

**Laboratorio di didattica della Matematica
a.a. 2019-2020**

**Il *problem solving*:
una metodologia per
l'insegnamento e l'apprendimento
della matematica**

4 novembre 2019

a cura di Luigi Tomasi

1

Il «problem solving»

- Letteralmente: risoluzione di un problema, ma rispetto alla parola italiana “risoluzione”, il termine inglese in “-ing” rafforza il significato di un’azione in corso di svolgimento.
- Questo termine sta a indicare la situazione psicologica nella quale si viene a trovare una persona quando, in conformità a una varietà di dati e di richieste, deve affrontare un problema.
- Il *problem solving* indica più propriamente l'insieme dei processi atti ad analizzare, affrontare e risolvere positivamente situazioni problematiche.

2

Il problem solving in generale

Un problema sorge quando una persona, motivata a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.

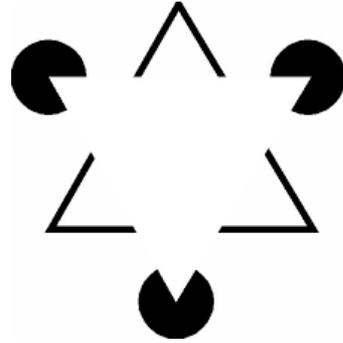
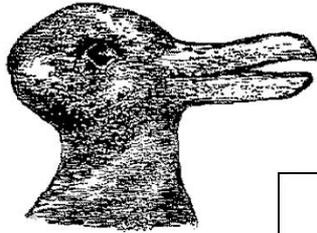
3

La psicologia della «Gestalt»

- Lo studio su come si svolgono i processi di pensiero di fronte a una situazione problematica, è stato profondamente influenzato dalle concezioni teoriche e dalle analisi sperimentali degli psicologi di orientamento gestaltista, in particolare di Wertheimer, Köhler, Koffka, Duncker ...
- **Psicologia della Gestalt** (psicologia della forma o rappresentazione): corrente psicologica sviluppatasi in Germania tra gli anni dieci e trenta del Novecento.

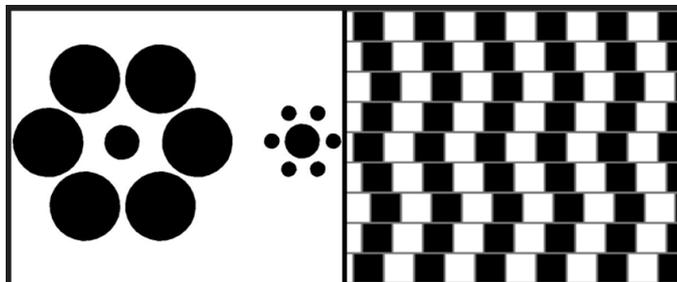
4

Immagini emblematiche della
psicologia di orientamento
gestaltista



5

Immagini emblematiche della
psicologia di orientamento
gestaltista



6

Psicologia gestaltista (alcune semplificazioni)

L'insieme (il tutto) è maggiore della somma delle singole parti.

La mente non è un recettore passivo delle informazioni, ma le organizza in modo da formare un «tutto percepito».

7

- Il termine “problem solving” si incontra di rado negli scritti degli psicologi gestaltisti che preferiscono parlare piuttosto di **pensiero produttivo**.
- Questa preferenza mette in risalto la convinzione che l'attività non si riduca a una mera riproduzione del passato, al riemergere di idee, di immagini, di comportamenti che sono già esistiti,
- ma che, accanto a quell'attività riproduttiva, ci siano anche processi che producono veramente il nuovo, che fanno scaturire l'idea mai sorta prima, almeno nella mente di quel determinato organismo pensante.

8

Il *problem solving*

- Il *problem solving* è solo una parte di quello che è l'intero processo di risoluzione di un problema vero e proprio: l'intera procedura comprende anche i processi cosiddetti di *problem posing*, *problem finding* e *problem shaping*.
- *Problem finding* (= *individuazione del problema*): la fase che comprende l'individuazione e la definizione di una situazione problematica
- *Problem shaping* (o *problem framing* = *inquadramento del problema*): fase dell'attività di risoluzione dei problemi in cui viene delineato e meglio definito un problema, formulato in termini troppo vaghi per poter essere efficacemente affrontato e risolto.

9

Il termine *problem solving* è stato originariamente utilizzato soprattutto in relazione ai problemi logico-matematici.

Da diverso tempo il termine si è esteso, comprendendo lo studio delle abilità e dei processi implicati nell'affrontare i problemi di ogni genere.

10

I riflessi del *problem solving* in campo educativo

Le ricerche sul “problem solving” possono avere molteplici riflessi sul piano dell’attività didattica.

Il *problem solving* potrebbe essere definito come un approccio didattico teso a sviluppare, sul piano psicologico, comportamentale e operativo, l'abilità nella risoluzione di problemi.

11

Il *problem solving*

- L’attività di risoluzione di problemi è di fondamentale importanza nell’insegnamento della matematica a tutti i livelli scolastici.
- Invece essa, talvolta, viene relegata al ruolo di un tradizionale procedimento di verifica, a occasione di valutazione: in ogni compito in classe c’è “il problema”...
- Ma la risoluzione di problemi, è molto di più: il suo corretto impiego la eleva al livello di una tecnica didattica molto efficace.

12

I riflessi del *problem solving* in campo educativo

Attività di risoluzione dei problemi come:

- strumento per favorire l'acquisizione di certi contenuti matematici
- esercizio intellettuale estremamente rilevante e caratterizzante del pensiero umano

Il *problem solving*, pur essendo associato allo sviluppo delle abilità logico-matematiche di risoluzione di problemi, consente di sviluppare abilità anche in altri campi: in un'ottica interdisciplinare, "problem solving" può voler dire uso corretto dell'abilità di classificazione di situazioni problematiche e capacità, quindi, di risolvere problemi-tipo analoghi, siano essi pertinenti all'area logico-matematica o meno.

13

Problem solving e apprendimento

Nella valutazione dei livelli dello sviluppo mentale di un allievo è possibile distinguere tra:

- **Livello di sviluppo effettivo**: con tale termine indicheremo il livello di sviluppo delle funzioni mentali ottenuto da cicli evolutivi già completati.
- **Livello di sviluppo potenziale**: è il livello di sviluppo che potrà essere raggiunto in un futuro più o meno prossimo, evidenziabile dalla proposta di un problema che, pur superando il livello di sviluppo effettivo, può però essere affrontato con un opportuno aiuto esterno (per esempio il suggerimento dell'insegnante).

14

Problem solving e apprendimento

Dunque, oltre al livello di sviluppo **effettivo c'è una zona, ancora non "posseduta" dall'allievo**, il cui controllo non è però del tutto impossibile, del tutto irraggiungibile: un problema concepito nell'ambito di questa zona, può essere affrontato (a volte con successo) grazie ad un... piccola spinta.

La nostra esperienza scolastica ci conferma che è talora sufficiente un'indicazione, un suggerimento per "mettere in moto" alcuni allievi di fronte a problemi che, inizialmente, sembrano provocare un vero e proprio blocco nell'allievo, una situazione di incapacità a impostare la risoluzione.

15

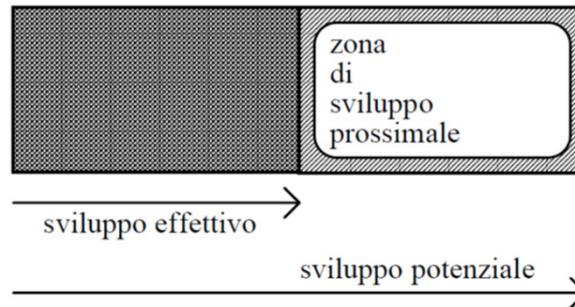
I riflessi del *problem solving* in campo educativo

Varie sono le tecniche e le modalità di *problem solving* che possono essere impiegate.

Il *problem solving* prevede delle fasi che aiutano il soggetto a impostare correttamente il problema e a chiarire alcuni aspetti che lo confondono, impedendogli di trovare delle soluzioni.

16

Zona di sviluppo prossimale (Vigotskij, 1978)



Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

17

Zona di sviluppo prossimale (Vigotskij, 1978)

*Proprio in questo si evidenzia il ruolo del problem solving. Esso ha dunque un campo d'azione ben definito, che viene chiamato **zona di sviluppo prossimale**.*

Secondo L.S. Vigotskij, la zona di sviluppo prossimale:

«è la distanza tra il livello di sviluppo così com'è determinato dal *problem solving* autonomo e il livello di sviluppo potenziale così com'è determinato attraverso il *problem solving* sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci»

(Vigotskij, 1987).

il problem solving genera apprendimento

Grazie a delle attività di *problem solving*, infatti, l'allievo può superare significativamente il livello di sviluppo effettivo per addentrarsi nella zona di sviluppo prossimale: quindi, debitamente consolidato, questo processo porta ad innalzare il livello di sviluppo effettivo.

Lev Semënovič Vygotskij (1896-1934)

Psicologo russo, padre della scuola storico-culturale.

La rivisitazione dell'opera di Vygotskij risale agli anni Ottanta del secolo scorso



19

il problem solving genera apprendimento

L'idea centrale della prospettiva di Vygotskij è che lo sviluppo della psiche è guidato e influenzato dal contesto sociale, quindi dalla cultura del particolare luogo e momento storico in cui l'individuo si trova a vivere e che provoca quindi delle stimolazioni nel bambino, e si sviluppa tramite "strumenti" (come il linguaggio) che l'ambiente mette a disposizione.

Per Vygotskij è l'ambiente culturale a consentire lo sviluppo cognitivo e il salto qualitativamente superiore delle abilità cognitive avviene secondo età stabili, in cui i cambiamenti sono minimi, ed età critiche, in cui l'accumularsi delle esperienze consente il passaggio allo stadio successivo. La relazione fra queste consente lo sviluppo cognitivo nel bambino.



20

Alan Schoenfeld

<https://math.berkeley.edu/people/faculty/alan-schoenfeld>

<http://gse.berkeley.edu/alan-schoenfelds-downloadable-publications>



Schoenfeld's research deals broadly with thinking, teaching, and learning. His book, *Mathematical Problem Solving*, characterizes what it means to think mathematically and describes a research-based undergraduate course in mathematical problem solving.

Alan Schoenfeld is the Elizabeth and Edward Conner Professor of Education and Affiliated Professor of Mathematics at the University of California at Berkeley. He is a Fellow of the American Association for the Advancement of Science and of the American Educational Research Association (AERA), and a Laureate of the education honor society Kappa Delta Pi; he has served as President of AERA and vice President of the National Academy of Education. He holds the International Commission on Mathematics Instruction's Klein Medal, the highest international distinction in mathematics education; AERA's Distinguished Contributions to Research in Education award, AERA's highest honor; and the Mathematical Association of America's Mary P. Dolciani award, given to a pure or applied mathematician for distinguished contributions to the mathematical education of K-16 students.

21

Problem solving e metacognizione

La risoluzione di un problema è spesso frutto di una attività intuitiva e come tale non sempre è razionalmente motivata.

Per questo motivo assume una grande importanza l'attività di riflessione sulle proprie intuizioni e sui metodi utilizzati per la risoluzione del problema.

Tale attività prende il nome di **metacognizione**.

Con **processi metacognitivi** si intendono almeno due attività:

- analisi esplicite sulle proprie conoscenze
- e sul loro uso,
- il che comporta: analisi sui procedimenti seguiti nel risolvere problemi.

22

Problem solving e metacognizione

Alcune strategie metacognitive, secondo M. Pelleray (1990, 1991), si basano sulla considerazione (e sul potenziamento) delle seguenti capacità:

- Capacità di inquadrare preliminarmente quanto necessario per la risoluzione del problema (esigenze di tempo, di materiali etc.).
- Capacità di pianificare l'attività risolutiva.
- Capacità di monitoraggio (riflettere sul proprio comportamento, essere eventualmente in grado di modificarlo).
- Capacità di valutazione del lavoro svolto (sia con riferimento a risultati parziali che con riferimento alla conclusione).

23

Molta acquisizione di nuove cognizioni passa attraverso la consapevolezza raggiunta dal soggetto che apprende, se riflette sul proprio bagaglio culturale.

Se l'insegnante assiste l'allievo in tale attività contribuisce a fargli superare la soglia di sviluppo effettivo e quindi ogni attività metacognitiva appartiene alla zona di sviluppo prossimale.

24

Le riflessioni personali esplicite sono fatte, rispetto alla risoluzione:

- preliminari:** per un'analisi logica della situazione problematica
- in corso d'opera:** mentre lo studente risolve il problema si interroga su quello che sta facendo, sia analizzando i singoli passi (analisi locale) sia analizzando il complesso della propria strategia (analisi globale)
- successive:** analisi personali, analisi assistite dal docente, analisi collettiva di tutte le soluzioni proposte

25

Problema scolastico vs Problema reale

I bambini, e non solo loro, "vedono" spesso il problema scolastico come qualcosa di completamente svincolato dal problema reale. Esiste una netta frattura tra problemi reali e problemi scolastici sia a livello di caratteristiche strutturali che a livello di processi risolutivi.

Gli studenti devono essere in grado di risolvere sia problemi reali sia problemi teorici.

Problema scolastico	Problema reale
È espresso attraverso un testo	Non è espresso attraverso un testo
È formulato da una persona che non ne sarà il solutore	È in generale espresso dal solutore
Sono elencati i dati essenziali	La selezione dei dati è a carico del solutore
Dati → esplicitazione obiettivo alla fine, sotto forma di domanda	Esplicitazione obiettivo da raggiungere → selezione dei dati
Problemi già risolti almeno dall'insegnante	Problemi che non sono già stati risolti
La soluzione esiste (ed è unica) e si determina in pochi minuti (in un tempo stabilito)	Non si sa se c'è una soluzione e non si sa in quanto tempo si riuscirà a trovarla
Non sono accettate interazioni con la realtà	C'è una continua interazione con la realtà
È chiaramente contestualizzato: si dovranno usare conoscenze di matematica e addirittura quelle acquisite più di recente	Non si sa a priori in quale ambito vanno cercate le risorse per risolvere il problema
Dati numerici "belli"	Dati numerici "brutti"

26

Problema vs Esercizio

Si parla di:

- **Esercizio** quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento.
- **Problema** quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore, alcune di esse possono essere in via di esplicitazione, la risoluzione richiede un atto creativo da parte del solutore

	Problema	Esercizio
Nell'insegnamento	- Strumento di acquisizione di conoscenza - Oggetto di insegnamento	- Strumento per consolidare conoscenze e abilità - Strumento per verificare conoscenze e abilità
Privilegia	Processi	Prodotti
L'insegnante	- Sceglie i problemi - Segue i processi	- Sceglie gli esercizi - Corregge e valuta i prodotti
Il soggetto ha un ruolo	Produttivo	Esecutivo
	Esercizi anticipati: si tratta di attività di <i>problem solving</i> matematico scolastico, nella quale un esercizio in genere proposto in una classe viene proposto in una classe inferiore. In tal modo l'esercizio diventa un problema.	

27

Il problem solving nell'insegnamento e apprendimento della matematica

Risolvere problemi di Matematica a scuola

- Risolvere problemi rappresenta un'attività importante per chi studia Matematica, sia che si tratti di un allievo o di un insegnante (o, ovviamente, di un ricercatore).
- È un'attività profondamente formativa, il cui valore va anche al di là della Matematica e del suo insegnamento.

29

Risolvere problemi in matematica

- La risoluzione di problemi è uno dei temi fondamentali nell'insegnamento della matematica a tutti i livelli scolastici.
- Addirittura il matematico Paul R. Halmos ha definito **la matematica** essenzialmente come **un'attività di risoluzione di problemi.**

30

Una citazione da Halmos

Riportiamo questa citazione di Halmos:

“In che cosa consiste veramente la matematica?

Assiomi (come il postulato della parallela)?

Teoremi (come il teorema fondamentale dell'algebra)?

Dimostrazioni (come la dimostrazione di indecidibilità di Gödel)?

Definizioni (come la definizione di dimensione di Menger)?

31

Citazione di Paul R. Halmos

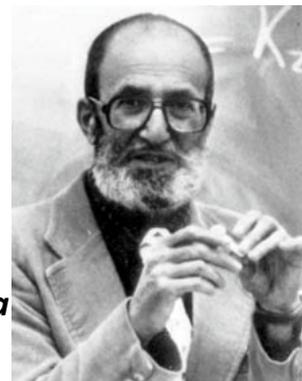
La matematica di sicuro non esisterebbe senza questi “ingredienti”; essi sono essenziali.

Non di meno è ragionevole sostenere che nessuno di loro ne costituisce il cuore,

*perché lo scopo principale di ogni matematico è **risolvere problemi**:*

*per questo, **problemi e soluzioni** sono la **reale essenza della matematica.**”*

(Halmos, 1980)



Paul R. Halmos (1916 - 2006)

32

Una citazione di Paul R. Halmos

What does mathematics *really* consist? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)? Proofs (such as Gödel proof of undecidability)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)...

Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are essentials. It is nevertheless a tenable point that none of them is the heart of the subject, **that mathematician's main reason for existence is to solve problems** and that, therefore, what mathematically really of is **problems and solutions.**

(Halmos, 1980, p. 519, citato in Schoenfeld, 1992, p. 339).

Il *problem solving* rivela un aspetto diverso della matematica



luzione di problemi permette di
nduttivo della matematica:
soluzione dei problemi. si scopre un
ca.
ti: è la
appare
a scien
insiem
ere i pro



34

Risolvere problemi: un aspetto fondamentale della matematica

- Questa idea dei problemi e del problem solving ha aspetti formativi particolarmente importanti.
- Quando un allievo si cimenta con un problema adatto al suo livello scolastico - non troppo facile e non troppo difficile- diventa un soggetto attivo del proprio apprendimento e mobilita tutte le sue conoscenze e abilità per arrivare a una soluzione.
- È molto importante che l'insegnante sappia scegliere i problemi "giusti", adatti al livello della classe, o dei singoli allievi, in modo da incentivare questo atteggiamento degli allievi.

35

I problemi e un altro aspetto della matematica

- Sul *problem solving* Polya ha scritto pagine estremamente interessanti dal punto di vista dell'insegnamento della matematica.
- In particolare nel libro *Come risolvere i problemi di matematica*, propone anche un possibile schema di fasi di lavoro per affrontare un problema.
- *"Per raggruppare opportunamente le domande ed i suggerimenti del nostro schema, distingueremo quattro fasi nello sviluppo del lavoro.*

36

Fasi di risoluzione di un problema (da G. Polya)

- *“Prima: si deve comprendere il problema; è necessario conoscere chiaramente cosa sia richiesto.*
- *Seconda: si devono scoprire i legami che intercedono fra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per rendersi conto del tipo di risoluzione e compilare un piano conveniente.*
- *Terza: si procede allo sviluppo del piano.*
- *Quarta: bisogna esaminare attentamente il risultato ottenuto e procedere alla sua verifica ed alla sua discussione.”*

37

Risolvere problemi (G. Polya)

- Risolvere problemi significa “trovare una strada per uscire da una difficoltà, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile”,
- anzi, “risolvere problemi è un’impresa specifica dell’intelligenza e l’intelligenza è il dono specifico del genere umano”.

G. Polya, *La scoperta matematica*, Feltrinelli, Milano
citato in B. D’Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice, 1999

38

Didattica per problemi

- Quindi ogni insegnante (di matematica) dovrebbe in qualche modo cimentarsi con la risoluzione di problemi e proporre il *problem solving* e il *problem posing* come elementi importanti della sua azione didattica.
- Si può allora parlare di “didattica per problemi”.

39

Insegnamento della matematica per problemi

- Ma sappiamo che non è facile impostare *tutta* l'azione didattica in questo modo.
- Le indicazioni ministeriali, le prove INVALSI, l'esame di stato, i test d'ammissione ai corsi universitari sembrano sollecitare l'insegnante a sviluppare la didattica per problemi,
- ma anche a svolgere approfonditamente una mole consistente «di programma», tale da consentire all'alunno il superamento di queste prove e, in prospettiva, di permettergli di affrontare con disinvoltura gli studi successivi.

40

Esercizi e problemi

- A scuola prevalgono gli esercizi sui problemi.
- Di solito ogni docente, nell'introdurre un nuovo concetto matematico, fa uso di esemplificazioni; e per accertare l'acquisizione del concetto, assegna, in classe o a casa, attività *ad hoc*.
- Normalmente riserviamo il nome di 'esercizi' a queste attività, aventi scopo esemplificativo ed applicativo dei concetti o dei contenuti proposti.
- Quindi l'esercizio serve per consolidare o per verificare l'apprendimento di un concetto o di una regola.

41

Problemi

- *Un problema è qualcosa di più complesso rispetto a un esercizio, coinvolge più regole, magari acquisite in contesti diversi;*
- *per risolvere un problema occorre mettere in campo una "successione di operazioni la cui scelta è un atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso".*

Bruno D'Amore, *Problemi*, Franco Angeli, Milano, 1993, p. 20.

42

Fino a qui il 4/11

Le prove INVALSI di Matematica e la risoluzione di problemi

Alcuni quesiti assegnati nelle prove INVALSI che si riferiscono alla risoluzione di problemi.

I quesiti INVALSI sono di solito suddivisi in base alle seguenti dimensioni:

- Conoscere
- **Risolvere problemi**
- Argomentare

INVALSI

Dimensione 1: Conoscere

Questa prima dimensione si riferisce a

- competenze matematiche strumentali riguardanti la conoscenza e l'uso delle nozioni matematiche,
- delle loro rappresentazioni, delle loro proprietà,
- delle tecniche operative connesse
- delle relazioni tra le nozioni stesse. ⁴⁵

INVALSI - Competenze matematiche

Dimensione 2: Risolvere problemi

Risolvere problemi:

- si riferisce a competenze che riguardano le informazioni necessarie per risolvere un problema;
- costruire o individuare il ragionamento risolutivo appropriato, con attenzione agli strumenti di rappresentazione (registri) utilizzati, e rendere conto di esso;
- controllare tale ragionamento e i risultati che ne conseguono in relazione alla problematica considerata.

Competenze matematiche
Dimensione 3: Argomentare

Argomentare: si riferisce a competenze in cui occorre:

- accertare la validità di una affermazione o di un procedimento o di un ragionamento
- in relazione alle proprie conoscenze e al contesto di riferimento, producendo o individuando ragioni di validità o di non validità,
- ed esporre (o scegliere una esposizione) nelle forme richieste dalla natura dell'oggetto valutato e dal suo contesto di riferimento.

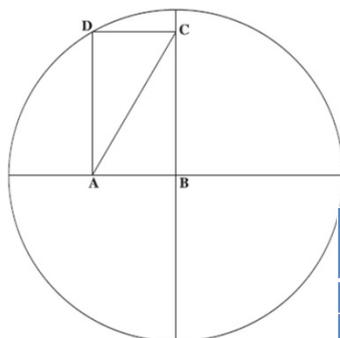
**Quali competenze si possono accertare
 con le prove Invalsi per la Scuola
 secondaria di II grado?**

Per quanto riguarda la seconda dimensione (**Risolvere problemi**), la tipologia di item prevalenti nelle prove INVALSI (dato il tempo limitato) sono

- a risposta multipla (MC),
 assieme ad altri di tipologia aperta
- in cui si chiede di esplicitare il percorso risolutivo e di trovare la soluzione (RG)
- oppure di fornire la soluzione numerica (RC).

Un problema dalla Prova INVALSI – Classe 3^a Scuola secondaria di I grado - 2010

D23. La circonferenza in figura ha il raggio di 4 cm. ABCD è un rettangolo.



Domanda	Corrette	Errate	Mancanti
23a	37,2%	26,5%	36,2%
23b	18,3%	35,8%	45,9%

a. Qual è la lunghezza (in cm) del segmento \overline{AC} ?

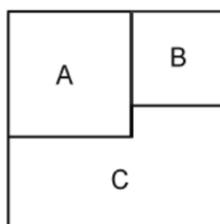
Risposta:

b. Giustifica la tua risposta:

.....
.....

Un problema dalla Prova INVALSI – Classe 2^a Scuola secondaria di II grado - 2016

D9. Un quadrato è formato da due quadrati A e B e da un poligono C, come mostrato in figura.



L'area di A è 16 e quella di B è 9.

Calcola il perimetro del poligono C.

Risposta:

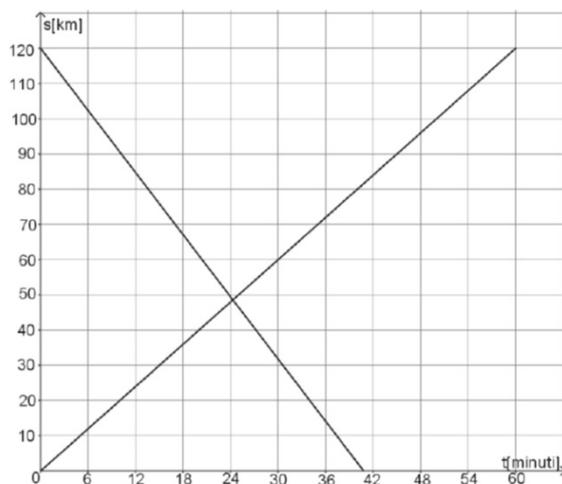
**Un problema dalla Prova INVALSI – Classe 2^a
Scuola secondaria di II grado - 2012**

D25. In un negozio un abito è messo in vendita con uno sconto del 30% sul prezzo originario. Durante la stagione dei saldi il prezzo già scontato viene ancora abbassato del 10%. Qual è la percentuale complessiva di sconto sul prezzo originario dell'abito?

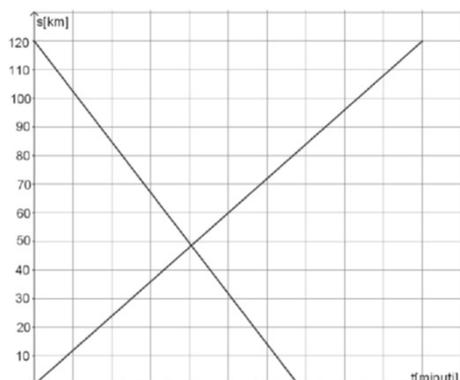
- A. 20%
- B. 33%
- C. 37%
- D. 40%

**Un problema dalla Prova INVALSI – Classe 2^a
Scuola secondaria di II grado - 2017**

D4. In figura sono rappresentati i grafici della posizione s (in km) in funzione del tempo t (in minuti) di due treni in moto rettilineo uniforme su due binari paralleli.



D4. In figura sono rappresentati i grafici della posizione s (in km) in funzione del tempo t (in minuti) di due treni in moto rettilineo uniforme su due binari paralleli.



a. Basandoti sulle informazioni fornite nei grafici, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	V	F
1. I due treni si muovono in versi opposti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Dopo circa 25 minuti dall'istante $t = 0$ i due treni passano per la stessa posizione nel sistema di riferimento scelto	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Dopo 30 minuti dall'istante $t = 0$, uno dei due treni ha percorso circa 30 km	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

53

Bibliografia e sitografia

- A. Baccaglioni-Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini, *Didattica della matematica*, Mondadori, Milano 2018 (vedi il capitolo 7, Il *problem solving*).
- B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna 1999. Vedi il capitolo 9-Esercizi, problemi, situazioni problematiche.
- B. D'Amore, *Problemi*, Franco Angeli, Milano 1993.
- Prove OCSE-PISA 2012 (vedi quadro di riferimento per il *problem solving*)- vedi sito INVALSI.
- Sito INVALSI: www.invalsi.it
- Vedi anche GestINV, sito sui quesiti INVALSI.

54