Alcune osservazioni sui concetti di definizione e di dimostrazione nell'insegnamento della matematica¹

Prima parte

Giuliano Mazzanti, Valter Roselli, Luigi Tomasi

Abstract

This paper is the first part of a contribution in which we offer some observations and reflections on the concept of definition, theorem and demonstration and the role of examples and counterexamples that can be useful from a didactic point of view, to teachers of secondary school. This material can also be used by students of the university degree interested in undertaking the teaching of mathematics.

This first part of the paper is about the definition in the teaching of mathematics in secondary school; it will be followed by a second part dedicated to the concepts of theorem and demonstration.

Sommario

In questo articolo proponiamo alcune osservazioni e riflessioni sui concetti di definizione, di teorema e di dimostrazione e sul ruolo di esempi e controesempi che possono risultare utili, da un punto di vista didattico, a docenti di Scuola secondaria di I e di II grado. Tale materiale può essere utilizzato proficuamente anche dagli studenti universitari interessati a intraprendere l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.

Questa prima parte dell'articolo riguarda il concetto di definizione nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria; seguirà una seconda parte sui concetti di teorema e di dimostrazione.

¹ Questo articolo, in una forma più ridotta, è stato inizialmente pubblicato in AA.VV. (a cura di Giuliana Gnani e Valter Roselli), *Idee e proposte per un corso di aggiornamento in didattica della matematica* per docenti di Scuola Secondaria, Università di Ferrara, SSIS, 2008.

Alcune osservazioni sui concetti di definizione e di dimostrazione nell'insegnamento della matematica Prima Parte

Giuliano Mazzanti*, Valter Roselli*, Luigi Tomasi**

* Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Ferrara

** Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Adria (RO)

Introduzione

In questo articolo prendiamo spunto dalle *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per la matematica* relative al riordino della Scuola secondaria di II grado (DPR 15 marzo 2010, n. 89) per presentare alcune considerazioni e osservazioni didattiche riguardo i concetti di definizione, teorema e dimostrazione. Nel documento citato si afferma:

Liceo scientifico – Geometria - I biennio

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

Analogamente, per l'ingresso all'università, in diversi documenti sono indicate quelle che dovrebbero essere le conoscenze e competenze minime di matematica per uno studente che intenda seguire un corso di studi per una qualunque facoltà di carattere scientifico. Tra le indicazioni presenti mettiamo in evidenza le seguenti ricavate dal *Syllabus di Matematica, Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università*, UMI-Unione Matematica Italiana, 1999:

- *Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione.*
- *Implicazione. Condizioni sufficienti, condizioni necessarie.*
- *Conoscere il significato dei termini: assioma, definizione, teore-*

ma, lemma, corollario, ipotesi, tesi. Saper riconoscere ipotesi e tesi in un teorema. Dimostrazioni per assurdo.

- *Quantificatori: $\forall$ (per ogni) ed $\exists$ (esiste). Uso dei quantificatori.*

Cominciamo cercando di chiarire il concetto di definizione e soprattutto le differenze che intercorrono tra questo e quello di teorema. Consideriamo le seguenti proposizioni:

- 1) Un quadrato è un quadrilatero che ha i lati uguali e gli angoli uguali.
- 2) Un quadrato è un quadrilatero che ha le diagonali uguali.
- 3) Per due punti distinti passa una ed una sola retta.

È noto che le tre proposizioni sono vere (in geometria euclidea). La proposizione 1) è una *definizione*, ossia viene attribuito con essa un preciso significato a una parola (“quadrato”) e in questo caso dovremo supporre noti i significati di altri termini, “quadrilatero”, “lati”, “angoli”, “uguaglianza di angoli” e “uguaglianza di lati”; a loro volta questi ultimi termini richiederanno la conoscenza di altri termini, e così via. Ovviamente questo procedimento a ritroso dovrà necessariamente concludersi dopo un numero finito di “passi”; pertanto alcuni termini non potranno essere ulteriormente definiti e saranno questi i cosiddetti “enti primitivi”. Esempi di enti primitivi sono, tra gli altri, quelli di “punto”, “retta”,...

La proposizione 2) è un *teorema*, cioè una proprietà che va “dimostrata”, e per dimostrarla dovremo sfruttare proprietà note, le quali a loro volta richiederanno la conoscenza di altre proprietà e così via. Anche in questo caso tale procedimento a ritroso dovrà avere necessariamente termine dopo un numero finito di “passi”, pertanto alcune proprietà dovranno essere assunte senza dimostrazione e queste sono appunto i cosiddetti “assiomi” (o “postulati”).

La proposizione 3) è un esempio di *postulato*, ossia proprietà che viene assunta come vera senza alcuna dimostrazione.

Note

1. Formalmente, dal punto di vista linguistico, le proposizioni 1) e 2) sono dello stesso tipo, pertanto non è possibile, solo dalla loro formulazione, stabilirne la diversità. Quindi, da un punto di vista didattico è opportuno, nelle definizioni, usare una terminologia del tipo: “*si dice* quadrato un quadrilatero...” mentre sarebbe opportuno “in generale” presentare i teoremi nella forma “se...allora...”.
2. Nelle definizioni è fondamentale che vi sia una sola parola (o una sola espressione) non nota e che essa venga univocamente determinata dalla descrizione successiva. In altri termini si può dire che una definizione è una “abbreviazione”, nel senso che riassume in poche parole –spesso anche una sola - un concetto che richiederebbe, per la sua comprensione, una descrizione molto più estesa.
3. Si tenga presente che la proposizione 1 viene comunemente considerata come la definizione di quadrato, ma ciò non toglie che si possa definire il quadrato in modo diverso, ad esempio (dopo aver introdotto i relativi concetti) come un parallelogrammo con le diagonali uguali e perpendicolari. In quest’ultimo caso la proposizione 1 risulterebbe un teorema.
4. Si tenga inoltre presente che gli “enti primitivi” vengono “descritti” attraverso proprietà mutate dagli assiomi.

In questa prima parte affrontiamo il concetto di definizione e più precisamente intendiamo evidenziare i seguenti punti:

- a) esistono alcuni “termini” matematici il cui significato non è univocamente determinato e dipende, a volte, dal contesto in cui si opera oppure dai testi in cui tali termini vengono riportati;
- b) a volte vengono introdotti nuovi concetti senza prima accertarsi che questi abbiano effettivamente senso;
- c) in alcuni casi, per meglio chiarire il significato dei nuovi termini, è opportuno “discutere” il concetto appena introdotto;
- d) per evitare il formarsi di “stereotipi” non sempre corrispondenti al caso generale, è opportuno fornire varie tipologie di esempi.

I punti a) e b) riguardano i contenuti mentre c) e d) gli aspetti didattici.

1. Iniziamo con la proposta di alcuni esempi relativi ad a), ossia al fatto che, a volte, in Matematica si attribuiscono ad uno stesso termine significati diversi

Esempio 1. Concetto di rette parallele nel piano

Consideriamo le due definizioni seguenti:

Definizione 1. Due rette del piano si dicono parallele se non hanno punti in comune.

Definizione 2. Due rette del piano si dicono parallele se non hanno punti in comune o coincidono.

Notiamo che, in base alla definizione 1, la relazione di parallelismo, nell'insieme delle rette del piano, risulta simmetrica, ma non riflessiva e nemmeno transitiva, mentre in base alla definizione 2, tale relazione è di equivalenza, ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva. Proprio per questo motivo è ormai comunemente accettata questa seconda definizione di parallelismo, in quanto ciò porta alla considerazione dell'insieme quoziente, che permette l'introduzione del concetto di "direzione" (come una delle classi di equivalenza).

Esempio 2. Concetto di numero primo

Confrontiamo le seguenti due definizioni:

Definizione 1. Un numero naturale si dice primo se è divisibile solo per se stesso e per l'unità.

Definizione 2. Un numero naturale si dice primo se è maggiore di 1 ed inoltre è divisibile solo per se stesso e per l'unità.

La differenza tra le due definizioni sta nel fatto che, in base alla prima definizione, il numero 1 risulta primo, mentre non lo è per la seconda. Tenendo conto di alcuni teoremi dell'aritmetica (ad esempio il teorema sulla decomposizione di un numero naturale maggiore di 1, che afferma che ogni tale numero n è primo o è il prodotto di numeri primi, e tale decomposizione è unica a meno dell'ordine)

la definizione di numero primo comunemente accettata è la seconda.

Si tenga presente che la definizione 2 è equivalente alla seguente: “un numero naturale si dice primo se ha soltanto due divisori e questi sono distinti”.

Esempio 3. Equazioni algebriche

In generale la definizione comunemente accettata (almeno a livello elementare) è la seguente: “per equazione algebrica si intende l’uguaglianza tra due espressioni algebriche, di cui almeno una letterale, verificata soltanto per alcuni valori attribuiti alle incognite”.

A parte il significato non troppo chiaro dei termini “uguaglianza”, “espressione algebrica”, “verificata”, “incognita”, desideriamo mettere in evidenza la non coerenza di tale definizione con il concetto di “equazione impossibile” (non sarebbe un’equazione, in quanto non verificata da alcun valore delle incognite) e di “equazione indeterminata” (spesso questo termine viene utilizzato anche per equazioni sempre vere, ossia “identità”).

Per evitare in parte tali incongruenze, si potrebbe utilizzare come definizione di equazione algebrica la seguente: “si dice equazione algebrica ogni uguaglianza tra due espressioni algebriche di cui almeno una letterale”.

Sarebbe opportuno, per maggiore chiarezza, precisare di ogni equazione il suo “dominio”, ossia l’insieme numerico in cui ricercare le soluzioni o nel quale l’equazione abbia significato. Questa considerazione risulta fondamentale nell’utilizzo delle equazioni per la risoluzione di problemi. Si consideri ad esempio il seguente problema, tratto da un testo scolastico per la Scuola Media:

“In un triangolo di perimetro 140 cm, si sa che un lato è doppio di un altro ed è la metà del terzo. Trovare le misure dei tre lati del triangolo”.

Indicando con x la misura del lato mediano, si giunge all’equazione $x + \frac{x}{2} + 2x = 140$, che ha come unica soluzione

$x = 40$. Pertanto le misure dei tre lati del triangolo risulterebbero, in centimetri, 20, 40 e 80. Peccato che non ci siano triangoli i cui lati abbiano queste misure, in quanto un lato risulterebbe maggiore della somma degli altri due.

L'errore non consiste nella impostazione e risoluzione dell'equazione, ma nel fatto che l'equazione deve essere accompagnata da alcune condizioni che traducano l'esistenza geometrica del triangolo. Nel nostro caso si otterrebbero, oltre all'equazione, le condizioni $x > 0$ e $2x < x + \frac{x}{2}$ (disuguaglianza triangolare), che porterebbe, quest'ultima, alla condizione $x < 0$, chiaramente in contrasto con la prima. In questo caso, già in base alle sole condizioni di esistenza del triangolo, si giunge alla conclusione che il problema non ha soluzione, e quindi è inutile impostare l'equazione risolvente.

Esempio 4. Valore assoluto (o modulo) di x

Solitamente nei testi della Scuola secondaria di I grado, ma anche in alcuni della Scuola superiore, viene data la seguente “definizione” di valore assoluto di un numero reale:

“Il valore assoluto o modulo di un numero reale è quel numero senza il segno”.

Tale definizione, apparentemente corretta, porterebbe ad affermare che non è vero che il valore assoluto di -3 sia uguale a $+3$, in quanto è presente il segno (ma cosa si intende per numero senza segno? È ancora un numero?). Questa “pseudodefinitione” crea poi grosse difficoltà quando la si vuole estendere a considerare il valore assoluto non di un numero ma di una “lettera” o più in generale di un'espressione letterale (che comunque assuma valori reali).

Sarebbe opportuno dare la definizione rigorosa di valore assoluto, partendo da esempi relativi a numeri rappresentati sulla retta numerica, visualizzando tale concetto tramite la distanza dall'origine dei punti della retta. Dopo aver dato alcuni di questi esempi risulta naturale dare la “nota” definizione di valore assoluto, ossia:

$|x| = x$ se $x \geq 0$, mentre $|x| = -x$ se $x < 0$.

Con tale definizione, calcolare il valore assoluto di un'espressione letterale o risolvere equazioni con il valore assoluto, dovrebbe comportare minori difficoltà. In particolare questa dovrebbe evitare errori (frequenti) del tipo: $|a| = a$ o $|-a| = a$.

Si tenga inoltre presente che l'interpretazione del valore assoluto (o modulo) di un numero reale come distanza dall'origine giustifica anche il concetto di modulo di un numero complesso, come distanza dall'origine del punto che lo rappresenta nel piano di Gauss.

Esempio 5. Concetto di codominio di una funzione

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione dall'insieme A all'insieme B (entrambi non vuoti).

Definizione 1. L'insieme B si dice *codominio* della funzione f .

Definizione 2. Si dice *codominio* della funzione f l'insieme delle immagini tramite f degli elementi di A .

Ovviamente tali concetti coincidono solo se f è suriettiva. Entrambe le definizioni sono largamente usate; causando a volte ambiguità. È pertanto opportuno controllare attentamente la definizione data nel testo che si sta utilizzando.

A nostro avviso la definizione più corretta di codominio è la prima e per tale motivo sarebbe opportuno distinguere il concetto di "immagine" di una funzione da quello di "codominio" di una funzione, che è B , ossia l'"insieme d'arrivo" della funzione.

Esempio 6. I concetti di inverso e di reciproco

I concetti di inverso e di reciproco sono sinonimi per i numeri reali non nulli, mentre per le funzioni reali di variabile reale il significato di tali termini è completamente diverso. Precisamente, data una funzione $f: A \rightarrow B$, la funzione "inversa" esiste solo nel caso in cui f sia biiettiva e viene indicata con $f^{-1}: B \rightarrow A$. La f^{-1} è quella funzione tale che se $f(x) = y$ allora $f^{-1}(y) = x$.

Si noti che in certi testi si parla di funzione inversa di $f: A \rightarrow B$ anche quando la funzione è soltanto iniettiva. In tal caso f^{-1} va considerata da $f(A) \rightarrow A$, cioè nell'insieme delle immagini di A .

Molto spesso si parla di inversa anche se f non è iniettiva, e si conviene di invertirla in un sottoinsieme del dominio in cui è invertibile, ad esempio per l'inversa di $f(x) = x^2$ oppure per le funzioni trigonometriche.

Il simbolo f^{-1} viene anche usato per le funzioni non iniettive per indicare la controimmagine di un sottoinsieme dell'insieme d'arrivo di f .

Se invece $f: A \subseteq R \rightarrow R$ è una funzione reale di variabile reale tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora si definisce funzione “reciproca” della funzione f , e si indica con $\frac{1}{f}$, la funzione da A in R

definita da $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$. Si noti che il primo membro di tale uguaglianza è ciò che deve essere definito, mentre il secondo membro è noto, in quanto lo è $f(x)$.

Questa diversa interpretazione dei due termini va sottolineata da un punto di vista didattico, perché non è raro che gli studenti confondano l'*inversa* di una funzione con la sua *reciproca*.

A volte il concetto di funzione reciproca viene dato anche per funzioni $f: A \subseteq R \rightarrow R$ che si annullano in qualche punto di A . In tal caso il dominio di $\frac{1}{f}$ non è più A , ma un suo sottoinsieme proprio.

Esempio 7. Concetto di trapezio

Consideriamo le due definizioni seguenti:

Definizione 1. Si dice trapezio ogni quadrilatero convesso che ha due lati paralleli.

Definizione 2. Si dice trapezio ogni quadrilatero convesso che ha due lati paralleli (detti *basi*), e gli altri due non paralleli tra loro.

In base alla definizione 1 i parallelogrammi sono dei particolari trapezi, mentre ciò non è vero in base alla definizione 2.

Nei libri di testi per la Scuola Media, in generale, si utilizza la definizione 1, che permette la classificazione per sottoinsiemi dei trapezi, parallelogrammi, rettangoli, rombi e, come intersezione di questi ultimi due insiemi, dei quadrati.

Una prima differenza tra le due definizioni è data dal fatto che in un parallelogramma (che in base alla definizione 1 è un trapezio) le due coppie di lati opposti paralleli possono essere considerate indifferentemente basi del trapezio, mentre in base alla definizione 2 le basi sono univocamente individuate.

Tale differenza tra le due definizioni deve essere tenuta presente quando si introduce il concetto di trapezio isoscele. In base alla definizione 2 è sufficiente dire che un trapezio è isoscele se i due lati non paralleli sono uguali tra loro, mentre per la definizione 1 è necessario precisare che il trapezio considerato non è un parallelogramma e che ha i due lati opposti non paralleli tra loro uguali. Senza quest'ultima precisazione ogni parallelogramma sarebbe un trapezio isoscele e questo non è coerente con alcune proprietà degli usuali trapezi isosceli (ad esempio l'uguaglianza delle diagonali oppure l'uguaglianza degli angoli alla "base", non valida per tutti i parallelogrammi).

In ogni caso, non è sufficiente dire che un trapezio è isoscele se ha due lati congruenti, perché questi potrebbero non essere i due lati opposti non paralleli.

Nota. In alcuni testi scolastici i due lati opposti non paralleli di un trapezio vengono detti "lati obliqui". Ricordiamo però che due rette si dicono oblique se non sono parallele e neppure perpendicolari. Pertanto, in termini rigorosi, nei trapezi rettangoli si dovrebbe precisare che nella coppia di lati opposti non paralleli fra loro uno è perpendicolare e l'altro è obliquo rispetto alle basi.

Per Euclide, “trapezio” voleva dire quadrilatero che non è un parallelogrammo. Il termine “trapezio” ha poi assunto il significato che conosciamo; ad esempio Proclo (V sec. d.C.) scrive:

“Tra tutti i quadrilateri non parallelogrammi, ci sono quelli che hanno due lati paralleli, e gli altri che non hanno lati paralleli. I primi si dicono trapezi, gli altri trapezoidi” [1].

Quindi, quanto affermato da Proclo corrisponde alla definizione 2. A conclusione di questa prima parte teniamo a precisare che si potrebbero fornire molti altri esempi con le stesse caratteristiche di quelli proposti. È comunque importante non tanto stabilire quale definizione sia “migliore” (purché corretta) , ma una volta decisa quale definizione usare, mantenersi coerenti con essa. Nel caso in cui uno stesso termine possa avere significati diversi, è necessario che dal contesto si possa stabilire senza ambiguità quale ne sia il significato.

2. Proseguiamo con alcuni esempi relativi a b), ossia al fatto che, non sempre, viene accertata (dagli allievi) la coerenza della definizione data

In alcuni casi, prima di dare la definizione, è necessario dimostrare un teorema (esempi 1 e 2) o usare assiomi che rendano sensata la definizione stessa (esempio 3).

Esempio 1. Per poter definire l'ortocentro di un triangolo è necessario dimostrare prima che, in ogni triangolo, le altezze (le rette che contengono le altezze) passano per uno stesso punto (analogamente per gli altri punti notevoli di un triangolo). In questo caso la proprietà da dimostrare può essere comprensibilmente accettata, anche a livello di Scuola Media, attraverso verifiche sperimentali (o con l'uso di strumenti informatici di geometria dinamica). È comunque scorretto dare la definizione di ortocentro senza aver prima dimostrato, o anche soltanto verificato oppure enunciato, la proprietà relativa alle altezze di uno stesso triangolo.

Esempio 2. In altri casi è necessaria una dimostrazione matematica vera e propria, come ad esempio per l'esistenza di segmenti incommensurabili (non è possibile “verificare sperimentalmente” che il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili, ossia che non esiste un segmento che sia sottomultiplo comune o, in altri termini, che il loro rapporto è un numero che non è razionale). In questo caso, se si volesse omettere la dimostrazione della proprietà, è comunque necessario, prima di dare la definizione di segmenti incommensurabili, darne almeno l'enunciato.

Esempio 3. In altri casi ancora l'esistenza dell'oggetto da definire viene assicurata da assiomi, come ad esempio l'esistenza di rette parallele, in geometria euclidea, la quale deriva da assiomi (nella geometria ellittica non esistono rette parallele).

Nota 1. Notiamo infine che la dimostrazione di teoremi di esistenza non sempre è costruttiva, nel senso che si dimostra che esiste, sotto opportune ipotesi, l'oggetto con la proprietà assegnata, ma senza descriverlo esplicitamente. Un semplice esempio di tale situazione è quando si dimostra che esistono numeri primi maggiori di un qualunque numero naturale fissato. La dimostrazione si basa sull'esistenza di infiniti numeri primi, ma ovviamente non sempre è possibile dare esplicitamente un numero primo maggiore di un fissato numero naturale (“grande”).

Un altro esempio è quello del “Safety Tutor”, che è stato inserito in molte autostrade per il controllo dei limiti di velocità. In questi sistemi si misura la velocità media dell'auto in un certo tratto di strada e si sanzionano gli utenti che superano la velocità massima consentita. Si usa il teorema del valor medio di Lagrange (senza avvertire l'utenza di questo teorema!), nella seguente forma molto intuitiva: se la velocità media è maggiore della velocità massima consentita, esiste almeno un istante in cui l'utente ha superato questa velocità “limite”. Anche in questo caso si è sicuri dell'esistenza di un tale istante, ma il sistema non è in grado di determinare quale sia questo istante.

Nota 2. Come è noto, un triangolo si dice acutangolo se ha tutti gli angoli acuti, ed è facile verificare l'esistenza di tali triangoli. Per analogia di linguaggio verrebbe naturale dire che un quadrangolo è acutangolo se esso ha tutti gli angoli acuti. Ovviamente non esistono quadrangoli con tale proprietà, poiché la somma degli angoli interni di un quadrangolo deve essere di 360 gradi.

Sempre in analogia alla definizione di triangolo acutangolo verrebbe naturale dire che un triangolo è ottusangolo se esso ha tutti gli angoli ottusi. Anche in questo caso non esistono triangoli con questa proprietà, perché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180 gradi.

Come noto, la definizione corretta di triangolo ottusangolo è quella di un triangolo che ha un (solo) angolo ottuso (è importante in queste definizioni utilizzare in modo corretto i quantificatori, “per ogni” ed “esiste”, cosa che spesso non avviene).

Osserviamo che, come nel linguaggio comune, alcuni termini usati in matematica hanno un significato che dipende dal contesto; ad esempio si parla di “quadrato” in geometria e di “quadrato” di un numero.

3. Passiamo a proporre alcuni esempi relativi a c), ossia all'opportunità, quando sia ragionevole, di “discutere” la definizione data.

Esempio 1. Triangolo isoscele

La definizione usuale è la seguente: “un triangolo si dice isoscele se ha due lati uguali”.

Nel linguaggio comune una affermazione di questo tipo andrebbe intesa, in generale, come un triangolo che ha due soli lati uguali (come, ad esempio, nell'affermazione di una persona che dica “io ho due figli”), mentre in matematica questa affermazione va intesa come “almeno” due lati uguali. Se si volesse precisare che i lati uguali sono esattamente due si potrebbe dire che il triangolo ha due e solo due lati uguali. Questa ambiguità di linguaggio è la causa che, a volte, porta gli allievi a dire che un triangolo equilatero non è

iso-scele². Perciò è importante dare la definizione in questo modo (soprattutto a livello di scuola “media”):

“un triangolo si dice isoscele se ha almeno due lati uguali”.

Anche in matematica, a volte, si usa il linguaggio naturale inteso come sopra; ad esempio se si dice che un quadrilatero è un poligono che ha quattro lati, quel “quattro” va inteso come esattamente quattro, quindi sarebbe sempre meglio precisare se nel contesto si parla di “esattamente” o di “almeno”.

Dopo aver discusso l’espressione “due lati uguali” potrebbe essere utile chiedersi cosa si intenda per “triangolo non isoscele”. Per quanto detto, a volte tra i triangoli non isosceli vengono inclusi anche i triangoli equilateri. Ovviamente un triangolo non è isoscele se e solo se non ha due lati uguali, ossia soltanto se il triangolo è scaleno. La difficoltà nel dare la definizione di triangolo non isoscele consiste, come in generale si verifica, nel passare da una proposizione alla sua negazione.

Esempio 2. Quadrato

L’usuale definizione di quadrato è la seguente:

“Si dice quadrato ogni quadrilatero che ha *tutti* i lati uguali e *tutti* gli angoli uguali”.

Anche su questa definizione è opportuno proporre alcune osservazioni, chiedendoci: quando un quadrilatero non è un quadrato?

² Ricordiamo che per Euclide il triangolo isoscele è quello che ha due soli lati uguali. Con questa definizione l’insieme dei triangoli viene suddiviso nei sottoinsiemi dei triangoli scaleni, isosceli ed equilateri che ne costituiscono una partizione. In questo modo c’è analogia tra la classificazione dei triangoli in base ai lati e quella in base agli angoli (acutangoli, rettangoli, ottusangoli). Inoltre in base a questa definizione di triangolo isoscele, i triangoli non isosceli risultano quelli scaleni e quelli equilateri.

Qui il passaggio dall'affermazione alla sua negazione non è affatto banale, in quanto si tratta di negare la congiunzione di due proposizioni. La risposta corretta è la seguente:

“un quadrilatero *non* è un quadrato se *non* ha *tutti* i lati uguali tra loro *oppure non* ha *tutti* gli angoli uguali tra loro” e il significato di “oppure” è inteso in senso inclusivo (“vel”).

Se nella definizione di quadrato al posto della “e” mettiamo una “o”, e chiamiamo tali oggetti “quadrateri” (termine di fantasia), cosa otteniamo? Abbiamo quindi la seguente definizione: “si dice *quadratero* ogni quadrilatero che ha tutti i lati uguali oppure tutti gli angoli uguali”.

È immediato constatare che i rettangoli che non sono quadrati e i rombi che non sono quadrati sono quadrateri. I quadrati sono quadrateri? Per rispondere a tale domanda bisogna precisare il significato della parola “oppure” che compare nella definizione di quadratero. Se l’ “oppure” è inteso nel senso inclusivo (vel) allora anche i quadrati sono quadrateri, mentre se l’ “oppure” è inteso in senso esclusivo (aut aut) allora i quadrati non sono quadrateri.

In matematica, se non c’è nessuna ulteriore precisazione, la disgiunzione (o, oppure) viene considerata in senso inclusivo, pertanto i quadrateri sono l’unione dell’insieme dei rettangoli e dell’insieme dei rombi (ovviamente quadrati inclusi).

Le precedenti considerazioni permettono di riflettere sui connettivi logici e sui quantificatori in esempi concreti e non solo in modo astratto.

Esempio 3. Rango di una matrice reale $m \times n$

L’usuale definizione è la seguente:

“Si dice che il rango di una matrice reale A $m \times n$ è il numero intero $k \geq 0$, se *esiste* un minore di A di ordine k che ha determinante non nullo e *ogni* minore di A di ordine maggiore di k ha determinante nullo”.

In questa definizione è importante osservare l'uso dei quantificatori "esiste", "per ogni" e della congiunzione "e" e pertanto può risultare difficile per gli studenti (e non solo) darne la negazione.

Dire che il rango di A non è k vuol dire che *tutti* i minori di A di ordine k hanno determinante nullo (in tal caso il rango di A è minore di k), *oppure esiste* in A un minore di ordine maggiore di k che ha determinante diverso da zero (in questo caso il rango di A è maggiore di k).

Anche questa "discussione" permette di riflettere, in esempi concreti, sull'uso di quantificatori e connettivi e sulla difficoltà nel passare da una proposizione alla sua negazione (passaggio questo che diventa fondamentale nelle cosiddette "dimostrazioni indirette", come ad esempio nella "dimostrazione per assurdo" o nel "passaggio alla contronominale").

Osserviamo che, in alcuni casi, in matematica si usa addirittura utilizzare un termine per indicare la negazione di un altro. Ad esempio si usa dire "rette sghembe" invece di "rette non complanari" come negazione di "rette complanari". Ovviamente le discussioni del tipo di quelle proposte si faranno solo in esempi "ragionevoli".

4. Proponiamo, infine, alcuni esempi relativi al punto d), ossia all'opportunità di fornire varie tipologie di esempi riguardanti il concetto o la definizione data, al fine di evitare la formazione di "stereotipi" non sempre corrispondenti al caso generale.

Esempio 1. Poiché nel considerare un triangolo si è portati normalmente a disegnarne uno acutangolo, le cui altezze sono tutte interne al triangolo stesso, risulta poi, a volte, problematico disegnare le altezze di un triangolo ottusangolo, in quanto due di esse sono esterne al triangolo stesso.

Un'altra difficoltà relativa alle altezze consiste nel fatto che di solito vengono disegnate "verticalmente" perché relative a lati "orizzontali", e quindi quando l'altezza è relativa ad un lato "non orizzontale" la sua rappresentazione diventa più problematica, anche

perché ciò contrasta con il senso comune che associa il concetto di altezza ad una “lunghezza sempre verticale”. Nel caso particolare dei triangoli rettangoli è opportuno disegnarli con l’ipotenusa come “base orizzontale” e non come di solito uno dei cateti. Del resto la parola “ipotenusa” deriva dal termine latino, di origine greca, “hypotenusa” che vuol dire “linea tesa sotto”. Più in generale si potrebbero rappresentare dei triangoli rettangoli nei quali né l’ipotenusa né i cateti risultano “orizzontali”.

Esempio 2. I trapezi vengono, in generale, disegnati con le basi orizzontali, addirittura con la base maggiore al di sotto di quella minore, ed anche con gli angoli alla base maggiore entrambi acuti, mentre è opportuno presentare e disegnare trapezi con caratteristiche diverse da quelle citate. Analogo discorso vale per i rettangoli in cui, di solito, il lato maggiore è “orizzontale” e viene detto “base” del rettangolo, come se non fosse lecito chiamare “base” l’altro lato. Nel caso del quadrato spesso esso viene disegnato con i lati “orizzontali” e “verticali” e questo porta a non riconoscere come tale un quadrato che abbia invece le diagonali “orizzontali” e “verticali”. In tal caso si pensa subito ad un rombo, ma non ad un particolare rombo, cioè il quadrato.

Nota 3. Si tenga comunque presente che i concetti di base e di altezza di un triangolo o di un parallelogrammo sono relativi, ossia sarebbe corretto parlare di “una base” (che può essere un qualunque lato) e della “relativa altezza”. Si noti che nel trapezio il concetto di basi e relativa altezza è riferito solamente ai lati paralleli e alla loro “distanza”.

Nota 4. Per concludere questa parte relativa alle definizioni, discutiamo, tramite un esempio, come a volte definizione e teorema possono (erroneamente) confondersi.

Perché si definisce $3^0 = 1$? O più in generale $a^0 = 1$ quando $a \neq 0$? In generale, a livello elementare, si “definisce” 3^n come segue:

$$3^n = 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 \text{ (} n \text{ volte).}$$

Si tratta intanto di precisare che è il fattore 3 che compare n volte, mentre i prodotti sono in realtà $n - 1$ e quindi sarebbe più corretto

dire $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3$ con $n-1$ prodotti. In questo modo rimangono esclusi i casi $n=1$ e $n=0$ e questi vanno definiti a parte.

Il numero 3^1 viene definito uguale a 3 (e questo può anche essere giustificato nel vedere la sequenza di fattori uguali a 3 limitata a un solo fattore, anche se ciò, a rigore, non avrebbe senso), mentre la definizione di 3^0 non rientra come caso particolare della precedente definizione e pertanto deve essere data in modo esplicito. Come è noto si pone: $3^0 = 1$. La giustificazione di ciò deriva dal richiedere che le note proprietà delle potenze continuino a valere anche se uno degli esponenti è zero. Deve allora essere, ad esempio, $1 = 3^2 : 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$.

Si tenga presente che quella data non è una dimostrazione, ma una giustificazione della definizione. Una volta data questa definizione, possiamo intanto affermare che 3^n è definito per ogni numero naturale $n \geq 0$ e che tale definizione permette di dimostrare nella sua generalità la proprietà relativa al quoziente di potenze con la stessa base (anche per esponenti uguali fra di loro o almeno uno di essi uguale a zero).

Si osservi che, in via teorica, sarebbe possibile definire in modo diverso 3^0 , ad esempio $3^0 = 2$, però in tal caso le proprietà delle potenze non avrebbero la generalità che conosciamo.

Ripetiamo che, quanto detto per la base 3, vale anche per una qualunque base $a \neq 0$.

Ci si può chiedere perché non venga definita la potenza 0^0 . Una possibile giustificazione di questo potrebbe risiedere nel fatto che, estendendo la definizione di 0^n (che è uguale a 0 per ogni $n \geq 1$) anche al caso $n=0$, verrebbe naturale porre $0^0 = 0$, mentre se lo si interpreta come estensione di a^0 , con $a \neq 0$, che è sempre uguale ad 1, verrebbe naturale porre $0^0 = 1$. Anche per questo motivo si preferisce non definire 0^0 .

A rigore la definizione di a^n con $a \neq 0$, andrebbe data per induzione, ponendo $a^0 = 1$ e se $n > 0$, $a^n = a^{n-1} \cdot a$. Con questa definizione risulta $a^1 = a$.

Abbiamo sottolineato il fatto che in una definizione (rigorosa) deve essere presente una sola “espressione” nuova, il cui significato verrà descritto in modo univoco utilizzando concetti noti. A volte però, per semplicità, vengono date delle “pseudodefinitioni”, come ad esempio quella di funzione come “legge”, senza ovviamente aver definito cosa si intenda per “legge”, oppure quella di “matrice” come “tabella di numeri”, senza precisare il significato di “tabella di numeri”. Naturalmente queste pseudodefinitioni vengono comunemente accettate perché le definizioni rigorose di tali concetti, almeno a livello di scuola secondaria, sarebbero troppo complesse e non didatticamente proponibili.

È però opportuno precisare che quella che si sta dando non è una definizione rigorosa, indicandone il motivo. Bisogna comunque evitare che questa mancanza di rigore –accettabile in alcuni casi– porti a veri e propri errori, quali ad esempio, quello di definire una retta come “un insieme di punti allineati”.

Nella seconda e terza parte di questo articolo affronteremo i concetti di “teorema e dimostrazione”, proponendo alcune osservazioni e considerazioni su entrambi gli argomenti.

Bibliografia

- [1] S. Baruk, *Dizionario di Matematica Elementare*, edizione italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti. Zanichelli, Bologna, 1998.
- [2] M. Ferrari, *La definizione: libertà e coerenza*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 23 A-B n. 6, Novembre-Dicembre 2000, pp. 601-618.

- [3] M. Impedovo, *Errori tipici in matematica e inopportunità didattiche*. Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, anno XXV, suppl. al n. 10 (1998), pp. 37-54.
- [4] D. Paola, *La definizione: dalla parte degli studenti*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 23 A-B n. 6, Novembre-Dicembre 2000, pp. 561-600.
- [5] MIUR-UMI-SIS, *Matematica 2003, La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Scuola secondaria di secondo grado*. Liceo Vallisneri, Lucca 2004.
- [6] V. Villani, *Errori nei testi scolastici: calcolo numerico, logica, informatica*. Archimede Anno XLVI, 1994, pp. 3-18.
- [7] V. Villani, *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Aritmetica e Algebra)*. Pitagora, Bologna 2003.
- [8] V. Villani, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Geometria)*. Pitagora, Bologna 2006.