

**Laboratorio di didattica della matematica
a.a. 2019-2020**

**Indicazioni nazionali /Linee guida:
i curricula di Matematica**
I quattro nuclei tematici

7 e 11 novembre 2019

Luigi Tomasi

**Curricoli di Matematica e
cambiamenti introdotti**

- In questi ultimi venti anni (dal 2000) sono stati approvati diversi provvedimenti legislativi e normativi al fine di rinnovare la Scuola italiana e introdurre nuovi curricula, in particolare di Matematica
- Prima di parlare delle Indicazioni curriculari/Linee guida approvate nel 2010 e nel 2012, oggi in vigore nella scuola, credo sia opportuno proporre un sintetico panorama relativo al percorso che ha portato a queste Indicazioni nazionali/Linee guida.

Scaletta della lezione e qualche riferimento

Oltre che alle Indicazioni nazionali/Linee guida/Indicazioni nazionali per il curricolo, si fa riferimento ai seguenti materiali:

- UMI, *Matematica 2001*
- UMI, *Matematica 2003*
- UMI, *Matematica 2004*
- Sito INVALSI www.invalsi.it
- Sito dell'UMI-CIIM, Proposta di un percorso didattico per il I biennio-scuola sec.II grado <http://umi.dm.unibo.it/ciim/>

Qualche riferimento sugli attuali curricula di matematica

- 2000-2004 Proposta di curricolo
Matematica 2001, 2003, 2004: proposta di
curricolo dell'UMI-Unione Matematica Italiana
- 2010 - Riordino dei cicli. Indicazioni
nazionali/Linee guida per la Scuola sec. di II
grado
- 2012 – Indicazioni nazionali per il curricolo-
Scuola Primaria e Scuola secondaria di I grado

Il curriculum di matematica proposto dall'UMI - Unione Matematica Italiana, 2000-2004

I vari curricoli che si sono succeduti nell'avvicinarsi dei Ministri sono stati preceduti da un lavoro realizzato da una Commissione istituita dall'UMI (Unione Matematica Italiana) nell'anno 2000. Di essa facevano parte docenti universitari, esperti in didattica, e docenti di scuola.

Il curriculum di matematica proposto dall'UMI - Unione Matematica Italiana Matematica 2001, 2003, 2004

- La Commissione aveva il compito di elaborare un curriculum di matematica per la scuola primaria e secondaria adeguato ai mutati bisogni della società, sulla scia di analoghe iniziative promosse da associazioni di matematici in Europa e nel mondo
- Il Progetto curricolare redatto dall'UMI reca il nome di «**Matematica per il cittadino**» e definisce
- *“un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società”.*

Il curriculum di matematica proposto dall'UMI - Unione Matematica Italiana

A seguito del lavoro della Commissione sono stati pubblicati i tre volumi, disponibili online,

«**La Matematica per il cittadino**»

Matematica 2001

Matematica 2003

Matematica 2004

contenenti, oltre i suddetti curricula, numerose attività da svolgere in classe, volte ad illustrare il significato delle scelte operate all'interno del curriculum.

«La matematica per il cittadino»

<http://umi-ciim.it/>

Un curriculum verticale di
Matematica, dai 6 ai 19 anni
per tutti

Matematica 2001 (elem+medie)

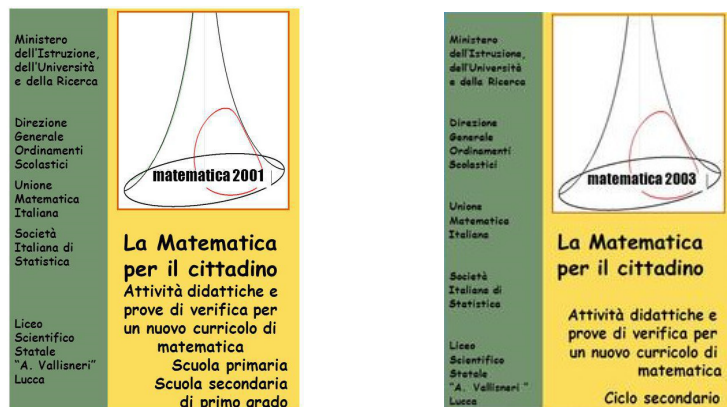
Matematica 2003 (superiori, I-IV)

Matematica 2004 (superiori, V)



La matematica per il cittadino

<http://umi-ciim.it/>



Il curriculum di matematica proposto dall'UMI-Unione Matematica Italiana: un'idea della matematica

In UMI, *Matematica 2003* si afferma:

- la formazione offerta dal curriculum scolastico non può prescindere dal considerare
- ***“sia la funzione strumentale sia quella culturale della matematica:***
- *strumento essenziale per la comprensione della realtà e dall'altro sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale”.*

Il curriculum di matematica proposto dall'UMI

Nuclei tematici

Esso presenta le competenze matematiche che l'allievo deve acquisire in **quattro nuclei tematici** (o di contenuto):

<i>Il numero</i>	<i>(Numeri e algoritmi)</i>
<i>Lo spazio e le figure</i>	<i>(Spazio e figure)</i>
<i>Le relazioni</i>	<i>(Relazioni e funzioni)</i>
<i>I dati e le previsioni</i>	<i>(Dati e previsioni)</i>

Il curriculum di matematica proposto dall'UMI

Nuclei di processo

e tre **nuclei, detti di processo**:

- ***Argomentare e congetturare (e dimostrare)***
- ***Misurare***
- ***Risolvere e porsi problemi.***

I nomi (nuclei tematici) e i verbi (nuclei di processo) tra parentesi si riferiscono ai curricoli della Scuola secondaria di II grado.

Il curriculum di matematica proposto dall'UMI: ha avuto un'influenza fondamentale sui curricoli attuali

- L'iniziativa dell'UMI ha avuto un'influenza fondamentale su tutti i curricoli ministeriali, da quello dei Ministri Berlinguer-De Mauro a quelli dei Ministri dell'Istruzione successivi,...
- Il primo aspetto che balza agli occhi è la suddivisione delle indicazioni per i curricoli di matematica varati da tutti i Ministri citati in quattro nuclei che sono gli stessi dei **nuclei tematici** del Curriculum proposto dall'UMI.

Nuclei tematici nel curriculum di matematica della Scuola secondaria di I grado (2010)

Nella Scuola secondaria di I grado troviamo questi nuclei tematici:

- Numeri
- Spazio e figure
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

Nuclei tematici nel curriculum della Scuola secondaria di II grado (2010)

Nella Scuola Secondaria di II grado troviamo i seguenti nuclei tematici:

- Aritmetica e algebra
- Geometria
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

Per i primi due nuclei sono stati scelti i nomi tradizionali (e non gli «oggetti» di studio).

Forte continuità tra il curriculum di matematica della Scuola secondaria (di I e II grado)

- I curricula dei due cicli si presentano in **forte continuità tra di loro**, oltre che coerenti con i quadri di riferimento delle varie indagini internazionali di valutazione, in particolare con quello dell'indagine OCSE-PISA del 2012 (che aveva il focus sulla Matematica).
- Questi nuclei sono gli stessi previsti dall'INVALSI nella classificazione dei quesiti.

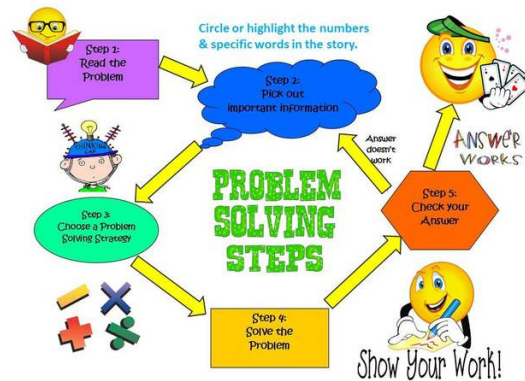
Importanza della Matematica come strumento e come 'sapere teorico'

- In essi è ribadita l'importanza della matematica come "sapere teorico" che ha sempre caratterizzato l'insegnamento della matematica nella scuola italiana,
- ad esempio l'importanza dell'acquisire il senso del numero, del simbolo, del grafico, di saper utilizzare il linguaggio e il ragionamento matematico,
- la centralità della argomentazione, della congettura e della dimostrazione (nella scuola secondaria di II grado), non solo in ambito geometrico, ma estesa anche agli altri aspetti del curriculum (aritmetica, algebra, dati e previsioni, ecc.).

Nei curricoli ci sono aspetti nuovi...
o temi sui quali si insiste in modo
particolare

Vediamo quali sono...

Focus sui problemi ('problem solving')



Il curriculum di matematica e il *problem solving*

Un primo punto che si osserva è il ruolo cruciale attribuito ai “**problemi**”, intra ed extramatematici, per l’apprendimento della matematica.

Nella Premessa ai curricoli del **Primo Ciclo** è scritto:

“Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola”.

Il curriculum di matematica e i problemi

«Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive.»

Il curriculum di matematica proposto e i problemi

- Nelle **indicazioni curriculari per i Licei** il termine "problema" compare più volte:

"Lo studente apprenderà a risolvere un problema con un'equazione....

*Lo studente studierà le funzioni sia... sia in funzione della **descrizione e soluzione di problemi applicativi** ... Lo studente apprenderà a rappresentare e risolvere problemi utilizzando..."*.

E si parla di problemi afferenti a vari ambiti, della matematica ed esterni ad essa.

Insegnamento/apprendimento della Matematica e problemi

Nelle Linee generali Istituti Tecnici/Professionali è scritto:

- *“Lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni.*
- *Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali, ...”.*

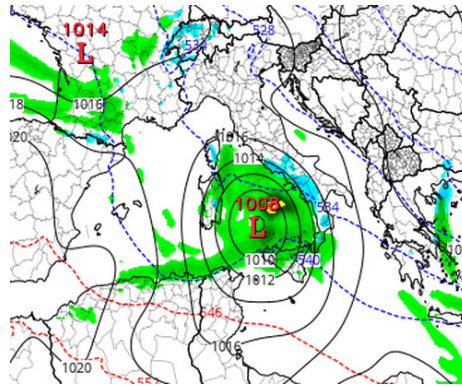
Curricoli di matematica, problemi, mondo reale

Così nelle **Linee Guida per gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali**:

“Nella scelta dei problemi è opportuno fare riferimento sia ad aspetti interni alla matematica sia ad aspetti collegati a svariati ambiti scientifici (economico, sociale, tecnologico) e più in generale al mondo reale”.

Il risalto dato alla risoluzione di problemi più che alla semplice esecuzione di esercizi o applicazione di regole appare fondamentale: attraverso questo modo di procedere si facilita la comprensione dei concetti matematici.

Cosa dicono i curricula sul processo di matematizzazione e sui modelli?



Mondo reale, processo di matematizzazione e modelli

Un altro aspetto che si rileva nei curricula attuali con estrema chiarezza è la sottolineatura

- sul processo di “**matematizzazione**”
- sull'importanza del concetto di “**modello matematico**”, inteso come un discorso su oggetti matematici, che usa il linguaggio e gli strumenti della matematica e che viene messo in relazione con oggetti, eventi e situazioni del **mondo reale**.

Processo di matematizzazione e modelli

- Nel modello matematico si danno enunciati, congetture e dimostrazioni, si formulano e si risolvono problemi matematici
- Infine tali enunciati, problemi e soluzioni, si interpretano nel contesto reale e permettono di fare valutazioni e prendere decisioni
- In termini più semplici, si considera una situazione problematica, la si traduce in termini matematici, si risolve il problema con strumenti matematici, si interpreta, infine, la soluzione trovata nel contesto della situazione considerata.
(→vedi anche il ciclo della matematizzazione OCSE-PISA).

OCSE-PISA 2012 – Literacy («competenza») matematica

- *La “literacy” (in italiano, ‘competenza’) matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti.*
- *Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni.*
- *Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate, che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.*

(p. 6 del QdR PISA 2012)

OCSE-PISA 2012 –CICLO DELLA MATEMATIZZAZIONE

Categorie di contenuto: Quantità, Incertezza, Cambiamento e relazioni, Spazio e forma

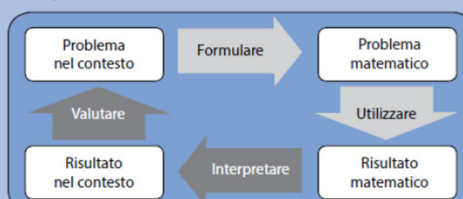
Categorie di contesto: Personale, Sociale, Occupazionale, Scientifico

Pensiero e azione matematica

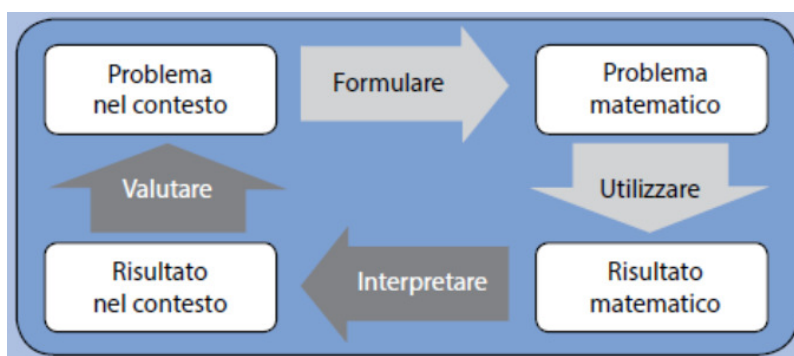
Concetti, conoscenze e abilità matematiche

Capacità matematiche fondamentali: Comunicazione, Rappresentazione, Strategie di soluzione, Matematizzazione, Ragionamento e argomentazione, Uso di linguaggio e operazioni simboliche, formali e tecniche, Uso di strumenti matematici

Processi: Formulare, Impiegare, Interpretare/Valutare



OCSE-PISA 2012 –CICLO DELLA MATEMATIZZAZIONE



Processo di matematizzazione e modelli

Il concetto di **modello matematico** ricorre continuamente nei curricula di Matematica attuali.

Nella premessa ai curricula del **Primo ciclo (2012)** è scritto:

- *“Nella scuola secondaria di I grado si svilupperà un’attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione.*
- *L’alunno analizza situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni...) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema”.*

Processo di matematizzazione e modelli

- L’uso dei modelli matematici si è esteso oggi agli ambiti più disparati, l’economia, l’ingegneria, la biologia, la medicina, le scienze sociali, e molti altri campi.
- Gli strumenti matematici usati possono essere i più diversi, da quelli dell’algebra (equazioni, sistemi, ...), a quelli della geometria euclidea, della geometria delle trasformazioni, allo spazio cartesiano, alla statistica e alla probabilità e molto altro ancora.
- Il processo di modellizzazione, anche nei casi apparentemente più semplici, presenta non poche difficoltà per gli studenti, a cominciare da quella di individuare l’ambito matematico più utile da usare. Occorre quindi un lungo processo di apprendimento per svilupparlo.

Processo di matematizzazione e modelli

Il concetto di **modello matematico** ricorre continuamente nei curricula di Matematica, sia nel Primo ciclo che nella Scuola secondaria di II grado

Processo di matematizzazione e modelli

Nella premessa ai curricula del **Primo ciclo** è scritto:

- *“Nella scuola secondaria di I grado si svilupperà un’attività più propriamente di **matematizzazione**, formalizzazione, generalizzazione.*

Processo di matematizzazione e modelli

Nella premessa ai curricula del **Primo ciclo** è scritto:

*L'alunno analizza situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con **modelli noti**, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni...) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema".*

E nel seguito:

"[L'alunno] "produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi".

Processo di matematizzazione e modelli

Nelle linee generali e competenze per i **Licei** troviamo scritto:

- *"Lo studente avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico:*
-
- *la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna*
- *e a un nuovo **processo di matematizzazione** che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica".*

Processo di matematizzazione e modelli

E tra i concetti e i metodi che lo studente dovrà dominare compare:

*“Il concetto e un’idea chiara della differenza tra la visione della **matematizzazione** caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della **modellistica** (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci)”.*

Si parla successivamente di:

*“Costruzione e analisi di **semplici modelli matematici di classi di fenomeni**”.*

Processo di matematizzazione e modelli

Successivamente, negli **Obiettivi specifici di apprendimento** è scritto:

- *“Lo studente apprenderà a descrivere un problema con un’equazione, disequazione o un sistema di equazioni e disequazioni, a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un **modello matematico di fenomeni**, anche in contesti di...”*
- *“Obiettivo di studio sarà..., anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo verso la **modellizzazione**”*
- *“Lo studente studierà alcuni esempi di **modelli matematici in diversi ambiti**”.*

Processo di matematizzazione e modelli

Nelle Linee guida degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali, tra le abilità si ritrova quella di:

- *“Risolvere problemi, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la **modellizzazione matematica**”.*

Cosa dicono i curricula sul **calcolo aritmetico** e sul **calcolo algebrico**?



I curricula suggeriscono una diversa impostazione didattica sul **calcolo** aritmetico e sul **calcolo** algebrico

- Altro aspetto rilevante nei curricula di Matematica è la diversa impostazione didattica che si suggerisce nell'approccio al "calcolo" (ogni tipo di calcolo..., aritmetico, algebrico, ecc.).
- Nella didattica della matematica tradizionale viene dato molto spazio ad esercizi di calcolo su espressioni numeriche e algebriche.
- Talvolta, però, si tratta di **esercizi ripetitivi**, volti più a un **addestramento** che a una **reale comprensione**.

Un'impostazione didattica diversa sul **calcolo** aritmetico e sul **calcolo** algebrico

- Oggi viene sottolineato che la sicurezza nel calcolo si raggiunge non tanto facendo molti esercizi anche complicati, ma piuttosto con la **consapevolezza** dei procedimenti seguiti.
- Nei curricula di entrambi i cicli c'è una chiara sottolineatura della necessità di acquisire **consapevolezza dei procedimenti** più che dell'ostinato calcolo, a volte complicato e fine a se stesso.

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e il calcolo algebrico

- Spesso lo studente conosce delle regole applicative, ma non sempre ha compreso il significato dei concetti considerati.
- Uno di questi è senz'altro quello di massimo comune divisore e minimo comune multiplo tra più numeri che l'alunno solitamente sa calcolare, ma di cui non sempre ha compreso il significato e li sa applicare a contesti problematici.
- È sintomatico, ad esempio, il modo in cui sono introdotti tali concetti nel curriculum per il Primo Ciclo (2007) che mette in luce proprio il processo con cui si perviene a essi:
- *“Individuare multipli e divisori di un numero.*
- *(Individuare) multipli e divisori comuni a più numeri.*
- *Comprendere il significato e l'utilità del multiplo comune più piccolo e del divisore comune più grande”.*

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e il calcolo algebrico

Significativo è anche **il rinvio dello studio dell'algebra al Secondo ciclo di studi** [scelta anche del curriculum UMI, *Matematica 2001*].

Nelle *Indicazioni per il curriculum* è citata solo la risoluzione delle equazioni di I grado, come strumento per risolvere problemi: *“Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di I grado”*, ma non c'è alcun riferimento al calcolo algebrico.

Tale scelta è senza dubbio dettata dall'intento di non concentrare l'attenzione degli alunni sull'esasperato calcolo algebrico, prassi frequente nelle scuole, di cui gli studenti stenterebbero a comprendere il significato.

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e il calcolo algebrico

L'aggettivo ***semplice/i*** con riferimento ai *calcoli* ricorre frequentemente nei curricula.

Nel **primo ciclo**, tra gli obiettivi di apprendimento compare scritto:

“Eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti essendo consapevoli del significato...”.

E si potrebbero citare molti altri esempi.

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e il calcolo algebrico

Anche nelle *Indicazioni curriculari* dei Licei la raccomandazione di un calcolo **semplice** è ribadita più volte.

Tra i concetti e i metodi che lo studente dovrà dominare è scritto:

*“Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, saranno **evitate** dispersioni in **tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili** che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi.*

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e sul calcolo algebrico

E tra gli Obiettivi specifici di apprendimento nei Licei:

- *“Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le più **semplici** operazioni tra di essi”*
- *“Lo studente apprenderà a fattorizzare **semplici** polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi”.*
- *“L’acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori”.*

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e sul calcolo algebrico

Nel **Liceo scientifico**, inoltre, si precisa:

“L’approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l’obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina”.

Appare chiara inoltre l’indicazione contenuta nelle **Indicazioni nazionali per i Licei**:

“Pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità”.

Una impostazione didattica diversa sul calcolo aritmetico e il calcolo algebrico

La raccomandazione di non indulgere in calcoli complessi è presente anche nelle Linee Guida degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali.

Tra le abilità da conseguire al termine del biennio è scritto:

- “Lo studente apprenderà a eseguire le operazioni con i polinomi e fattorizzare un polinomio **evitando** eccessivi tecnicismi”
- “Calcolare **semplici** espressioni con i radicali”

Una pagina
da un libro
di testo sui
radicali
(classe II
Scuola sec.
di II grado)

204
$$\frac{(\sqrt[3]{ab}+1)(\sqrt[3]{ab}-1)(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{ab}+1)}{ab-1} \quad [1]$$

205
$$\left(\frac{7+2\sqrt{6}-\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} - \frac{\sqrt{6}-1}{1+\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{x-y}{2} \quad [\sqrt{x}-\sqrt{y}]$$

206
$$\left(\sqrt{\frac{x^2-2\sqrt{2}}{x^2-2x}} \cdot \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+2} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) \cdot \sqrt{\frac{x}{2}} \quad [2]$$

207
$$\sqrt{2x+y+2\sqrt{2xy}} \cdot \sqrt{2x+y-2\sqrt{2xy}} - (\sqrt{2x}-\sqrt{y})^2 \quad [2(\sqrt{2xy}-y)]$$

208
$$\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2+2x+1}} - \sqrt{\frac{64x^4}{x^2+2x+1}} + \sqrt{\frac{1}{x^2+2x+1}} \right) \cdot \sqrt[3]{x+1} \quad [(x-1)^2]$$

209
$$\left(\frac{\sqrt{3}x^2-5\sqrt{5}+x^2-5}{\sqrt{3}+3} : \frac{x^2+\sqrt{5}x+5}{x^2-3\sqrt{5}} \right) : \frac{x^2+\sqrt{5}x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \quad [1]$$

210
$$\left(\frac{\sqrt{ab}-a\sqrt{b}}{ab} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{ab}}{2} + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \quad \left[\frac{b+2}{\sqrt{b}} \right]$$

211
$$\left(\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}} + 2\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2b^2+a^2b^2} \right) \cdot \frac{ab}{(ab+1)^2} \quad [\sqrt{a^2+b^2}]$$

212
$$ab \cdot \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} - 2 \right) : \left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} - 1 \right) \quad [-(a+b)\sqrt{ab}]$$

213
$$\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{7\sqrt{xy}}{4x-y} \quad \left[\frac{\sqrt{xy}}{4x-y} \right]$$

214
$$\frac{2}{x} : \left(\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{\sqrt{a^2+1}+1} - \frac{\sqrt{a^2+1}+1}{\sqrt{a^2+1}-1} \right) \quad \left[-\frac{\sqrt{a^2+1}}{2a^2+1} \right]$$

215
$$\frac{\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}-\sqrt{x+y-1}} - \frac{\sqrt{x+y-1}}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{x+y-1}} \quad [x+y]$$

216
$$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{x+2} \quad \left[\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right]$$

217
$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a^4}-\sqrt{64a}} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}-2} \quad [0]$$

218
$$\left(\sqrt{x+y} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} \right) \cdot \left(\sqrt{x+y} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} \right) : \frac{\sqrt{x^2-y^2}-\sqrt{x}}{x} \quad \left[\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y} \right]$$

219
$$\frac{2}{1} \cdot \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{2}{\sqrt{2}+1} \quad \left[1 - \frac{13}{2}\sqrt{2} \right]$$

220
$$\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{8y}{\sqrt{x}} \right) : \frac{x-2\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{y}} - 1 \quad \left[\frac{2\sqrt{xy}}{x} \right]$$

221
$$\left[\frac{(\sqrt{x^2+\sqrt{y}})-(\sqrt{x^2-\sqrt{y}})}{2} : y \right] \cdot \sqrt[3]{2xy^3} \quad \left[\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{x} \right]$$

Argomenti del curriculum di Matematica che assumono un grande rilievo



Argomenti su cui si insiste in modo particolare nei curricoli: **le funzioni**

Nei recenti curricoli sono presenti argomenti oggetto di studio su cui si insiste in modo particolare mentre altri sono stati ridimensionati.

Tra quelli su cui si insiste in modo particolare possiamo citarne alcuni che appaiono rilevanti.

Le Funzioni. Nel Primo ciclo si fa riferimento, oltre alle tradizionali **funzioni**, $y=ax$, $y=ax^2$, $y=a/x$, anche alla funzione **$y=2^n$** , come introduzione al concetto di crescita esponenziale che caratterizza tanti fenomeni e situazioni. Ovviamente qui “ n ” è un numero intero (anche zero o negativo); si tratta, quindi, di una funzione definita su $\mathbb{Z}$ (che può chiamarsi “funzione esponenziale discreta”), mentre l’estensione all’esponente razionale e reale dovrà avvenire nel secondo biennio della Scuola secondaria di II grado).

Dati e previsioni



Argomenti su cui si insiste molto in tutti i curricoli: **Dati e previsioni**

- **Introduzione** in tutti gli ordini di scuola della **Probabilità e Statistica** sotto il nome di **Dati e previsioni**.
- Questo tema faceva parte in passato dei curricoli del 1979 della Scuola Media, di quelli di molti indirizzi degli Istituti Tecnici e Istituti Professionali, e, inoltre, dei corsi sperimentali dei Licei (PNI, Progetti Brocca, ecc.)
- Data l'importanza e il rilievo che la statistica e la probabilità hanno assunto non potevano non essere introdotte in tutti gli ordini e indirizzi di scuola, com'è del resto nei curricoli di tutti gli altri Paesi.

Argomenti su cui si insiste molto in tutti i curricoli:

Dati e previsioni

- Nel vivere quotidiano sta diventando sempre più importante saper valutare le numerose informazioni statistiche che giungono da diverse fonti, comprenderne il significato e riconoscerne l'attendibilità.
- Saper affrontare l'incertezza fornisce al cittadino responsabile e consapevole uno strumento utile per capire i fenomeni (naturali, sociali, economici, politici,...) in modo da svolgere un'attività di osservazione e di controllo.

Argomenti su cui si insiste molto in tutti i curricoli: **Dati e previsioni**

- "Dati e previsioni", ossia Statistica e Probabilità, offrono l'opportunità di avvicinare lo studio della matematica alla realtà quotidiana, creando curiosità nello studente verso informazioni quantitative che egli stesso può raccogliere sul mondo che lo circonda, portandolo ad analizzare dati, misure, tabelle e loro elaborazioni, grafici che aiutano a comprendere fenomeni complessi.
- Valorizzando il contatto col mondo reale, lo studente può essere guidato ad affrontare gli esiti di eventi incerti e la misura della verosimiglianza del loro verificarsi.

Argomenti su cui si insiste molto in tutti i curricoli:

Dati e previsioni

- È indispensabile saper cogliere i vantaggi che l'insegnamento-apprendimento di questi argomenti ha per le altre parti della matematica.
- Uno sviluppo adeguato di statistica e probabilità è utile per passare in modo semplice dal linguaggio naturale a quello simbolico e per rafforzare le conoscenze legate agli altri ambiti quali "Aritmetica e algebra", "Geometria" e "Relazioni e funzioni".

Argomenti su cui si insiste molto in tutti i curricoli:

Dati e previsioni

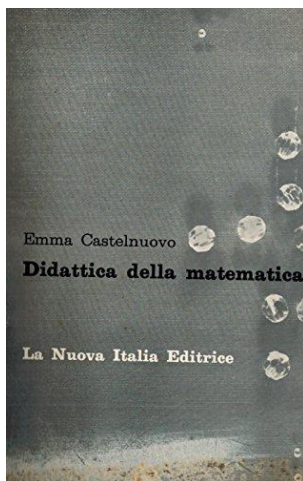
- La statistica offre la possibilità di far entrare contesti reali in classe, di affrontare gli argomenti con strategie di *problem solving*, anche avvalendosi dell'uso di fogli di calcolo di grande diffusione.
- Il momento della comunicazione, competenza di cui la società moderna fa largo uso, dà modo di esporre conclusioni basate su numeri, che sono il risultato dell'elaborazione di dati.

Il laboratorio di matematica



*...c'era chi parlava di
“laboratorio di matematica”
più di cinquant'anni fa
e lo faceva*

Emma Castelnuovo (1913-2014)



Indicazioni metodologiche: il **laboratorio di matematica**

Nei curricula di Matematica sono presenti anche delle indicazioni metodologiche:

Una di esse è il concetto di **Laboratorio di matematica**, visto come *“un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici”*.

La formazione matematica degli studenti, infatti, va costruita attraverso un attento lavoro di laboratorio.

Indicazioni metodologiche: il laboratorio di matematica

- È solo un'illusione, peraltro molto diffusa, pensare di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso delle parole.
- Per un'autentica assimilazione delle idee matematiche, è invece fondamentale l'interazione tra le persone che si sviluppa durante lo svolgimento di attività.

Indicazioni metodologiche: il laboratorio di matematica

- Il laboratorio di matematica coinvolge persone (studenti ed insegnanti), strutture (aule, organizzazioni degli spazi e del tempo), strumenti (da quelli più poveri e tradizionali, a quelli più recenti come software di geometria e di manipolazione simbolica, fogli elettronici, collegamenti Internet), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).
- Va inteso, perciò, come il luogo in cui gli allievi argomentano, discutono, manipolano oggetti, sotto la guida del docente.

Indicazioni metodologiche: il laboratorio di matematica

Nelle Indicazioni per il **Primo ciclo** compare un riferimento esplicito:

*“Lo studente impara a sostenere le proprie tesi grazie ad **un’attività laboratoriale**, alla discussione tra pari e alla manipolazione di modelli costruiti con i compagni..., rispetta i punti di vista diversi dal proprio, è capace di sostenere le proprie convinzioni, accetta di cambiare opinione”.*

Indicazioni metodologiche: il laboratorio di matematica

Nella Premessa alle Indicazioni nazionali per il **Primo ciclo (2012)** compare un riferimento esplicito:

*«In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale **il laboratorio**, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive.»*

Indicazioni metodologiche: l'uso degli strumenti tecnologici



Indicazioni metodologiche: l'uso degli strumenti tecnologici

Altro aspetto metodologico innovativo presente nei curricoli riguarda il ruolo e l'uso degli **strumenti informatici** nell'apprendimento della matematica.

Nella Premessa alle Indicazioni per il **Primo Ciclo** si legge:

“L'uso consapevole e motivato di calcolatrici e del computer deve essere incoraggiato opportunamente fin dai primi anni della scuola primaria, ad esempio per verificare la correttezza di calcoli mentali e scritti e per esplorare i fenomeni del mondo dei numeri e delle figure”

e tra i **Traguardi** da raggiungere è indicato:

“Eseguire addizioni....utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo”.

Indicazioni metodologiche: l'uso degli strumenti tecnologici

Tra i *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* da raggiungere è indicato:

- *"Eseguire addizioni....utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo".*

Per Spazio e Figure, si dice:

- *«Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).»*

Per Dati e Previsioni:

- *«Rappresentare insiemi di dati, anche facendo uso di un foglio elettronico.»*

Indicazioni metodologiche: l'uso degli strumenti tecnologici

Nelle **Indicazioni nazionali** per i Licei è scritto:

"Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico.

L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale",

"Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti)".

Indicazioni metodologiche: l'uso degli strumenti tecnologici

Nelle **Linee Guida** per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali riguardo all'uso degli strumenti tecnologici troviamo:

- *“Analizzare dati e interpretarli ...usando consapevolmente gli **strumenti di calcolo** e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico”*
- *“Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, a macchina)”.*

Curricoli di Matematica e Prove Invalsi



Indicazioni nazionali/Linee guida e Prove Invalsi/Libri di testo/Le scelte degli insegnanti

- Le prove Invalsi sono coerenti con le Indicazioni nazionali /Linee Guida
- I libri di testo, nonostante un certo rinnovamento, appaiono invece talvolta non coerenti con le Indicazioni nazionali/Linee guida
- I libri di testo di matematica sono oggi molto accattivanti e pieni di risorse.
- Purtroppo, a volte non cambia la sostanza: le scelte sono molto tradizionali; ci sono centinaia di pagine di esercizi ripetitivi, anche su argomenti sui quali le Indicazioni/Linee guida sconsigliano di insistere su esercizi inutilmente complicati
- I libri di testo sono comunque scelti dagli insegnanti...

Le domande presenti nelle Prove INVALSI di Matematica: alcune caratteristiche

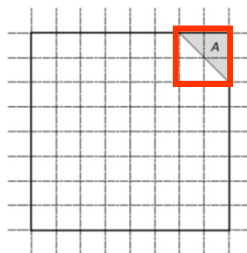
Sono domande di una prova standardizzata, ma...

- Non basta addestrarsi per riuscire a rispondere...
- E non basta aver imparato "le regole" a memoria
- Per rispondere occorre pensare, ragionare e aver effettivamente capito
- Sono coerenti con le *Indicazioni nazionali /Linee guida*
- Non sono domande solo sui contenuti minimi, ma spaziano in tutti gli ambiti di contenuto e su tutti i livelli di difficoltà, in modo equilibrato
- Sono state sottoposte a *pre-test* (e successivamente messe a punto in modo molto accurato), che ne assicura la *validità misuratoria* dal punto di vista statistico e scientifico (oltre che didattico).

**Livello 8 – Classe 3^a Secondaria di I grado- Prova Nazionale
INVALSI di Matematica 2016**
D8 - Dimensione 2 – Risolvere problemi

D8. Osserva la figura.

Difficoltà a operare su
una figura?



L'area del triangolo grigio A misura 8 m^2 . Quanto misura il perimetro del quadrato?

Risultato: m

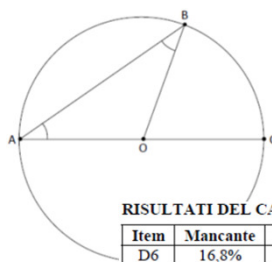
Item	Mancante	Errata	Corretta
D8	25,2%	46,8%	28,1%

**Livello 8 – Classe III Secondaria di I grado Prova Nazionale
INVALSI Matematica 2016**

D6(*) - Dimensione 3 - Argomentare

D6. Osserva la figura. AC è il diametro di una circonferenza di centro O.

Forse gli allievi non usano
il software ...



RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Mancante	Errata	Corretta
D6	16,8%	59,5%	23,7%

Nel triangolo AOB, l'angolo BAO è uguale all'angolo OBA. Immagina di muovere il punto B sulla circonferenza. Gli angoli BAO e OBA sono ancora uguali tra loro?

Scegli la risposta e completa la frase.

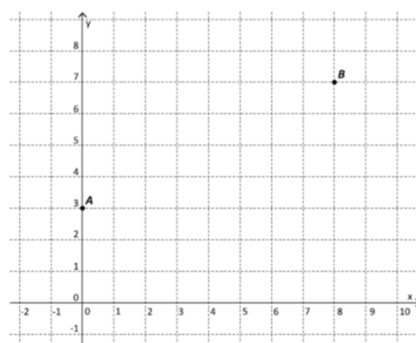
☐ Sì, perché

☐ No, perché

Livello 10 – Classe II Sec. di II grado
Prova INVALSI di Matematica 2016
D17 – Dimensione: **Conoscere**

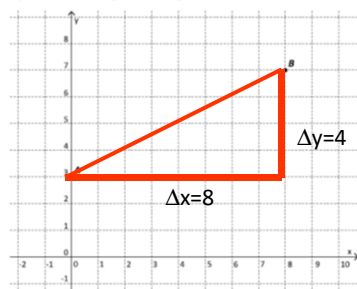
D17

D17. Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti A e B di coordinate intere.



Il coefficiente angolare della retta AB è

D17. Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti A e B di coordinate intere.



Il coefficiente angolare della retta AB è

Esito sorprendente!

RISULTATI DEL CAMPIONE

	Item	Mancante	Errata	Corretta
G	D17	41,5%	40,0%	18,4%
L	D17	31,6%	39,6%	28,8%
T	D17	45,7%	40,8%	13,5%
P	D17	54,5%	39,8%	5,7%

78

Livello 10 – Prova Invalsi - Classe II Sec. di II grado 2016 - D17 – Guida alla lettura

Caratteristiche	Descrizione e commento
AMBITO PREVALENTE Spazio e figure SCOPO DELLA DOMANDA Determinare la pendenza di una retta come rapporto tra incrementi PROCESSO PREVALENTE Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure Linee Guida e Indicazioni nazionali Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. <i>Il metodo delle coordinate cartesiane, la rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità.</i> TRAGUARDO Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale) DIMENSIONE Conoscere	Risposta corretta $\frac{1}{2}$ o risposte equivalenti La domanda testa la conoscenza del concetto di pendenza di una retta o di un segmento e dell'algoritmo con cui può essere calcolata noti due punti della retta (o del segmento). Gli studenti possono rispondere: • applicando la formula $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, in quanto possono facilmente ricavare dal grafico le coordinate dei punti A e B (il testo specifica che i punti hanno coordinate intere e quindi non vi è alcuna possibile ambiguità nella loro determinazione); • osservando che se da A si trasla verso destra di 8 unità, per raggiungere B si deve salire di 4 unità. Quindi la pendenza è $4/8$, cioè $1/2$ oppure $0,5$ o altre rappresentazioni equivalenti.

Livello 10 – Classe II Sec. di II grado Prova INVALSI di Matematica 2016

D23 – Dimensione: Conoscere

D23. Per quale valore di m l'equazione $y = mx$ rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate (3; 12)?

Risposta: $m = \dots\dots\dots$

Vedi la % di risposte mancanti!

RISULTATI DEL CAMPIONE

	Item	Mancante	Errata	Corretta
G	D23	44,4%	20,7%	34,9%
L	D23	31,9%	19,2%	48,8%
T	D23	46,1%	22,2%	31,7%
P	D23	65,9%	21,1%	13,0%

D23 - Prova II Sec. di II grado - 2016

Caratteristiche	Descrizione e commento																									
AMBITO PREVALENTE Relazioni e funzioni SCOPO DELLA DOMANDA Calcolare il coefficiente angolare (pendenza) di una retta passante per l'origine e per un altro punto. PROCESSO PREVALENTE Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure. Linee Guida e Indicazioni nazionali Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa). Rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate. Studiare le funzioni $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$. Le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = x $, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$ sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. TRAGUARDO Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni. DIMENSIONE	Risposta corretta 4 Per rispondere correttamente gli studenti possono: • applicare la condizione di appartenenza di un punto del piano a una retta; • interpretare la coppia ordinata (3; 12) come soluzione dell'equazione lineare in due variabili $y = mx$. I due procedimenti, naturalmente, sono equivalenti. La domanda può presentare delle difficoltà, soprattutto per studenti non abituati ad affrontare equazioni parametriche in cui si chiede di determinare il parametro in modo tale che siano soddisfatte determinate condizioni.																									
	RISULTATI DEL CAMPIONE <table><tr><th></th><th>Item</th><th>Mancante</th><th>Errata</th><th>Corretta</th></tr><tr><td>G</td><td>D23</td><td>44,4%</td><td>20,7%</td><td>34,9%</td></tr><tr><td>L</td><td>D23</td><td>31,9%</td><td>19,2%</td><td>48,8%</td></tr><tr><td>T</td><td>D23</td><td>46,1%</td><td>22,2%</td><td>31,7%</td></tr><tr><td>P</td><td>D23</td><td>65,9%</td><td>21,1%</td><td>13,0%</td></tr></table>		Item	Mancante	Errata	Corretta	G	D23	44,4%	20,7%	34,9%	L	D23	31,9%	19,2%	48,8%	T	D23	46,1%	22,2%	31,7%	P	D23	65,9%	21,1%	13,0%
	Item	Mancante	Errata	Corretta																						
G	D23	44,4%	20,7%	34,9%																						
L	D23	31,9%	19,2%	48,8%																						
T	D23	46,1%	22,2%	31,7%																						
P	D23	65,9%	21,1%	13,0%																						

Livello 10 – Classe II Sec. di II grado Prova INVALSI di Matematica –2016 D22 – Risolvere problemi

INVALSI/2016

D22. La tabella riporta il numero di studenti (in migliaia) iscritti alle scuole superiori dal 2000 al 2005 in Italia (fonte: ISTAT).

Anno	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Numero di studenti	2 565	2 583	2 617	2 634	2 654	2 692

Completa la frase che segue.

Dal 2001 al 2005 il numero di studenti delle scuole superiori è aumentato all'incirca

del% (approssima con una o due cifre dopo la virgola).

Calcolo di una percentuale!

Domandiamoci come fanno,
però, gli allievi a calcolare una
percentuale?

D22- Classe 2- Sec. di II grado- Guida alla lettura

Caratteristiche	Descrizione e commento
AMBITO PREVALENTE Dati e previsioni	Risposta corretta 4,2% o 4,21% o 4,22%
SCOPO DELLA DOMANDA Calcolare un aumento percentuale	Accettabile qualunque numero compreso tra 4,2 e 4,3 con al massimo due cifre dopo la virgola
PROCESSO PREVALENTE Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure	Per rispondere correttamente gli studenti devono calcolare una variazione percentuale.
Linee Guida e Indicazioni nazionali Rapporti e percentuali. <i>Proporzionalità diretta e inversa</i>	Gli studenti possono: • calcolare $(2692/2583) \cdot 100 - 100 \approx 4,2$ oppure $\approx 4,22$ • calcolare $((2692 - 2583)/2583) \cdot 100 \approx 4,2$ oppure $\approx 4,22$
TRAGUARDO Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, eventualmente anche allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.	La flessibilità nelle risposte accettabili dipende dalla volontà di non penalizzare uno studente che ha effettuato correttamente il calcolo della variazione percentuale richiesta e che ha rispettato le indicazioni sul numero di cifre, ma ha deciso eventualmente di approssimare per eccesso o che ha compiuto un'impresione nell'approssimazione.
DIMENSIONE Risolvere problemi	

RISULTATI DEL CAMPIONE				
Item	Mancante	Errata	Corretta	
G D22	31,4%	50,0%	9,6%	
L D22	26,3%	61,0%	12,7%	
T D22	30,9%	59,7%	9,4%	
F D22	41,7%	54,4%	3,9%	

83



Analisi didattica «in verticale» di alcune domande, in vista della Prova INVALSI di Quinta superiore

Ambito
NUMERI

Liv. 8-Classe III Sec. di I grado Prova Nazionale 2012

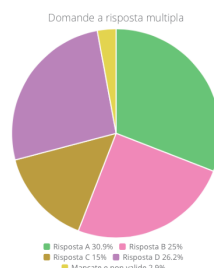
E11. La decima parte di 10^{20} è

- A. ☐ 10^{10}
 B. ☐ 1^{20}
 C. ☐ 100
 D. ☐ 10^{19}

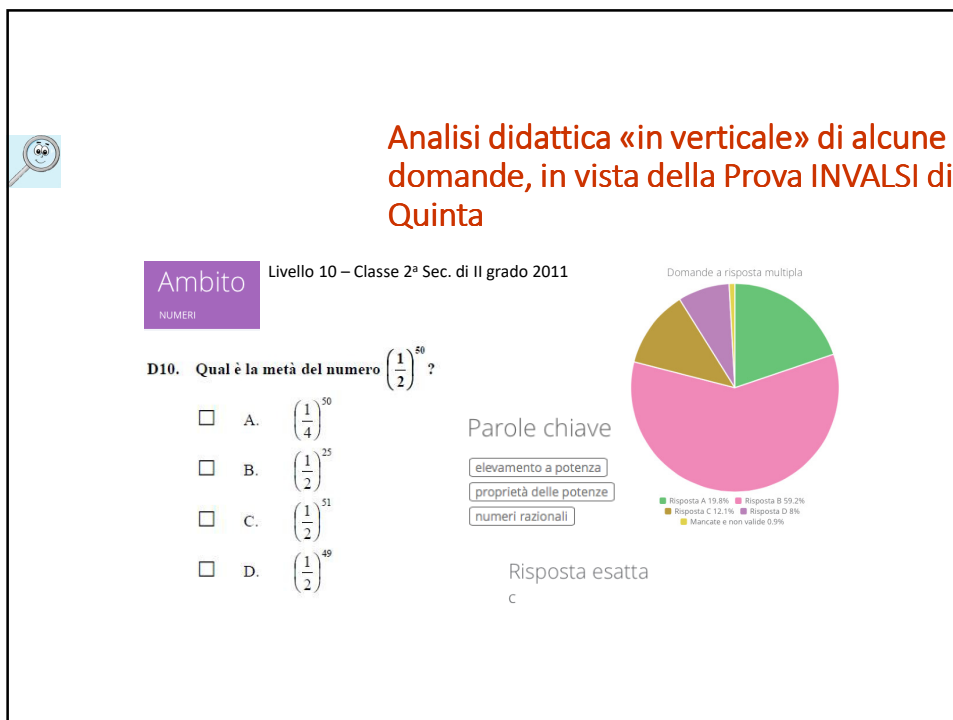
- Qual è lo scopo della domanda?
 ➤ Quali strategie possono essere messe in atto per rispondere alla domanda?
 ➤ Quali errori individuano i distrattori della domanda?

Parole chiave

proprietà delle potenze
 elevamento a potenza
 significato delle frazioni
 scrittura dei numeri
 verbalizzazione dei numeri



Risposta esatta
D



Riferimenti

- UMI, *Matematica 2001*
- UMI, *Matematica 2003*
- UMI, *Matematica 2004*
- Indicazioni nazionali per i Licei/Linee Guida per gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali
- Sito INVALSI
- Sito dell'UMI-CIIM, Percorso didattico per il I biennio-scuola secondaria di II grado <http://umi.dm.unibo.it/ciim/>