

Università degli Studi di Ferrara
Corso di Laurea Magistrale in Matematica



Laboratorio di didattica della Matematica

1° incontro - 30 settembre 2019

- Programma del corso

- Alcuni aspetti generali della *Didattica della Matematica*

-Finalità del *Laboratorio di didattica della Matematica*

Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unife.it

Programma del corso



- 1^a parte – Alcuni problemi generali della didattica della matematica
- 2^a parte – Temi specifici dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria
- 3^a parte – Insegnamento della matematica e tecnologie (software di matematica)
- 4^a parte – Programmi di insegnamento della matematica (nella scuola secondaria) e curricoli
- 5^a parte – Esercitazioni - Presentazione di due tesine scritte su temi di matematica per la scuola secondaria (due Unità didattiche o Unità di apprendimento).

Didattica generale e disciplinare



- Questo itinerario nella didattica della matematica richiede innanzitutto **la precisazione** di alcuni concetti generali.
- La conoscenza precisa delle nozioni di base e di un'appropriate terminologia è indispensabile per creare un primo terreno d'intesa, per determinare una base comune sulla quale sviluppare le nostre considerazioni.
- Esistono le didattiche specifiche (disciplinari) ed esiste la didattica generale. Si tratta di due approcci diversi al problema: le azioni, le scelte, le posizioni assunte dall'insegnante, così come l'apprendimento da parte dell'allievo, sono certamente riferite alla disciplina insegnata (ed appresa); pertanto **l'attività didattica e la corrispondente ricerca non possono eludere il riferimento alla materia specifica.**

Una prima concezione della Didattica della Matematica



- Che cos'è, dunque, la didattica della matematica? Come possiamo intendere lo studio e la ricerca in didattica della matematica?
- Iniziamo a presentare una prima concezione della didattica della matematica, secondo la quale lo scopo centrale dell'azione e della ricerca didattica è il miglioramento dell'insegnamento.
- La logica sottintesa a tale interpretazione è evidente: *a un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi.*

La ricerca in didattica della matematica: Didattica A e Didattica B



Sono essenzialmente venute a prodursi due modi diversi di intendere la didattica della matematica, che D'Amore codifica come Didattica A (da "Ars) e Didattica B

1. Didattica A, o "Divulgazione delle Idee" che fissa l'attenzione sulla fase dell'insegnamento
2. Didattica B, o "Epistemologia dell'apprendimento" ricerca empirica, che fissa l'attenzione sulla fase dell'apprendimento

La didattica A è la didattica come si è sviluppata nella sua prima fase, che ha come "focus" l'insegnamento, si collega alla concezione dell'insegnamento come arte, vocazione
Ha l'obiettivo di creare situazioni (sotto forma di lezioni, attività, oggetti, ambienti, giochi...) che rendano migliore l'insegnamento della matematica.

La ricerca in didattica della matematica Didattica A e Didattica B

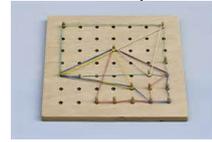
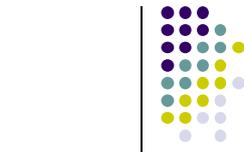


La logica sottintesa a tale interpretazione è:
ad un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi.

Appartengono a questo tipo di ricerca, che ha prodotto molti e utili risultati, ad esempio:

- la *matematica vivente* di Zoltan Dienes, in cui l'allievo "vive" la matematica e l'insegnante crea per lui ambienti favorevoli e strutturati e attività come giochi logici, giochi di movimento ecc. predisposti per acquisire determinati concetti in modo piacevole manipolando oggetti dialogando ecc.

- gli artefatti come il *parallelogramma articolato* di Emma Castelnuovo, o il *geopiano* o altre esperienze che si ispirano a Maria Montessori. I *numeri in colore* di Galeb Gattegno, che sono regoli colorati per la rappresentazione visiva dei numeri naturali.
- Le aule attrezzate denominate *laboratori di matematica* (molto diffuse negli anni Settanta e Ottanta) e che contengono macchine elettriche per fare calcoli, macchine per la costruzione di curve e lo studio di trasformazioni geometriche, macchine logiche per studiare i connettivi ecc.
- il *minicomputer* di Georges Papy (per giochi di trasformazione da base due a base dieci)
- l'*abaco multibase* (adatto a far calcoli da passando da una base numerica all'altra,



per venire ad esempi più recenti,

- le *sfere di Léonart* (per scoprire proprietà della geometria sferica)
- I *software didattici*,
- le *mostre didattiche...*

- Dunque appartengono alla didattica A tutti gli studi le ideazioni di strumenti (concreti o no) che possono migliorare l'insegnamento della matematica
- Lo sforzo del didatta è sensibile all'allievo e lo pone al centro dell'attenzione, ma la sua azione didattica non è solo rivolta all'allievo ma soprattutto sull'argomento in questione
- La didattica A può servire a risolvere problemi di grande importanza, come migliorare l'immagine della matematica, l'immagine di sé nel fare matematica, dunque l'autostima, migliorare l'attenzione, suscitare interesse e motivazione...



La Didattica della Matematica come *divulgazione delle idee*

- La concezione della didattica della matematica come *divulgazione delle idee* ha portato a risultati importanti.
- Molti ricercatori, seguendo questa impostazione, hanno brillantemente indicato agli insegnanti concrete possibilità di migliorare significativamente l'insegnamento attraverso sussidi innovativi, accorgimenti, attività (Emma Castelnuovo, Lucio Lombardo Radice,...), .
- La possibilità di presentare la matematica ai nostri allievi anche mediante riferimenti alla **Storia della Matematica** può essere inquadrata in questo tipo di impostazione della didattica.

Il "decalogo dell'insegnante" secondo George Polya

In questa concezione della didattica della matematica si può forse inquadrare anche il decalogo per gli insegnanti di matematica di George Polya (*La scoperta matematica*, trad. it.).



George Polya (1887 - 1985)

Il “decalogo dell’insegnante”: un documento di qualche anno fa



Il seguente documento, di **George Polya**, è stato scritto diversi anni fa, ma contiene ancora una certa validità.

Oggi però l’insegnamento della matematica è cambiato molto...

La ricerca didattica relativa alla matematica sta attraversando un periodo di grande sviluppo.

Mai come negli ultimi anni ci si è dedicati all’indagine sui processi di apprendimento, mai prima d’ora sono caduti tanti principi considerati sacrosanti, si sono rovesciate convinzioni considerate inamovibili e sono cadute illusioni.

Un decalogo per l’insegnante



1. **Abbi interesse per la tua materia.**
2. **Conosci la tua materia. Conosci i modi secondo i quali si impara**
3. **Cerca di leggere sul viso degli studenti; cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; mettili al loro posto.**
4. **Conosci i modi secondo i quali si impara: il migliore modo per imparare qualsiasi cosa è scoprirla da soli.**

...

G. Polya, La scoperta matematica

Vedi il sito: www.matematica.it/tomasi/

Un decalogo per l'insegnante



5. Dai loro non soltanto informazioni, ma anche “know-how”, attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico (non dare solo definizioni, teoremi, dimostrazioni di teoremi, fornisci anche metodi e strumenti).
6. Fai loro imparare a congetturare.
7. Fai loro imparare a dimostrare.

....

G. Polya, La scoperta matematica

Un decalogo per l'insegnante



8. Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per problemi futuri, cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente.
9. Non rivelare subito il tuo procedimento, cerca di farlo *congetturare* dagli studenti prima di dirlo, fai loro scoprire da soli quanto più è possibile.
10. Suggestisci il tuo procedimento, ma non forzare gli allievi a seguirlo.

G. Polya, La scoperta matematica

Quali competenze e conoscenze per un insegnante di matematica ?



- Competenza nella disciplina.
- Conoscenza degli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- Padronanza delle tecniche didattiche e docimologiche.
- Sensibilità psicologica.
- Capacità comunicativa.
- Marcato interesse per l'insegnamento.
- Capacità di lavorare con gli altri.

Competenza nella disciplina



- Un insegnante di Matematica ha bisogno di una forte competenza disciplinare.
- Questo non significa però acquisire una "cultura" ottenuta per banale accumulazione, bensì per approfondimento (anche e) soprattutto personale.
- L'insegnante dovrà conoscere la Matematica non solo grazie a corsi seguiti e ad esami superati all'Università, ma per ripensamento personale, per ricostruzione critica, per analisi.
- L'insegnante deve padroneggiare le basi della matematica e voler apprendere sempre più matematica....

Che cos'è la Didattica della Matematica



È una disciplina che si è resa indipendente da non molto tempo e che si occupa, da un punto di vista scientifico, dell'insegnamento e apprendimento della Matematica a tutti i livelli scolari.

Si parte dall'assunto che per insegnare matematica non basta conoscere la Matematica, anche se questo è imprescindibile e fondamentale. La conoscenza della matematica è una condizione necessaria, *ma non sufficiente*, per poter insegnare.

Risultati della Didattica della Matematica



- C'è quindi differenza tra la Matematica e la Didattica della Matematica...
- La Didattica della Matematica è quella che in realtà si mette in gioco nell'aula e nella quale si mettono in evidenza le difficoltà, le interpretazioni, le immagini, gli ostacoli che porta con sé un certo concetto che si desidera insegnare e che allo stesso tempo si desidera che gli studenti apprendano.
- Il riconoscimento della natura dei concetti della matematica e la necessità di molti "registri" (numerico, simbolico, grafico,...) per rappresentare ciascuno di essi e poi per impossessarsene.

Altri temi della didattica della matematica



- Il riconoscimento dell'influenza (e della differenza) esistente tra la lingua comune e il linguaggio della matematica.
- Il riconoscimento della conoscenza matematica come fatto culturale
- L'accettazione di nuove teorie che pongono in forte relazione l'insegnamento e l'apprendimento come *l'ingegneria didattica* e la *trasposizione didattica*.

Punti di vista sulla Didattica della Matematica



Diversi punti di vista nel considerare la Didattica della Matematica (B. D'Amore, Università di Bologna):

- *A – come ricerca sulla divulgazione delle idee matematiche, una teoria che si occupa (perlopiù) dell'attività di insegnamento della matematica*
- *B – come ricerca sperimentale, che fissa l'attenzione sull'apprendimento, una teoria che si potrebbe chiamare epistemologia dell'apprendimento della matematica*
- *C – come ricerca che si occupa dell'epistemologia dell'insegnante: la sua formazione, le sue convinzioni, il suo ruolo.*

La Didattica della Matematica tipologia A



Questa classificazione (ogni classificazione rischia di diventare schematica) si trova in B. D'Amore (Università di Bologna).

Didattica della Matematica A come “Ars docendi”:

- “Artigianato” - *il docente sceglie e prepara le lezioni, i modi, gli esempi...*
- “Arte” - *scelte comunicative, recite a soggetto, modalità di catturare l'attenzione, per motivare...*

La Didattica della Matematica tipologia A



Assunto implicito o esplicito:

- *se migliora l'insegnamento, migliora anche l'apprendimento*

Quindi lo sforzo del didatta è tutto teso a *trasformare un discorso specialistico in uno comprensibile e più consono alle capacità dell'allievo.*

Il didatta A pone *l'allievo al centro della sua attenzione*, ma la sua **azione didattica** non è sull'allievo, ma **sull'argomento** in gioco.

La Didattica della Matematica tipologia A



Questo tipo di concezione della didattica della matematica può contribuire a risolvere problemi di grande importanza, quali:

- *migliorare l'immagine della Matematica*
- *migliorare l'immagine di sé nel fare Matematica*
- *migliorare l'attenzione*
- *attivare interesse e motivazione*

La Didattica della Matematica tipologia A



Strumenti efficaci per ottenere questo possono essere:

- *la Storia della Matematica in aula*
 - *come strumento didattico*
 - *per far recepire che la Matematica non è statica, ma ha subito e subisce un'evoluzione, e viene costruita anche in funzione dei problemi dell'uomo*
 - *per dare l'idea che la Matematica è cultura...*

La Didattica della Matematica tipologia A



- *Il Laboratorio di Matematica*
 - *come strumento didattico, che favorisce la costruzione dei concetti, mediante la costruzione e l'uso di oggetti*
 - *per mostrare "quanta matematica" sia racchiusa nel mondo reale*
 - *per migliorare l'immagine della Matematica rendendola più vicina alla vita quotidiana degli uomini*

La Didattica della Matematica tipologia A



Ma per alcuni didatti:

- *'L'insegnamento come **semplice processo di istruzione**, appesantito da ipotesi sulla capacità dello studente di assorbire quel che gli si dice "bene", non è una concezione: è un'illusione'.*

Limiti della Didattica della Matematica tipologia A



- rischio di fraintendimento (la conoscenza dello strumento scambiato con la matematica)
- esagerazione acritica nell'utilizzo degli strumenti e degli artefatti didattici
- eccessiva fiducia negli strumenti didattici
- mancanza di una verifica effettiva dell'apprendimento.

In particolare l'apprendimento in situazioni artificiali, costruite ad arte anche se stimolanti, non dà garanzia di una conoscenza generalizzata cioè in grado di essere applicata anche in situazioni diverse.

Ossia non avviene il *transfert cognitivo*, da una conoscenza artificiale appresa in un ambiente opportuno e specifico, alla capacità di produrre abilità cognitiva e procedurale in altre situazioni.

Didattica della matematica come Epistemologia dell'apprendimento Epistemologia nel senso di *Teoria della conoscenza*



- È concentrata sul fenomeno dell'apprendimento, ma dal punto di vista dei fondamenti e dunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento.
- Nella didattica B **l'insegnamento e l'apprendimento** della matematica non sono il prodotto di un'attività "artistica" del docente, ma **sono il prodotto di un'attività razionale.**
- L'insegnante e l'allievo possono (devono) riflettere continuamente sul proprio operato, per rendersi conto delle eventuali difficoltà, per capirne le radici e dunque per migliorare la situazione.
- Nella didattica B è necessario intervenire sulla struttura e sugli scopi della ricerca didattica, inserendo una *verifica empirica* che possa rendere evidenti gli effetti delle scelte dell'insegnante.

Alcuni temi dibattuti nella Didattica della matematica (di tipo B) oggi



- La visualizzazione
- I concetti figurati (Fischbein)
- L'argomentazione
- La dimostrazione nelle attività di matematica in classe
- La verifica dell'apprendimento
- Temi specifici riguardanti la didattica della geometria, la didattica dell'algebra, la didattica dell'analisi, la didattica del calcolo delle probabilità,...

La Didattica della Matematica tipologia B



La Didattica della Matematica di tipo B,
secondo B. D'Amore (Università di Bologna) accentra
l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento:

- la Didattica della Matematica come **epistemologia dell'apprendimento** (epistemologia: si studia come si costituiscono le conoscenze matematiche)
- la Didattica della Matematica come **scienza sperimentale**:
 - formula ipotesi
 - le convalida o le confuta con esperimenti

Il contributo alla Didattica della Matematica della “Scuola francese”



Un notevole contributo al consolidarsi della Didattica della Matematica secondo questa impostazione è stato dato dalla Scuola francese (in particolare negli anni Ottanta e Novanta) che ha creato un vero e proprio “vocabolario”, che poi è diventato comune, al quale chi si occupa di questa “disciplina” ha gradualmente aderito:

- la Didattica della Matematica ha relazioni profonde con il campo della psicologia.

La Didattica della Matematica tipologia B



- Una teoria dell'apprendimento matematico si basa sugli studi cognitivi
- L'assunto di base è che l'allievo costruisce in modo attivo una sua propria conoscenza interagendo con l'ambiente ed organizzando le sue costruzioni mentali.
- L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento.
- L'allievo non si limita a recepire passivamente la conoscenza, ma la rielabora costantemente in modo autonomo.

Il costruttivismo nelle teorie dell'apprendimento

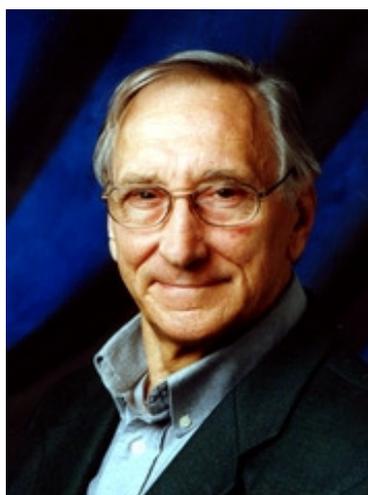


Questa linea, che si potrebbe ascrivere al “costruttivismo”, è quella più seguita attualmente da chi si occupa di teorie dell'apprendimento in matematica.

Il punto di vista “costruttivista” richiede l'assunzione di questi due “assiomi”:

- La conoscenza non è recepita passivamente, ma costruita attivamente dal soggetto che apprende.
- Conoscere è un processo di adattamento grazie al quale il soggetto che apprende organizza il proprio dominio di esperienze.

La Didattica della Matematica secondo Guy Brousseau



La Didattica della Matematica secondo Guy Brousseau



Guy Brousseau (1989) definisce la didattica della matematica come

“una scienza che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche ed in che cosa questa produzione ha di specifico”.

Questa scienza ha come oggetto specifico di studio

- Le operazioni essenziali della diffusione delle conoscenze, le condizioni di questa diffusione e le trasformazioni che essa produce, sia sulle conoscenze sia sui suoi utilizzatori;
- Le istituzioni e le attività che hanno come scopo quello di facilitare queste operazioni.

La Didattica della Matematica il punto di vista sistemico



Brousseau considera il fenomeno insegnamento-apprendimento da un punto di vista **sistemico** e non come lo studio separato di ciascuno dei suoi componenti.

Ha allora senso descrivere un sistema didattico, formato da tre componenti:

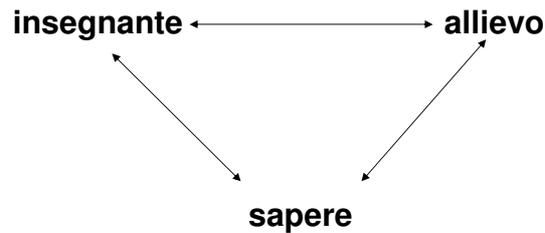
- insegnanti
- allievi
- sapere insegnato.

Ma naturalmente c'è un mondo esterno, la società in genere, i genitori, i matematici, ecc.

Il “triangolo della didattica”



Schema proposto da Yves Chevallard (1982) sulle situazioni di apprendimento.



Per “sapere” si intende quello ufficiale, universitario, quello che Chevallard chiama “savoir savant”; nel caso specifico della matematica è stato chiamato “sapere matematico”; si tratta del sapere della ricerca matematica, quello storicizzato, accademico.

Bibliografia



Vedere il capitolo 3 del seguente testo:

-A. Baccaglioni Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini, *Didattica della matematica*, Mondadori Università, Milano 2018.

Sono stati utilizzati anche i capitoli 1 e 2 del testo seguente:

- B. D’Amore, *Didattica della matematica*, Pitagora editrice, Bologna 2001.

Altri materiali sono stati ricavati da:

- B. D’Amore: *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della matematica*, Pitagora editrice, Bologna 2003

Un testo che, a suo tempo, è stato fondamentale è il seguente:

- E. Castelnuovo, *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze 1963 (è stato ristampato recentemente).



Possibile domanda ed esercitazione
sugli argomenti del 1° incontro:

Attualmente, si privilegia un approccio *costruttivista* alla conoscenza. Si chiarisca brevemente il significato di tale espressione e si esponano le possibili conseguenze di questa concezione nella prassi didattica.