sequenza è un postulato (o un assioma) della teoria *T*, oppure una delle ipotesi $H_1, H_2, ..., H_n$,

oppure è ottenuta da una o più proposizioni precedenti della sequenza mediante l'applicazione di "regole logiche"[2].
Anche se nella logica matematica una dimostrazione è caratterizzata in modo molto chiaro, esistono diverse tipologie di dimostrazione, che, in generale, differiscono tra loro per l'utilizzo delle regole logiche. Dal punto di vista didattico questo non sempre è opportunamente evidenziato, creando spesso misconcetti e difficoltà di comprensione negli allievi, che arrivano a pensare che ogni teorema abbia una sua particolare dimostrazione.
Vediamo ora alcune tipologie di dimostrazione, cominciando da quella che appare, agli studenti, più "semplice".

2.1. Dimostrazione diretta

In questa dimostrazione si parte dall'ipotesi e, esplicitandola, si arriva direttamente alla tesi. Si consideri, per esempio, il seguente

Teorema. Se n è un numero dispari, allora n^2 è un numero dispari.

Dim.: (Ipotesi) n è un numero dispari $\Rightarrow$ (per definizione di numero dispari) esiste un numero naturale m tale che $n = 2m+1 \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Segue che esiste un numero naturale k $(= 2m^2 + 2m)$ tale che $n^2 = 2k+1$ e quindi n^2 è un numero dispari (Tesi).
Si noti che, tra le altre proprietà, abbiamo usato la transitività dell'implicazione logica.
Prima di procedere, vediamo alcune note sul concetto di numero pari o dispari:

1. Il concetto di numero pari (dispari) viene descritto, in generale, dagli studenti solo attraverso esempi numerici, ma non sempre viene fornita la definizione precisa e quest'ultima è evidente-

[2] In pratica, tra le proposizioni della sequenza utilizzate per la dimostrazione, a volte si usano risultati già noti, che sono stati dedotti da una o più ipotesi del teorema che si vuol dimostrare. Ciò è particolarmente evidente nell'utilizzo dei lemmi nella dimostrazione di un teorema.

mente necessaria se si vogliono dare dimostrazioni inerenti tali concetti.

2. Non sempre il concetto di numero pari (o di numero dispari) viene utilizzato in modo corretto; ad esempio nella formula risolutiva "ridotta" delle equazioni di secondo grado, a volte si afferma che conviene applicarla quando il coefficiente b del termine in x di primo grado è "pari"; questo anche se, il più delle volte, b è un numero reale (non intero) per il quale è più comodo considerarne la metà, mentre non ha alcun senso dire che è pari, perché i concetti di "numero pari" e di "numero dispari" hanno senso solo per i numeri naturali o più in generale per i numeri interi.
3. Da un punto di vista didattico, con l'uso delle nuove tecnologie o attraverso esempi, è opportuno partire da "enunciati aperti" in modo da ricavare delle congetture: ad esempio "se n è un numero dispari, cosa possiamo affermare di n^2?" Dopo alcuni esempi si può *congetturare* che se n è dispari allora anche n^2 è dispari. Ovviamente, qualunque sia il numero di esempi portato a conferma di tale congettura, ciò non rappresenta una dimostrazione, ossia non è possibile escludere che vi siano casi in cui, pur essendo n dispari si abbia che n^2 non sia un numero dispari. Questo modo di procedere ha il vantaggio di presentare la matematica non come un "prodotto finito" (definizioni, teoremi, ecc.), ma permette di intravedere qual è il modo di procedere di un matematico per arrivare a congetture ed eventualmente alla loro dimostrazione o confutazione, ed è molto utile nell'affrontare proprietà di carattere geometrico.

Ricordiamo che una "congettura" è una proposizione della quale non si sa ancora se sia vera o falsa; diventa un teorema se si dimostra che è vera, mentre, spesso, basta un controesempio per poter affermare che è falsa. Vediamo tre famosi esempi di "congettura".

"Congettura" di Fermat (abbiamo usato le virgolette perché questa

non è più una congettura): Pierre de Fermat (1601-1665) ipotizzò che "$F_n = 2^{(2^n)} + 1$ è un numero primo per ogni naturale n". Con una esplorazione numerica si trova che per

$n = 0$	$F_0 = 3$	è un numero primo
$n = 1$	$F_1 = 5$	è un numero primo
$n = 2$	$F_2 = 17$	è un numero primo
$n = 3$	$F_3 = 257$	è un numero primo
$n = 4$	$F_4 = 65537$	è un numero primo
$n = 5$	$F_5 = 641 \cdot 6700417$	*non* è un numero primo

(questo controesempio, per $n = 5$, fu trovato da Eulero nel 1732). Pertanto quanto ipotizzato da Fermat è falso, ossia è vero il seguente teorema:

"esistono numeri del tipo $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ che non sono primi".

Congettura di Goldbach (prende il nome da Christian Goldbach**,** 1690-1764, che la comunicò a Eulero nel 1742):
"Qualsiasi numero naturale pari maggiore di 2 può essere espresso come somma di due numeri primi (eventualmente uguali)".
Esempi: 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=5+5=3+7. Quest'ultimo esempio permette intanto di affermare che la decomposizione, se esiste, non è unica, neppure a meno dell'ordine.
Osserviamo, però, che se il numero è dispari e maggiore di 3 una tale decomposizione non è sempre possibile. Per esempio, 11 non si può scrivere come somma di due numeri primi, in quanto necessariamente uno di essi deve essere 2 (essendo gli altri numeri primi tutti dispari e la somma di due dispari è un pari) e l'altro necessariamente deve essere 9, che chiaramente non è primo.

Congettura dei numeri gemelli: ricordiamo che due numeri naturali si dicono "gemelli" se sono numeri primi che differiscono di 2 (ad esempio 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13 sono coppie di numeri gemelli).
La congettura dei numeri gemelli afferma che: "esistono infinite coppie di numeri gemelli".

È invece sorprendente che esista una sola "terna di numeri gemelli", data dai numeri 3, 5, 7 (e non invece 1, 3, 5, in quanto 1 non è un numero primo).
Siano infatti a, $a+2$, $a+4$ tre numeri con la proprietà richiesta e dimostriamo che necessariamente deve essere $a=3$.
Supponiamo a maggiore di 3 e sia r il resto della divisione di a per 3; tale resto r può essere 0, 1 o 2. Se $r=0$ allora a non è primo. Se $r=1$, allora $a+2$ risulta divisibile per 3 e perciò non è primo. Se infine $r=2$, allora $a+4$ risulta divisibile per 3 e perciò non è primo. In tutti e tre i casi si giunge quindi a un assurdo; perciò necessariamente deve essere $a=3$.

Dopo aver dato un esempio di dimostrazione diretta e prima di passare ad altri tipi di dimostrazione è opportuno fare alcune considerazioni sul concetto di "implicazione". Consideriamo una proposizione del tipo "se A allora B", che indicheremo con

$$A \to B \ (\textit{proposizione diretta}).$$

A partire da questa possiamo considerare le seguenti altre proposizioni:

$$(\textit{non } A) \to (\textit{non } B)$$

detta *proposizione contraria* di $A \to B$;

$$B \to A$$

detta *proposizione inversa* di $A \to B$;

$$(\textit{non } B) \to (\textit{non } A)$$

detta *proposizione contronominale* di $A \to B$.
Attraverso esempi è "facile" convincersi che $A \to B$ è equivalente a $(\textit{non } B) \to (\textit{non } A)$, cioè $A \to B$ è vera se e soltanto se $(\textit{non } B) \to (\textit{non } A)$ è vera, mentre in generale non è equivalente alle altre due. Da questo segue che un teorema del tipo "A implica

B" fornisce due informazioni, ovviamente equivalenti, ossia che "*A* implica *B*", ma anche che "(non *B*) implica (non *A*)"[3].

Esempi. Se il quadrilatero *Q* è un quadrato (proposizione *A*) allora le diagonali del quadrilatero *Q* sono uguali (proposizione *B*). Questa proposizione è equivalente alla seguente: se le diagonali del quadrilatero *Q* non sono uguali (non *B*) allora il quadrilatero *Q* non è un quadrato (non *A*).

Ovviamente la proposizione data non è equivalente alla seguente: se il quadrilatero *Q* non è un quadrato (non *A*) allora le diagonali del quadrilatero *Q* non sono uguali (non *B*),

e nemmeno alla seguente:

se le diagonali del quadrilatero *Q* sono uguali (*B*) allora il quadrilatero *Q* è un quadrato (*A*).

In alcuni casi, nelle applicazioni, è più conveniente utilizzare l'enunciato nella forma "(non *B*) implica (non *A*)". Ad esempio, se si vuole stabilire se il triangolo i cui lati misurano, in cm, 3, 4, 6 , è rettangolo, conviene usare la contronominale del teorema di Pitagora.

2.2. Dimostrazione attraverso il passaggio alla contronominale

L'equivalenza tra "$A \to B$" e "$(non\ B) \to (non\ A)$" può essere utilizzata nella dimostrazione di teoremi ed è detta dimostrazione attraverso il *passaggio alla contronominale*. Si consideri ad esempio il seguente

Teorema. Se n^2 è un numero dispari (*A*), allora n è un numero dispari (*B*).

Dimostrazione. Mostriamo tale proposizione mediante il passaggio alla contronominale, ossia dimostriamo che:

se n non è un numero dispari (non *B*) allora n^2 non è un numero dispari (non *A*).

[3] Ad esempio l'affermazione : "se α è un numero razionale allora α^2 è un numero razionale" (ovviamente vera) è equivalente a: "se α^2 è un numero irrazionale allora α è un numero irrazionale" (vera, ma non ovvia).

Infatti se n non è dispari (non *B*), allora n è pari, cioè esiste m naturale tale che $n = 2m$. Allora $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ e perciò n^2 è un numero pari (non *A*), essendo il doppio del numero naturale $2m^2$. Si conclude dunque che $A \to B$.
Si può anche osservare che tale proposizione si può dimostrare in modo diretto. Infatti se n^2 è un numero dispari allora esiste *m* naturale tale che $n^2 = 2m+1$, ma allora $2m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Ne consegue che, poiché 2 è primo e divide il prodotto $(n-1)(n+1)$, almeno uno tra $n-1$ e $n+1$ è divisibile per 2, ossia è un numero pari (in realtà lo sono entrambi). In ogni caso si conclude che n è un numero dispari.

Note
1. L'esempio precedente mette in evidenza come sia più corretto parlare di "*una* dimostrazione di un teorema" piuttosto che "*della* dimostrazione di un teorema".
2. Riportiamo il seguente teorema come un esempio significativo di dimostrazione attraverso il passaggio alla contronominale.
Teorema. Per ogni intero positivo N che non sia un quadrato perfetto, $\sqrt{N}$ è un numero irrazionale.
Dimostrazione. Proviamo il teorema mediante il passaggio alla contronominale, ossia dimostriamo che: "per ogni intero positivo *N,* se $\sqrt{N}$ è un numero razionale, allora *N* è un quadrato perfetto".
Supponiamo allora che $\sqrt{N}$ sia un numero razionale (proposizione "non *B*") e poniamo $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$ con a, b interi positivi primi tra loro (cioè a, b non hanno fattori in comune a parte l'unità).
Da $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$ segue $N = \frac{a^2}{b^2}$, ossia $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = N \cdot \frac{b}{a}$
e quindi in definitiva $\frac{a}{b} = \frac{Nb}{a}$.

Poiché la prima frazione è ridotta ai minimi termini, ne consegue che esiste un intero positivo c tale che $Nb = ac$ e $a = bc$, da cui

$$N = \frac{ac}{b} = \frac{bc^2}{b} = c^2 .$$

In conclusione N è un quadrato perfetto (proposizione "non *A*").

3. Il passaggio alla contronominale non va confuso con il "ragionamento per assurdo", il quale porta a un assurdo supponendo vera l'ipotesi e negando la tesi, come vedremo in un esempio qui di seguito. Di solito l'assurdo consiste nel dimostrare che non vale una proposizione che si sa essere vera, o perché è un assioma o perché è un teorema, o perché è una delle ipotesi.

2.3. Dimostrazione attraverso il ragionamento per assurdo

Consideriamo per esempio il seguente

Teorema. Nel piano, due rette parallele a una terza retta sono parallele tra loro.

Per rette parallele nel piano intendiamo, ovviamente, due rette che non hanno punti in comune, oppure due rette coincidenti. Quindi:
Ipotesi: a, b, c rette, a // c e b // c.
Tesi: a // b.
Dimostrazione. La dimostrazione si effettua per casi.

1) Se almeno due delle tre rette *a, b, c* sono coincidenti, allora la tesi è immediata.
2) Supponiamo che le rette *a, b*, *c* siano tutte distinte e ragioniamo per assurdo: supponiamo a // c, b // c (ipotesi) e a non // b (negazione della tesi).
   La negazione della tesi, "a non // b", significa che a e b sono incidenti in un punto P. Da questo segue che per P passerebbero due rette distinte (a e b) entrambe parallele a c e ciò è assurdo, perché contraddice il V postulato di Euclide.

In alcuni casi si applica un ragionamento per assurdo anche senza evidenziarlo, come ad esempio nella dimostrazione del seguente:

Teorema. Esistono infiniti numeri primi.

Dimostrazione. La dimostrazione che viene usualmente proposta (risalente a Euclide, *Elementi*, proposizione 20 del Libro IX) si svolge nel seguente modo: supponiamo che i primi distinti siano in numero finito e siano essi $p_1 = 2,\ p_2 = 3, ...,\ p_n$.

Consideriamo il numero $k = p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$.

Allora k è sicuramente maggiore di tutti i primi esistenti; tuttavia non è divisibile per nessuno di essi perché la divisione di k per uno qualunque dei p_i dà sempre come resto 1. Poiché ogni numero maggiore di 1 o è primo oppure è divisibile per un numero primo, possiamo concludere, in entrambi i casi, che esiste un numero primo diverso dai $p_1, p_2, ..., p_n$ e questo è assurdo.

Note

1. In questo caso l'enunciato del teorema non è espresso nella forma $A \to B$; eppure abbiamo usato ugualmente il ragionamento per assurdo. È possibile formulare questo teorema in modo da evidenziare il ragionamento per assurdo, in quanto esso si può enunciare nel seguente modo:
   "se *X* è l'insieme dei numeri primi, allora *X* è infinito".
   La dimostrazione precedente consiste nel ragionare per assurdo supponendo che *X* sia l'insieme di tutti i primi (ipotesi) e che *X* non sia infinito (negazione della tesi). La dimostrazione precedente porta ad affermare che *X* non contiene tutti i numeri primi (e questo è l'assurdo, perché nega l'ipotesi).
2. Si noti che, nella dimostrazione del teorema, non viene dimostrato che $p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ è sempre un numero primo (come invece a volte si ritiene erroneamente), proprietà non vera (per esempio $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$, ossia tale numero non è primo).
3. Si noti che il passaggio alla contronominale può essere visto come un caso particolare del ragionamento per assurdo.

Osservazione

Sia nel passaggio alla contronominale che nella dimostrazione per assurdo bisogna negare almeno una proposizione e questo molto spesso crea difficoltà negli studenti (e non solo). Vediamo ora alcuni esempi.

1) A = "tutti i rombi hanno le diagonali uguali".

La sua negazione è

Non A = non è vero che tutti i rombi hanno le diagonali uguali, ossia esiste almeno un rombo che non ha le diagonali uguali.

In generale la negazione di una proposizione del tipo: "per ogni x vale $P(x)$" è "esiste almeno un x per cui non vale $P(x)$". In simboli, usando "$\neg$" come segno di negazione:

"$\neg\forall x \;\; P(x)$" è equivalente a "$\exists x : \neg P(x)$".

2) A = "esiste un triangolo che ha due angoli retti".

La sua negazione è

Non A = non è vero che esiste un triangolo che ha due angoli retti, ossia tutti i triangoli non hanno due angoli retti.

In generale la negazione di una proposizione del tipo: "esiste un x per cui vale $P(x)$" è "per ogni x non vale $P(x)$", in simboli

"$\neg\exists x : P(x)$" è equivalente a "$\forall x \;\; \neg P(x)$".

3) A = "un quadrato è un quadrilatero che ha i lati uguali e gli angoli uguali".

Pertanto un quadrilatero non è un quadrato se non è vero che ha i lati uguali e gli angoli uguali, ossia se o non ha tutti i lati uguali oppure non ha tutti gli angoli uguali.

In generale la negazione di una proposizione del tipo "P e Q" equivale a "(non P) oppure (non Q)", in simboli

"$\neg(P \wedge Q)$" è equivalente a "$(\neg P) \vee (\neg Q)$".

4) A = un "quadratero" (termine di fantasia; vedi la prima parte dell'articolo) è un quadrilatero che ha i lati uguali *oppure* gli angoli uguali.

Pertanto un quadrilatero non è un "quadratero" se non è vero che ha i lati uguali o gli angoli uguali, ossia se non ha né i lati uguali, né gli angoli uguali.

In generale la negazione di una proposizione del tipo "*P* o *Q*" equivale a "(non *P*) e (non *Q*)" , in simboli

"$\neg(P \vee Q)$" è equivalente a "$(\neg P) \wedge (\neg Q)$".

Si tenga presente che la "o" degli esempi precedenti è la "disgiunzione inclusiva" (e, in generale, in Matematica la "o" viene intesa con questo significato).

Osservazione

Un uso corretto dei connettivi e dei quantificatori è fondamentale in vari contesti matematici, anche di carattere elementare; vedi ad esempio disequazioni del tipo $|x| \leq 3$ oppure $|x| \geq 3$, nei sistemi di equazioni e di disequazioni, nelle disequazioni irrazionali e in equazioni del tipo $f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$, oppure della forma $f(x,y)^2 + g(x,y)^2 = 0$. Per maggiore chiarezza riportiamo alcuni esempi.

Esempi

1) L'insieme delle soluzioni della disequazione $|x| \leq 3$ è costituito da tutti gli x reali tali che sia $x \leq 3$ *e* $x \geq -3$, che di solito viene descritto tramite la seguente scrittura $-3 \leq x \leq 3$ (in cui viene sottintesa la "e").
2) L'insieme delle soluzioni della disequazione $|x| \geq 3$ è costituito da tutti gli x reali tali che sia $x \geq 3$ *o* $x \leq -3$, scrittura che non è ovviamente esprimibile nella forma $3 \leq x \leq -3$, che deriva da un uso scorretto del connettivo "o" e che porterebbe a $3 \leq -3$!
3) Si consideri l'equazione $(x - y + 5)(2x + y - 2) = 0$. Poiché il prodotto di due numeri reali è zero se e soltanto se almeno uno dei due è uguale a zero, l'equazione precedente è soddisfatta da tutte le coppie di numeri che sono soluzioni dell'equazione: $x - y + 5 = 0$ (che nel piano cartesiano rappresenta una retta *r*) o dell'equazione: $2x + y - 2 = 0$ (che nel piano cartesiano rappresenta una retta *s*). Pertanto l'equazione iniziale rappresenta, nel piano cartesiano, l'*unione* delle rette *r* ed *s*.

4) Si consideri ora l'equazione $(x-y+5)^2+(2x+y-2)^2=0$. Poiché la somma dei quadrati di due numeri reali è uguale a zero se e soltanto se entrambi i numeri considerati sono uguali a zero, l'equazione data equivale al sistema costituito dalle equazioni $x-y+5=0$ *e* $2x+y-2=0$. Pertanto l'equazione data rappresenta, nel piano cartesiano, l'*intersezione* delle rette *r* ed *s*, ossia l'insieme costituito dal punto di coordinate $(-1,4)$.

Osservazione
Nel linguaggio comune i quantificatori vengono a volte sostituiti dall'articolo indeterminativo "un", come ad esempio nella frase "*un* numero pari è il doppio di *un* numero naturale". Il primo "un" ha il significato di "per ogni", mentre il secondo ha il significato di "esiste".
Citiamo ora, a proposito della difficoltà di passare da una proposizione alla sua negazione, anche altri autori, vedi ad esempio [5].
La negazione di "tutti i triangoli isosceli sono equilateri", per "qualcuno" è "nessun triangolo isoscele è equilatero" (errore presente non solo tra gli studenti).
Oppure possiamo citare V. Villani che in [15] scrive:
È mai possibile che….nemmeno alcuni autori di libri di testo sappiano ancora che la negazione di: 'tutti gli uomini sono mortali' è 'esiste (almeno) un uomo immortale' e non 'tutti gli uomini sono immortali!'

2.4. Dimostrazione per induzione

La tecnica dimostrativa che va sotto il nome di "dimostrazione per induzione matematica" viene utilizzata soprattutto nella teoria dei numeri (naturali) e si basa su uno degli assiomi di Peano (Giuseppe Peano, 1858-1932), precisamente il seguente:

Sia N l'insieme dei numeri naturali e sia $A \subseteq N$. Se si ha:

i) $1 \in A$;

ii) per ogni numero naturale k, se $k \in A$, allora anche $succ(k) \in A$ [4];

allora $A = N$.

Indichiamo ora con P una proprietà che riguarda i numeri naturali e scriviamo $P(n)$ per indicare la proprietà riferita al numero n. Ad esempio se P è "essere numero pari", allora $P(2)$ significa "2 è un numero pari", che è vera, $P(3)$ significa "3 è un numero pari", che è falsa.

Dall'assioma riportato segue una delle formulazioni più note del *Principio di induzione matematica*:

Se: i) vale $P(1)$

ii) per ogni numero naturale k, se vale $P(k)$ allora vale anche $P(succ(k))$,

allora $P(n)$ vale per ogni numero naturale n.

Diamo ora un esempio di applicazione di tale principio[5], dimostrando la formula, a tutti nota, che fornisce la somma dei primi n numeri naturali:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

In questo caso la proprietà $P(n)$ è l'uguaglianza precedente, da dimostrare che è vera per ogni numero naturale n.

Usiamo il principio di induzione; si ha allora:

i) $P(1)$ è vera in quanto $1=\frac{1(1+1)}{2}$.

ii) Per ogni numero naturale k, se vale $P(k)$ allora vale $P(k+1)$.

[4] Senza entrare nel dettaglio della teoria assiomatica dei numeri naturali proposta da Peano, con *succ*(k) intendiamo il concetto primitivo di "successore di k".

[5] Indichiamo ora con k+1 il successore del numero k, tenendo presente che a questo punto l'operazione di addizione in N è già stata definita.

Dobbiamo quindi provare che se risulta $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ allora si ha anche:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Risulta, applicando l'ipotesi:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=$$
$$=\frac{(k+1)\ (k+2)}{2}.$$

Resta quindi dimostrato che anche $P(k+1)$ è vera. In conclusione, la proprietà $P(n)$ è vera per ogni *n*.

Osservazioni

1. Notiamo che il principio di induzione è (equivalente a) un assioma della teoria dei numeri naturali, quindi non è una "regola logica", ma un assioma della teoria, come ad esempio il V postulato di Euclide per la geometria euclidea.
2. Il principio di induzione si applica per accertarsi che una certa proprietà (congetturata attraverso esempi o altra via) è vera in generale.
3. Da un punto di vista intuitivo il principio di induzione può essere giustificato come segue:
   Da i) segue che $P(1)$ è vera;
   da ii), sapendo che $P(1)$ è vera ($k=1$), segue che $P(2)$ è vera.
   A questo punto, ancora per ii), $P(3)$ è vera ($k=2$) e così via…
   Quindi P è vera per ogni numero naturale n.

Osservazione. Da un punto di vista didattico, questo metodo dimostrativo crea varie difficoltà, in quanto una errata interpretazione della ii) può fare pensare che si stia ipotizzando che sia vera la proprietà che si deve dimostrare.

La proposizione ii) afferma che:

per ogni $k \in N$, se vale $P(k)$ allora vale $P(k+1)$,

e *non*

se vale $P(k)$ per ogni $k \in N$, allora vale $P(k+1)$.

Nella terza parte forniremo alcuni suggerimenti di carattere didattico utili per lo studio di un teorema e di una relativa dimostrazione.

Bibliografia

[1] G. Accascina, M. Barra, C. Bernardi, M. Menghini, *Movimento, percezione e dimostrazione*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 29 A-B n. 4, Luglio-Agosto 2006, pp. 313-346.

[2] S. Antonini, M.A. Mariotti, *La dimostrazione per assurdo: un modello per un'analisi cognitiva e didattica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 29, A-B n. 4, Luglio-Agosto 2006, pp. 385-414.

[3] S. Baruk, *Dizionario di Matematica Elementare*, edizione italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti. Zanichelli, Bologna, 1998.

[4] F. Bellissima, P. Pagli, *La verità trasmessa. La logica attraverso le dimostrazioni matematiche*. Sansoni, Firenze, 1993.

[5] C. Bonotto, F. Ferronato, *La logica nella scuola secondaria: una proposta*. La matematica e la sua didattica, n. 2, 2003, pp. 139-169.

[6] C. Bernardi, *Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della "e"*. Progetto Alice, n. 1, Anno 2000-I, pp. 11-21.

[7] M. Ferrari, *Uno strumento per definire e dimostrare: il principio di induzione matematica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 11-B, Dicembre 1988, pp. 1169-1198.

[8] L. Grugnetti, *Argomentare e dimostrare nella scuola media*. Atti XV Convegno nazionale N.R.D. per la Scuola media, Salice Terme, 1996.

[9] M. Impedovo, *Errori tipici in matematica e inopportunità didattiche*. Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, anno XXV, suppl. al n. 10 (1998), pp. 37-54.
[10] C. Marchini, *Argomentazione e dimostrazione. Alcune riflessioni sugli aspetti didattici*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 10, n. 2, 1985, pp. 121-140.
[11] G. Mazzanti, B. Piochi , *Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica*. Didattica delle Scienze, n. 149, Ottobre 1990, pp. 45-50.
[12] V. Villani, *Errori nei testi scolastici: calcolo numerico, logica, informatica*. Archimede, Anno XLVI, 1994, pp 3-18.
[13] V. Villani, *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Aritmetica e Algebra)*, Pitagora, Bologna 2003.