

Equazioni alle Derivate Parziali

Andrea Corli

28 settembre 2020

Indice

Introduzione	v
1 Notazioni e risultati noti	1
1.1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$	1
1.2 Derivate	2
1.3 La derivata di una funzione composta	4
1.4 Integrali	5
1.5 Funzioni	8
1.6 Il Teorema della divergenza e alcune sue conseguenze	9
1.7 Spazi L^p e mollificatori	11
2 Una classificazione delle equazioni a derivate parziali	15
2.1 Alcune definizioni sulle equazioni a derivate parziali	15
3 L'equazione del trasporto	21
3.1 Il problema ai valori iniziali nel caso omogeneo	21
3.2 Il problema non omogeneo	24
3.3 Approfondimenti	26
4 L'equazione di Laplace	27
4.1 Introduzione	27
4.2 La soluzione fondamentale	30
4.3 L'equazione di Poisson	35
4.4 Proprietà delle funzioni armoniche	39
4.4.1 Le formule di media	39
4.4.2 Il principio del massimo	43
4.4.3 Regolarità delle funzioni armoniche	47
4.5 Il problema di Dirichlet e la funzione di Green	57
4.5.1 Il problema di Dirichlet	57
4.5.2 Derivazione della funzione di Green	58
4.5.3 Il problema di Dirichlet e la funzione di Green in un semispazio	65

4.5.4	Il problema di Dirichlet e la funzione di Green in una palla	71
4.6	Metodi dell'energia: il principio di Dirichlet	77
4.7	Approfondimenti	81
5	L'equazione del calore	83
5.1	Introduzione	83
5.2	La soluzione fondamentale	85
5.3	Il problema ai valori iniziali	89
5.3.1	Il problema omogeneo	89
5.3.2	Il problema non omogeneo e il principio di Duhamel	93
5.4	Proprietà delle soluzioni dell'equazione del calore	99
5.4.1	Le formule di media	100
5.4.2	Il principio del massimo	103
5.4.3	Regolarità delle soluzioni dell'equazione del calore	115
5.5	Metodi dell'energia	120
5.6	Approfondimenti	122
6	L'equazione delle onde	125
6.1	Introduzione	125
6.2	Il caso $n = 1$ e la formula di d'Alembert	130
6.3	Il problema ai valori iniziali	139
6.3.1	L'equazione di Eulero-Poisson-Darboux	139
6.3.2	Il caso $n = 3, 2$: le formule di Kirchhoff e Poisson	141
6.3.3	Il caso generale	149
6.3.4	Il problema non omogeneo	152
6.4	Metodi dell'energia	155
7	La teoria delle caratteristiche	159
7.1	Introduzione	159
7.2	Le equazioni delle caratteristiche	160
7.3	Esempi	164
7.3.1	Il caso lineare	164
7.3.2	Il caso semilineare	168
7.3.3	Il caso quasilineare	170
7.3.4	Il caso completamente non lineare	174
7.4	Le condizioni al bordo	176
7.5	Esistenza locale di una soluzione	181
7.6	Applicazioni	184
7.6.1	Il caso lineare	184
7.6.2	Il caso quasilineare	187
7.6.3	Il caso completamente non lineare	191

8	La legge di conservazione scalare	195
8.1	Introduzione	195
8.2	Una motivazione alla formazione delle discontinuità	197
8.3	Soluzioni integrali	199
8.4	Esempi	204
8.5	Onde d'urto e onde di rarefazione	210
8.6	Il problema di Riemann	214
9	Sistemi di leggi di conservazione	221
9.1	Introduzione	221
9.2	Soluzioni integrali	226
9.3	Onde progressive e la definizione di iperbolicità	228
9.4	Le onde semplici	235
9.5	Onde di rarefazione	240
9.6	Il luogo di Hugoniot	242
9.7	Onde d'urto e discontinuità di contatto	249
9.8	La soluzione locale del Problema di Riemann	251
9.9	Il Problema di Riemann per il p -sistema	256
10	Matematici	261
	Bibliografia	263

Introduzione

*Paraphrasing Luciano Pavarotti on music, let me say:
“Learning mathematics by only reading about it is like loving by e-mail.”*

(T. Iwaniec)

Queste note sono una presentazione sintetica dei corsi di *Equazioni alle Derivate Parziali Lineari* e *Equazioni alle Derivate Parziali* che ho tenuto negli ultimi anni accademici presso il Corso di Studi in Matematica dell’Università di Ferrara. Esse sono largamente prese dal libro di Evans [10] e il loro scopo non è tanto quello di sostituire quel testo quanto quello di facilitarne la lettura, fornendo qualche dettaglio tecnico in più e aggiungendo alcuni esercizi a quelli già presenti nel libro di Evans. I corsi hanno insistito in particolare, in maniera alle volte esasperante, sulla necessità di imparare la materia attraverso il lavoro creativo proposto attraverso gli esercizi; a questo si riferisce la frase di T. Iwaniec riportata in apertura. Questo spiega la collocazione degli esercizi nel corpo del testo, cioè non appena possono essere affrontati, e non alla fine di un capitolo, come è d’uso nei manuali.

Più precisamente il corso *Equazioni alle Derivate Parziali Lineari* è relativo ai Capitoli 3—6, mentre il corso *Equazioni alle Derivate Parziali* è relativo ai Capitoli 7—9. Il Capitolo 1 è un riassunto esteso di alcune definizioni e argomenti tecnici utili nel corso mentre il breve Capitolo 2 contiene una classificazione delle equazioni alle derivate parziali: entrambi dovrebbero essere noti dai corsi precedenti.

Tutti i capitoli fino al 7 incluso contengono materiale “classico” che può essere trovato, oltre che nel libro di Evans, in molti altri testi; rinviamo il lettore alla bibliografia contenuta in quel testo e in particolare a [13, 24]. I Capitoli 8 e 9, invece, si riferisce ad un argomento un po’ meno comune ma che ben si presta ad essere presentato in un corso di base per la sua semplicità e per i suoi aspetti geometrici. Le lettrici ed i lettori più intraprendenti potranno avere qualche idea in più su questo rigoglioso ed estremamente attivo settore delle equazioni alle derivate parziali sfogliando i libri in bibliografia. In ordine temporale, il libro di Smoller [45] fu il primo che raccolse in maniera sistematica vario materiale prima accessibile solo attraverso articoli speciali-

stici; si tratta ancor oggi di un libro di riferimento per chiarezza e semplicità. Il libro di Bressan [3], di grande bellezza nella sua essenzialità e completezza, fa in particolare il punto su una serie di ricerche svolte in larga parte dalla scuola italiana verso il finire del secolo scorso e che portarono alla soluzione di problemi aperti da anni. Un resoconto più aggiornato, in effetti un lavoro monumentale, è il libro di Dafermos [9], utile anche per alcune note storiche sull'evoluzione della materia. Un'introduzione alla numerica delle equazioni e dei sistemi di leggi di conservazione si trova esposta nei testi di Leveque [30] e Holden-Risebro [22]. Gli amanti dei semafori si potranno chiarire le idee, oltre che su [22], anche sul libro di Haberman [19].

Vari studenti hanno contribuito negli anni al successo del corso e al miglioramento del testo. A questo proposito, ringrazio in particolare Paolo Menegatti, Gabriele Carli-Ballola, Davide Mari e Antonino De Martino. Ringrazio anticipatamente chi mi volesse segnalare errori nel testo, inevitabili in una stesura molto affrettata.

Ringrazio anticipatamente chi mi volesse segnalare errori nel testo, inevitabili in una stesura molto affrettata.

Requisiti. Per il corso servono solamente gli argomenti dei corsi di Analisi Matematica I e II. In particolare è richiesta una buona conoscenza del calcolo differenziale e integrale per funzioni di più variabili reali e della teoria elementare delle equazioni differenziali ordinarie, si veda [17]. Sono necessarie anche alcune nozioni di basi di Algebra Lineare (matrici, autovalori, autovettori), si veda [28].

Ferrara, 28 settembre 2020

Andrea Corli

Capitolo 1

Notazioni e risultati noti

In questo capitolo iniziale raccogliamo alcune notazioni e risultati che saranno usati spesso nel seguito.

1.1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Indichiamo $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. I vettori della basa canonica di $\mathbb{R}^n$ sono denotati $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, dove 1 sta all' i -esimo posto. Indichiamo con $|a|$ la norma di un vettore $a \in \mathbb{R}^n$, con $a \cdot b$ il prodotto scalare tra $a, b \in \mathbb{R}^n$. Vale la seguente disuguaglianza tra la media aritmetica e la media quadratica [2, 20]:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

dove $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$, per $i = 1, \dots, n$. Da questa disuguaglianza segue

$$a_1 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}. \quad (1.1)$$

Con $B(x^0, r)$ ($B^o(x^0, r)$) indichiamo la palla chiusa (risp., aperta) di centro $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$, con $S(x^0, r)$ la sua superficie:

$$\begin{aligned} B(x^0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| \leq r\}, \\ B^o(x^0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < r\}, \\ S(x^0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| = r\}. \end{aligned}$$

Il volume della palla $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ e l'area superficiale di $\partial B(0, 1) = S(0, 1)$ sono, rispettivamente,

$$m_n(B(0, 1)) = \alpha(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad (1.2)$$

$$m_{n-1}(S(0, 1)) = n\alpha(n), \quad (1.3)$$

dove m_k è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^k$. Se il centro x^0 è diverso da 0 e il raggio $r > 0$ è diverso da 1 si ha

$$m_n(B(x^0, r)) = m_n(B(0, 1)) r^n = \alpha(n) r^n, \quad (1.4)$$

$$m_{n-1}(S(x^0, r)) = m_{n-1}(S(0, 1)) r^{n-1} = n\alpha(n) r^{n-1}. \quad (1.5)$$

Se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, scriviamo $V \subset\subset U$ per indicare che V è un aperto limitato di U tale che $V \subset \bar{V} \subset U$.

1.2 Derivate

Se $x \in \mathbb{R}^n$ useremo la notazione

$$r = r(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Si ha allora

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Un *multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in $\mathbb{R}^n$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti α_i sono numeri interi non negativi. L'*ordine* o *altezza* di α è

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

L'estensione a più di due termini del Teorema binomiale di Newton è la seguente.

Teorema 1.2.1 (Multinomiale) *Siano $x_1, \dots, x_n$ numeri reali, k un numero intero positivo. Allora*

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha,$$

$$\text{dove } \binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}.$$

Corollario 1.2.1 *Si ha*

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq (ne)^{|\alpha|} \alpha!. \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Poiché $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, se $z \in \mathbb{R}$, si ha, calcolando quell'espressione per $z = k$, che

$$e^k > \frac{k^k}{k!}, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots$$

Pertanto

$$|\alpha|^{|\alpha|} < |\alpha|! e^{|\alpha|}.$$

Dal Teorema multinomiale 1.2.1 si ha

$$n^k = (1 + \dots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

e dunque

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!.$$

Combinando questa disuguaglianza con quella di sopra si ottiene (1.7). $\square$

Esercizio 1.2.1 Provare che nel caso $n = 2$ il Teorema Multinomiale 1.2.1 si riduce alla formula del binomio di Newton.

Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$, $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e α un multi-indice in $\mathbb{R}^n$. Se u è sufficientemente derivabile si indica

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Se k è un numero intero non negativo, si indica con

$$D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$$

l'insieme di tutte le derivate parziali di ordine k .

Esercizio 1.2.2 (Calcolo combinatorio) Sia u una funzione regolare definita in $\mathbb{R}^n$ a valori scalari. Ricordare le definizioni di disposizioni e combinazioni e dimostrare quanto segue.

- (i) Le derivate parziali di ordine k di u (in questo caso $\partial_{x_1} \partial_{x_2} u$ e $\partial_{x_2} \partial_{x_1} u$ sono considerate distinte) sono n^k .
- (ii) Le derivate parziali *distinte* (in questo caso $\partial_{x_1} \partial_{x_2} u$ e $\partial_{x_2} \partial_{x_1} u$ sono ritenute uguali) di u sono

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Nel caso particolare $k = 1$ l'insieme Du rappresenta le derivate di u di ordine uno; con un leggero abuso di notazioni lo identificheremo allora col gradiente di u :

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}). \quad (1.8)$$

Il gradiente sarà sempre inteso come un *vettore riga*.

Osservazione 1.2.1 Nel seguito considereremo anche funzioni $u = u(x, t)$ dipendenti da una ulteriore variabile scalare t , che rappresenterà una variabile temporale. Con la notazione Du ci riferiremo però sempre al gradiente rispetto alle variabili x .

Analogamente ordineremo le derivate seconde contenute in D^2u e identificheremo questo insieme con la *matrice Hessiana* di u :

$$D^2u = \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \dots & u_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{x_nx_1} & \dots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Sia $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione a valori vettoriali della variabile x . La matrice Jacobiana di F è di nuovo indicata con DF ed è

$$DF = \begin{pmatrix} F_{x_1}^1 & \dots & F_{x_n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ F_{x_1}^n & \dots & F_{x_n}^n \end{pmatrix}.$$

Le sue righe sono i gradienti delle componenti di F . La *divergenza* di F è

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n F_{x_i}^i = \partial_{x_1} F^1 + \dots + \partial_{x_n} F^n.$$

Anche per la divergenza valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nell'Osservazione 1.2.1. Si noti che usiamo gli apici per indicare le componenti di una funzione vettoriale e i pedici per indicare le componenti di punti (o vettori).

Sia ora $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori scalari della variabile x . Il *laplaciano* di u è

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Esercizio 1.2.3 Sia $U \subset \mathbb{R}^n$, $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(U)$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(U)$; dimostrare che

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Du) &= \Delta u, \\ \operatorname{div}(uF) &= DuF + u \operatorname{div} F. \end{aligned}$$

1.3 La derivata di una funzione composta

In questa sezione rivediamo la derivazione di una funzione composta di più variabili e alcune formule del relativo calcolo simbolico. Indichiamo con TA la matrice trasposta della matrice A .

Siano $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni a valori scalari e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione a valori vettoriali. Si ricordi che allora $Du(x)$ è un vettore riga, $F(x)$ è un vettore colonna, D^2u (matrice Hessiana di u) e DF (matrice Jacobiana di F) sono matrici. Qui sotto, per semplicità, omettiamo spesso l'argomento delle funzioni, *anche nel caso di funzioni composte*; tutte le funzioni sono supposte regolari. Le formule per i prodotti sono le seguenti:

$$\begin{aligned} D(uv) &= vDu + uDv, \\ D(uF) &= (FDu) + uDF, \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove si noti che FDu è il prodotto di un vettore colonna per un vettore riga, dunque una matrice.

Formule per le composizioni sono

$$D(u(F(x))) = DuDF, \quad (1.10)$$

$$D^2(u(F(x))) = {}^T(DF)D^2uDF + DuD^2F. \quad (1.11)$$

Qui sopra la matrice DuD^2F è definita come

$$(DuD^2F)_{ij} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial^2 F^h}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Esercizio 1.3.1 Sia $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ed s una variabile reale; calcolare

$$\frac{d}{ds} u(x_0 + sa, t_0 + bs).$$

Esercizio 1.3.2 Provare (1.9) e (1.11). Dedurre che nel caso particolare in cui $F(x) = Ax$, dove $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$, $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare e $v(x) = u(Ax)$, si ha

$$Dv(x) = Du(Ax) A, \quad (1.12)$$

$$D^2v(x) = A^T D^2u(Ax) A. \quad (1.13)$$

1.4 Integrali

Per l'integrazione secondo Lebesgue delle funzioni si rinvia a [12, 17]. Nei testi elementari di calcolo differenziale in più variabili, l'integrazione in $\mathbb{R}^n$ su superfici $n - 1$ -dimensionali è di solito limitata alle dimensioni 2 e 3; per una trattazione generale si rinvia a [12, §8]. L'integrazione su varietà, del resto, trova la sua naturale ambientazione con le misure di Hausdorff; per questo argomento si rinvia a [11].

Il rapporto tra coordinate cartesiane e polari nell'integrazione delle funzioni di più variabili è contenuto nel risultato seguente.

Teorema 1.4.1 (Coordinate polari) *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sommabile in tutto $\mathbb{R}^n$ o in $B(x^0, R)$. Allora, per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$ si ha, rispettivamente,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S(x^0, r)} f \, dS \right) dr, \quad (1.14)$$

$$\int_{B(x^0, R)} f \, dx = \int_0^R \left(\int_{S(x^0, r)} f \, dS \right) dr. \quad (1.15)$$

Questo risultato può essere visto (nell'ambito dell'integrazione secondo le misure di Hausdorff) come un caso particolare della formula di coarea [10, Appendix C, Theorem 5], [11, §3.4.3].

Esercizio 1.4.1 Provare (1.14) nei casi $n = 2$ e $n = 3$ passando in coordinate polari (nel piano e nello spazio). Generalizzare al caso $n > 3$ usando le coordinate polari in $\mathbb{R}^n$, si veda ad esempio [12, §5.9] o [2].

Corollario 1.4.1 *Nelle ipotesi del Teorema 1.4.1, per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B(x^0, r)} f \, dx \right) = \int_{S(x^0, r)} f \, dS. \quad (1.16)$$

Esercizio 1.4.2 Provare (1.16).

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme misurabile con $m_n(E) > 0$, si definisce la *media integrale su E* come

$$\oint_E f(x) \, dx = \frac{1}{m_n(E)} \int_E f(x) \, dx.$$

La definizione si estende anche a sottoinsiemi E di $\mathbb{R}^n$ con $m_{n-1}(E) > 0$; in tal caso l'integrale diventa un integrale superficiale:

$$\oint_E f(x) \, dS = \frac{1}{m_{n-1}(E)} \int_E f(x) \, dS.$$

In particolare useremo questi integrali nei casi

$$\begin{aligned} \oint_{B(x^0, r)} f(x) \, dx &= \frac{1}{m_n(B(x^0, r))} \int_{B(x^0, r)} f(x) \, dx, \\ \oint_{S(x^0, r)} f(x) \, dS(x) &= \frac{1}{m_{n-1}(S(x^0, r))} \int_{S(x^0, r)} f(x) \, dS(x). \end{aligned}$$

Le medie integrali qui sopra hanno una interessante proprietà riguardo ai cambiamenti di variabili.

Lemma 1.4.1 *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e u una funzione sommabile in U ; supponiamo inoltre che $B(x^0, r) \subset U$. Allora*

$$\int_{B(x^0, r)} u(x) dx = \int_{B(0, 1)} u(x^0 + rz) dz, \quad (1.17)$$

$$\int_{S(x^0, r)} u(x) dS(x) = \int_{S(0, 1)} u(x^0 + rz) dS(z). \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda (1.17), si ha, col cambiamento di variabili $x = x^0 + rz$, $dx = r^n dz$,

$$\begin{aligned} \int_{B(x^0, r)} u(x) dx &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x^0, r)} u(x) dx = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(0, 1)} u(x^0 + rz) r^n dz \\ &= \int_{B(0, 1)} u(x^0 + rz) dz. \end{aligned}$$

Passiamo a (1.18); essa è un caso particolare della forma di cambiamento di variabili negli integrali su varietà, si veda [11, §3.4.3]. Una dimostrazione elementare è la seguente.

Nel caso $n = 2$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{S(x^0, r)} u(x) dS(x) &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_1^0 + r \cos \phi, x_2^0 + r \sin \phi) r d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1^0 + r \cos \phi, x_2^0 + r \sin \phi) d\phi = \int_{S(0, 1)} u(x^0 + rz) dS(z). \end{aligned}$$

Nel caso $n = 3$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{S(x^0, r)} u(x) dS(x) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(x_1^0 + r \cos \phi \cos \theta, x_2^0 + r \sin \phi \cos \theta, x_3^0 + r \sin \theta) r^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(x_1^0 + r \cos \phi \cos \theta, x_2^0 + r \sin \phi \cos \theta, x_3^0 + r \sin \theta) \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \int_{S(0, 1)} u(x^0 + rz) dS(z). \end{aligned}$$

Nel caso $n > 3$ si fa riferimento alle coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ [12, §5.9]. $\square$

Il risultato seguente è l'estensione a funzioni di più variabili del ben noto teorema della media integrale per funzioni di una variabile reale.

Teorema 1.4.2 (Media integrale) *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia inoltre $x^0 \in U$ e $r > 0$ tali che $B(x^0, r) \subset U$. Esiste allora un punto $y^0 \in S(x^0, r)$ tale che*

$$\int_{S(x^0, r)} f(x) dS(x) = f(y^0). \quad (1.19)$$

Un risultato collegato a questo ma molto più fine (per funzioni in L^1_{loc}) è il Teorema di derivazione di Lebesgue [10, Theorem 6, §E.4, pag. 732].

Il seguente risultato sarà usato ripetutamente nel seguito.

Lemma 1.4.2 (Convergenza di integrali) *Si ha che*

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < n, \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \geq n, \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq n, \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > n. \end{cases} \quad (1.21)$$

Esercizio 1.4.3 Dimostrare il Lemma 1.4.2.

1.5 Funzioni

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $k \in \mathbb{N}$; indicheremo con $C^k(\bar{U})$ l'insieme delle funzioni u tali che $D^\alpha u$ è uniformemente continua in ogni sottoinsieme limitato di U , per ogni α con $|\alpha| \leq k$. Per tali funzioni $D^\alpha u$ si estende con continuità a tutto $\bar{U}$. Se denotiamo $U_T = U \times [0, T]$ per $T > 0$ o $T = \infty$, allora

$$C_1^2(U_T) := \{u : U_T \rightarrow \mathbb{R} : u, D_x u, D_x^2 u, u_t \in C(U_T)\}.$$

Il supporto di una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è la chiusura dell'insieme dei punti in cui f non si annulla:

$$\text{spt}(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}.$$

La notazione $C_c^k(U)$ denota l'insieme delle funzioni $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ a supporto compatto in U .

Esercizio 1.5.1 (i) Calcolare il supporto delle funzioni $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e

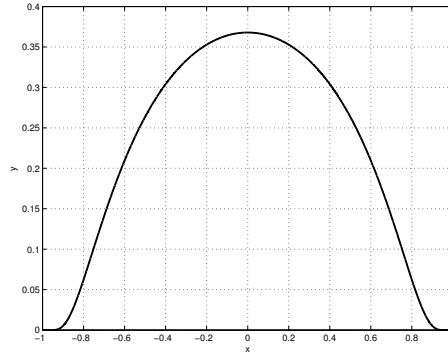
$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(ii) Provare che la funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\phi(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

è di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{spt}(\phi) \subset B(0, 1)$; si veda la Figura 1.1.

Spesso, per brevità, diremo che una funzione è *regolare* se possiamo fare tutte le derivate che ci interessano nel caso in questione; è un modo per evitare di richiedere esplicitamente $u \in C^1$, $u \in C^2$ o $u \in C^\infty$ quando non è importante specificare l'appartenenza ad una specifica classe di funzioni.

Figura 1.1: Grafico della funzione ϕ .

1.6 Il Teorema della divergenza e alcune sue conseguenze

Prima di enunciare il Teorema della divergenza diamo una definizione.

Definizione 1.6.1 Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato e $k \in \mathbb{N}$. Il bordo ∂U di U è detto di classe C^k se per ogni $x^0 \in \partial U$ esiste $r > 0$ e una funzione $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^k tale che, a meno di rinominare e riorientare gli assi, si ha

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Il bordo ∂U è detto di classe C^∞ (analitico) se γ è di classe C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$ (risp., analitica).

Se ∂U è di classe C^1 risulta allora definito in ∂U il versore normale esterno ν .

Chiaramente la parte $\partial U \cap B(x^0, r)$ del bordo di U coincide col grafico della funzione γ ; in altre parole, localmente il bordo di U è rappresentato dall'equazione cartesiana $F(x) := \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0$. Pertanto, posto $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, si ha che

$$\nu = \frac{(D_{x'}\gamma, -1)}{|(D_{x'}\gamma, -1)|}.$$

Esercizio 1.6.1 Dare un esempio esplicito (scrivendone cioè la sua espressione analitica) di un aperto limitato $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che ∂U sia di classe $C^0 \setminus C^1$.

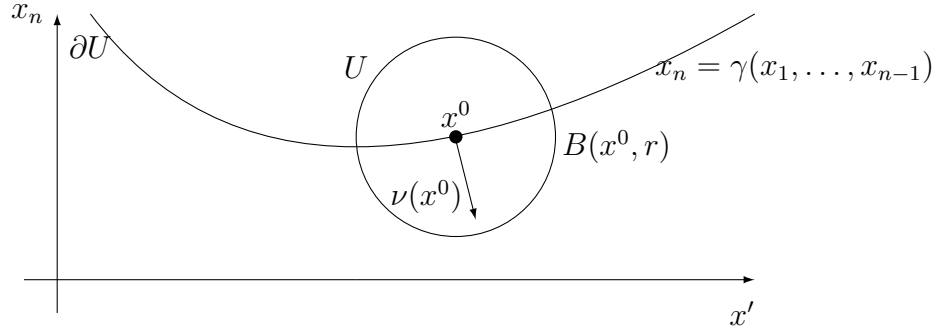


Figura 1.2: Il bordo ∂U di U . Qui $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Ricordando la definizione di derivata direzionale di una funzione di classe C^1 , nel caso in cui la “direzione” sia ν si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot Du,$$

che è definita su tutti i punti di ∂U .

Il seguente risultato è noto e verrà utilizzato sistematicamente nel seguito.

Teorema 1.6.1 (di Gauss-Green o della divergenza) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato con bordo ∂U di classe C^1 ; sia ν il versore normale esterno a ∂U . Sia inoltre $F \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ una funzione a valori vettoriali. Allora*

$$\int_U \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial U} F \cdot \nu \, dS. \quad (1.22)$$

Il risultato precedente è collegato ad alcune formule utili.

Corollario 1.6.1 (Integrazione per parti) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato con ∂U di classe C^1 ; siano $u, v \in C^1(\bar{U})$. Allora, per $i = 1, \dots, n$,*

$$\int_U u_{x_i} \, dx = \int_{\partial U} u \nu^i \, dS, \quad (1.23)$$

$$\int_U u_{x_i} v \, dx = \int_{\partial U} uv \nu^i \, dS - \int_U uv_{x_i} \, dx. \quad (1.24)$$

Dimostrazione. La formula (1.23) segue da (1.22) prendendo $F = (0, \dots, u, \dots, 0)$ con u all’ i -esimo posto. La formula (1.24) segue da (1.23) rimpiazzando u con uv . $\square$

La formula (1.24) rappresenta l'estensione a più variabili dell'usuale formula di integrazione per parti relativa a funzioni di una variabile scalare.

Esercizio 1.6.2 A cosa si riduce *formalmente* la formula (1.24) nel caso $n = 1$?

Teorema 1.6.2 (Formule di Green) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato con ∂U di classe C^1 ; siano $u, v \in C^2(\bar{U})$. Allora si ha*

$$(i) \quad \int_U \Delta u \, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS; \quad (1.25)$$

$$(ii) \quad \int_U Du \cdot Dv \, dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \int_U u \Delta v \, dx; \quad (1.26)$$

$$(iii) \quad \int_U (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dS. \quad (1.27)$$

Dimostrazione. Per dimostrare (i) applichiamo (1.24) alle funzioni u_{x_i} e 1; deduciamo

$$\int_U u_{x_i x_i} \, dx = \int_{\partial U} u_{x_i} \nu^i \, dS$$

e si conclude sommando in i .

Per dimostrare (ii) applichiamo (1.24) alle funzioni u e v_{x_i} ; deduciamo

$$\int_U u_{x_i} v_{x_i} \, dx = - \int_U uv_{x_i x_i} \, dx + \int_{\partial U} uv_{x_i} \nu^i \, dS$$

e si conclude sommando in i .

Per dimostrare (iii) applichiamo (ii) alla coppia di funzioni v, u ; deduciamo

$$\int_U Dv \cdot Du \, dx = - \int_U v \Delta u \, dx + \int_{\partial U} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

e si conclude sottraendo questa formula da (ii). $\square$

Si noti come (i) e (iii) colleghino l'integrale del Laplaciano in U con l'integrale della derivata normale su ∂U ; la (ii) si può invece interpretare come una formula di integrazione per parti.

1.7 Spazi L^p e mollificatori

Se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto definiamo per $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ è misurabile e } \|u\|_{L^p(U)} < \infty\},$$

dove

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \text{ess sup}_{x \in U} |u(x)|.$$

Analogamente definiamo

$$L_{loc}^p(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(V) \text{ per ogni } V \subset\subset U\},$$

La notazione $V \subset\subset U$ significa che V è un aperto con chiusura $\bar{V}$ compatta contenuta nell'aperto U .

Lo scopo dei mollificatori è di regolarizzare funzioni non sufficientemente regolari. Ricordando l'Esercizio 1.5.1, denotiamo $C_\phi = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$ e definiamo il *mollificatore standard*

$$\eta(x) = \frac{1}{C_\phi} \phi(x).$$

Allora $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{spt}(\eta) \subset B(0, 1)$ e $\int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon(x) dx = 1$. Definiamo inoltre per $\epsilon > 0$

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Si ha allora che $\eta_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{spt}(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$ e

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon(x) dx = 1. \quad (1.28)$$

Esercizio 1.7.1 Usare un ciclo `for` in MATLAB per disegnare i grafici di η_ϵ per $\epsilon = 0.1, \dots, 0.5$.

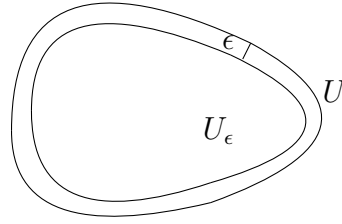
Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; fissato $\epsilon > 0$ definiamo, vedi Figura 1.3,

$$U_\epsilon = \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}.$$

Data una funzione $f \in L_{loc}^1(U)$ definiamo la funzione $f^\epsilon : U_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f^\epsilon(x) = \eta_\epsilon * f(x) = \int_U \eta_\epsilon(x - y) f(y) dy = \int_{B(0, \epsilon)} \eta_\epsilon(y) f(x - y) dy, \quad x \in U_\epsilon.$$

Si noti che la funzione f^ϵ è in generale definita solo per $x \in U_\epsilon$ (e non per $x \in U$). Infatti il supporto della funzione $y \mapsto \eta_\epsilon(x - y)$ è la palla $B(x, \epsilon)$; se $x \in U_\epsilon$, si ha $B(x, \epsilon) \subset U$ e il primo integrale qui sopra è ben definito.

Figura 1.3: Gli insiemi U e U_ϵ .

Teorema 1.7.1 (Proprietà dei mollificatori) *Sia $f \in L^1_{loc}(U)$; allora*

- (i) $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$;
- (ii) $f^\epsilon \rightarrow f$ q.o. per $\epsilon \rightarrow 0$;
- (iii) se $f \in C(U)$, allora $f^\epsilon \rightarrow f$ uniformemente sui compatti di U ;
- (iv) se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$, allora $f^\epsilon \rightarrow f$ in $L^p_{loc}(U)$.

Per una dimostrazione del Teorema 1.7.1 si veda [10, Appendix C, Theorem 7].

Capitolo 2

Una classificazione delle equazioni a derivate parziali

Examples teach no less than rules, and errors more than correct but astruse proofs.”

(V.I. Arnold)

In questo breve capitolo diamo alcune semplici definizioni in merito alla struttura delle equazioni alle derivate parziali, limitandoci al caso scalare.

2.1 Alcune definizioni sulle equazioni a derivate parziali

In questa sezione diamo una semplice classificazione delle Equazioni alle Derivate Parziali (EDP, d'ora in poi).

Definizione 2.1.1 Sia $k \geq 1$ un numero intero positivo e U un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Una EDP di ordine k è una espressione del tipo

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0, \quad (2.1)$$

dove

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p_k, p_{k-1}, \dots, p_1, z, x) &\mapsto F(p_k, p_{k-1}, \dots, p_1, z, x) \end{aligned}$$

è una funzione data e

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}$$

è la funzione incognita della variabile $x \in U$.

La definizione precedente è molto generale e un po' vaga: non si richiede nessuna ipotesi di regolarità su F né su u (potrebbe essere u discontinua?); non si parla di dati iniziali e/o al bordo. Vedremo, caso per caso, come adattare questa definizione ai problemi che considereremo. Si presti attenzione al fatto che F ed u sono scalari; il caso dei sistemi verrà affrontato solo nell'ultima parte di questo corso.

Definizione 2.1.2 *L'equazione (2.1) è detta:*

- lineare se è della forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x); \quad (2.2)$$

- semilineare se è della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0; \quad (2.3)$$

- quasilineare se è della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0; \quad (2.4)$$

- completamente non lineare se F dipende in maniera non lineare dalle derivate di ordine massimo.

In queste definizioni, le funzioni a_α , a_0 , ed f sono supposte date. Se $f = 0$ l'equazione è detta omogenea; la stessa definizione si applica agli altri casi.

Osservazione 2.1.1 La definizione va presa con un minimo di perspicacia: se poniamo $a_0 = 0$ nell'espressione (2.3) che caratterizza un'equazione semilineare otteniamo chiaramente un'equazione lineare. Inoltre, se tutti gli a_α con $|\alpha| = k$ sono nulli, allora ad esempio l'equazione (2.2) è di ordine (al più) $k - 1$. In (2.3) e (2.4) la funzione f presente in (2.2) è stata "inglobata" dentro a_0 .

La definizione precedente si può parafrasare così: l'EDP (2.1) è

- lineare, se F è lineare nelle variabili $(p_k, p_{k-1}, \dots, p_1, z)$ (cioè nelle derivate di u e in u);

2.1. ALCUNE DEFINIZIONI SULLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI 17

- semilineare, se F è lineare nelle variabili p_k (cioè nelle derivate di ordine massimo di u) e i coefficienti a_α non dipendono né da u né dalle sue derivate;
- quasilineare, se F è lineare nelle variabili p_k (cioè nelle derivate di ordine massimo di u);
- completamente non lineare, altrimenti.

Esempio 2.1.1 Diamo ora alcuni semplici esempi di equazioni alle derivate parziali; rimandiamo a [10] per una carrellata ben più ampia. Ulteriori esempi saranno dati nel seguito.

- Sia $b \in \mathbb{R}^n$; l'equazione del trasporto è

$$u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0.$$

Qui la variabile $t \in \mathbb{R}$ suggerisce una dimensione temporale mentre $x \in \mathbb{R}^n$; si tratta perciò di una equazione in $\mathbb{R}^{n+1}$. Possiamo anche scriverla come

$$u_t + b \cdot Du = 0,$$

dove intendiamo con Du il gradiente di u fatto rispetto alle variabili x . Essa è lineare e omogenea, del primo ordine. La linearità si traduce così: se u e v sono funzioni regolari di $\mathbb{R}^n$, allora

$$(u + v)_t + b \cdot D(u + v) = (u_t + b \cdot Du) + (v_t + b \cdot Dv).$$

In particolare, se u e v sono due soluzioni allora anche $u \pm v$ e cu , $c \in \mathbb{R}$, sono soluzioni.

- Indichiamo con

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

il *laplaciano* di u . I tre prototipi di EDP lineari del secondo ordine sono

$$\Delta u = 0, \quad u_t - \Delta u = 0, \quad u_{tt} - \Delta u = 0. \quad (2.5)$$

Queste equazioni sono chiamate *equazione di Laplace, del calore, delle onde (o di d'Alembert)*, rispettivamente. Esse sono omogenee; la prima è definita in $\mathbb{R}^n$, le altre in $\mathbb{R}^{n+1}$. Queste equazioni modellizzano svariati fenomeni e verranno studiate in dettaglio nei capitoli seguenti.

L'equazione di Poisson è

$$\Delta u = f,$$

dove f è una funzione data. Se $f = f(x)$ o, più in generale, $f = f(x, u) = a(x) + b(x)u$, allora l'equazione di Poisson è lineare. Altrimenti, se f dipende da u in modo non lineare, l'equazione è semilineare.

- Le tre equazioni riportate in (2.5) sono esempi di equazioni lineari del secondo ordine. Supponiamo per semplicità $n = 2$ e prendiamo allora come variabili indipendenti x e y ; una generica equazione alle derivate parziali del secondo ordine si scrive come

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu + g = 0, \quad (2.6)$$

dove i coefficienti $a, b, \dots, g$ sono funzioni regolari delle variabili x e y . Una semplice analisi dell'equazione (2.6) fa capire che il comportamento delle soluzioni è dettato dai termini di grado due e dunque dai coefficienti a, b, c . L'equazione (2.6) è allora detta

$$\begin{array}{lll} \text{ellittica} & \text{se} & ac - b^2 > 0, \\ \text{parabolica} & \text{se} & ac - b^2 = 0, \\ \text{iperbolica} & \text{se} & ac - b^2 < 0. \end{array}$$

Tale terminologia è ovviamente dovuta al fatto che le linee di livello

$$\mathcal{L}_\ell = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = \ell\}$$

sono, a (x, y) fissato, delle ellissi, parabole e iperboli, rispettivamente. Con questa terminologia, che si estende a equazioni di ordine maggiore di due, l'equazione di Laplace è una equazione ellittica, l'equazione del calore è parabolica e l'equazione delle onde è iperbolica.

- Sia $x \in \mathbb{R}$ e $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Una *legge di conservazione* è un'EDP della forma

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Moltissimi fenomeni fisici sono rappresentati da leggi di conservazione; ad esempio si rappresentano tramite leggi di conservazione la conservazione della massa, del momento (quantità di moto), dell'energia, da cui il nome. L'equazione si scrive per esteso come

$$u_t + f'(u)u_x = 0.$$

Se la funzione f non è lineare, allora la legge di conservazione scritta sopra è una EDP quasilineare.

2.1. ALCUNE DEFINIZIONI SULLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI 19

L'equazione di Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0$$

è un semplice esempio di una legge di conservazione.

- Un'equazione completamente non lineare è l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(Du, x) = 0,$$

che risulta fondamentale in Meccanica Analitica.

Esercizio 2.1.1 Classificare le seguenti EDP; qui x e y sono variabili reali.

(i) $u_x + u_y = 0$;

(ii) $u_x + u_y = u$;

(iii) $u_x + u_y = u^2$;

(iv) $u_x + uu_y = u^2$;

(v) $u_x + (u_y)^2 = u$.

Capitolo 3

L'equazione del trasporto

In questo capitolo iniziamo lo studio delle EDP con un caso molto semplice: l'*equazione del trasporto*. Si tratta dell'equazione

$$u_t + b \cdot Du = f. \quad (3.1)$$

Qui $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante e $f = f(x, t)$ è una funzione data. Si tratta pertanto di una equazione *lineare*. Una semplice interpretazione di questa equazione, nel caso omogeneo $f = 0$, è data in [42, §2.2.1]; in quel caso, $n = 1$ e u rappresenta la concentrazione di una sostanza inquinante in un canale rettilineo in cui l'acqua scorre con velocità b .

3.1 Il problema ai valori iniziali nel caso omogeneo

In questa sezione studiamo l'equazione omogenea

$$u_t + b \cdot Du = 0. \quad (3.2)$$

Per avere un'idea di come risolvere (3.2) notiamo che, nel caso particolare in cui $|b| = 1$, il termine $b \cdot Du$ rappresenta l'usuale derivata direzionale (rispetto alla variabile x) di u lungo la direzione b :

$$b \cdot Du = \partial_b u.$$

Se allora scriviamo (3.2)

$$u_t + b \cdot Du = (1, b) \cdot (u_t, Du) = 0,$$

allora u soddisfa l'equazione se la sua derivata “direzionale” lungo la direzione “ $(b, 1)$ ” è nulla. Questo vuol dire che u è costante lungo le rette di direzione $(b, 1)$; fissato $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ una tale retta è

$$R_{x,t} := \{(x + sb, t + s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

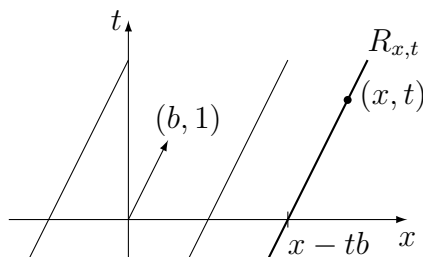


Figura 3.1: Rette lungo le quali la soluzione di (3.1) è costante; qui $n = 1$.

Esercizio 3.1.1 Fare la Figura 3.1 nel caso $n = 2$.

Possiamo verificare analiticamente tutto questo.

Lemma 3.1.1 *Supponiamo che $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ risolva (3.2). Allora per ogni fissato $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ la funzione u è costante lungo la retta $R_{x,t}$.*

Dimostrazione. Sia

$$z(s) = u(x + sb, t + s) \quad (3.3)$$

la restrizione di u alla retta $R_{x,t}$. Allora

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = 0,$$

poiché u soddisfa (3.2). □

Sfruttiamo ora l'informazione fornitaci dal lemma in senso opposto: *per determinare u* , se conosciamo il valore di u in un punto $(x_0, 0)$, allora conosciamo il suo valore lungo tutta la retta $(x_0 + sb, s)$, $s \in \mathbb{R}$. Poiché tali rette ricoprono tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ al variare di x_0 , determiniamo u in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ se conosciamo i suoi valori su $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Tutto questo motiva l'introduzione del *problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Osservazione 3.1.1 Si noti come, qui come nel seguito, nel problema ai valori iniziali ci si riferisca a tempi *positivi* e a dati assegnati a $t = 0$. Questo è derivato dall'interpretazione applicativa del problema: dedurre l'evoluzione della soluzione nel futuro, cioè per $t > 0$, dalla sua conoscenza ad un istante iniziale, cioè $t = 0$. In effetti, in molti casi il dato iniziale determina perfettamente la soluzione anche nel passato $t < 0$; è proprio quello che succede per l'equazione del trasporto, come si vede dalla seguente proposizione. In questi casi ci riferiremo sempre al problema (3.4), ma specificheremo il dominio di esistenza della soluzione.

Proposizione 3.1.1 Se $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, allora il problema ai valori iniziali (3.4) ha un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, data dall'espressione

$$u(x, t) = g(x - tb). \quad (3.5)$$

Dimostrazione. Fissiamo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La retta $R_{x,t}$ interseca l'iperpiano dei dati iniziali Γ nel punto $(x - tb, 0)$. Si è visto sopra che u è costante lungo $R_{x,t}$; pertanto vale (3.5). Questo dimostra che se $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ è soluzione di (3.4), allora u soddisfa (3.5).

Viceversa, se u soddisfa (3.5), allora, derivando, si vede subito che u soddisfa (3.4). $\square$

Osservazione 3.1.2 Notiamo che affinché la funzione u definita in (3.5) sia soluzione di (3.4) basta che g ammetta derivate parziali. La scelta di ambientare la Proposizione nella classe C^1 è stata fatta per comodità.

E' immediato verificare invece che se $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ allora $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \dots$. Si noti come la soluzione u abbia precisamente la *stessa* regolarità dei dati iniziali.

Grazie all'espressione (3.5) è particolarmente semplice rappresentare l'evoluzione della soluzione u . Ricordiamo infatti che, se $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, il grafico della funzione $x \rightarrow g(x - x_0)$ si ottiene da quello di g per traslazione di x_0 ; si veda la Figura (3.2). Si noti che, se x ha la dimensione di uno spazio e t quella di un tempo, allora dall'equazione (3.1) si deduce che b ha le dimensioni di una velocità: al passare del tempo, il grafico di $u(\cdot, t)$ è "trasportato" con velocità b .

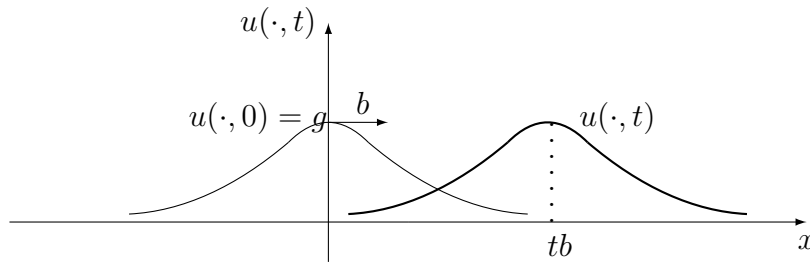


Figura 3.2: Grafico della soluzione $u(\cdot, t)$ di (3.4); qui $n = 1$ e $b > 0$.

Esercizio 3.1.2 Risolvere e disegnare il grafico della funzione $u(\cdot, t)$, soluzione del problema ai dati iniziali (3.4), nei seguenti casi:

(i) $n = 1, b = 2, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

(ii) $n = 1, b = -1, g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$;

(iii) $n = 1, b = 0, g(x) = x^2$;

(iv) $n = 1, b = 2\pi, g(x) = \frac{\sin x}{x}$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 1$ (è g di classe C^1 ?);

(v) $n = 2, b = (1, -1), g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$;

(vi) $n = 2, b = (0, 1), g(x, y) = \sin x$.

3.2 Il problema non omogeneo

In questa sezione consideriamo il problema ai valori iniziali nel caso non omogeneo

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3.6)$$

dove $f = f(x, t)$. Il seguente risultato si dimostra in modo analogo a quello della Proposizione 3.1.1.

Proposizione 3.2.1 *Siano $f = f(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora il problema ai valori iniziali (3.6) ha un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, data dall'espressione*

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x - (t - s)b, s) ds. \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Supponiamo che u sia una soluzione di (3.6) e $z(s)$ la sua restrizione alla retta $R_{x,t}$, come in (3.3). Allora

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s).$$

Da questa formula e dal teorema fondamentale del calcolo integrale deduciamo

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - tb) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) ds = \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) ds \\ &= \int_0^t f(x - (t - \sigma)b, \sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

con il cambiamento di variabili $\sigma = t + s$; questa formula coincide con (3.7).

Pertanto, se u risolve (3.6) abbiamo dedotto che essa deve potersi scrivere come in (3.7). Viceversa, è immediato verificare che la formula (3.7) dà proprio una soluzione di (3.6). Infatti la condizione iniziale è ovviamente

soddisfatta; per derivazione di una funzione composta e derivando sotto il segno di integrale si ha

$$u_t(x, t) = -b \cdot Dg(x - tb) + f(x, t) + \int_0^t -b \cdot Df(x - (t-s)b, s) ds,$$

$$Du(x, t) = Dg(x - tb) + \int_0^t Df(x - (t-s)b, s) ds.$$

Questo dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione. $\square$

Osservazione 3.2.1 Si noterà come la soluzione dell'equazione del trasporto (in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, omogenea o non omogenea) è stata ottenuta per integrazione lungo rette, riconducendosi così a derivate *ordinarie*. Questa tecnica è in effetti generale e ha il nome di *metodo delle caratteristiche*; in particolare, essa permette di risolvere il caso in cui b è una funzione di x e t ; si veda [10, §3.2].

Osservazione 3.2.2 Si noti il diverso ruolo di g e f in (3.7): g è trasportata mentre f è integrata, si veda la Figura 3.3. Si noti inoltre che l'ipotesi di regolarità fatta su f e g è servita nella dimostrazione per verificare che u è soluzione. Vedremo in seguito una tecnica generale (il principio di Duhamel) per dedurre, nel caso di problemi dipendenti dal tempo, le soluzioni di un problema ai valori iniziali *non omogeneo* da quelle di un problema ai valori iniziali *omogeneo*, si veda la Sezione 5.3.2 e in particolare l'Esercizio 5.3.3.

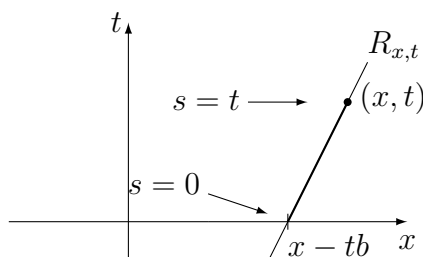


Figura 3.3: In tratto più grosso il segmento lungo cui è integrata f ; qui $n = 1$.

Esercizio 3.2.1 Si consideri l'espressione (3.7). E' vero o falso che il termine integrale è rappresentabile come l'integrale di f lungo una opportuna curva ϕ ?

Esercizio 3.2.2 Si applichi la formula (3.7) nei casi

(a) $n = 1$, $b = 2$, $f(x, t) = e^{-x}$, $g(x) = 0$;

(b) $n = 1$, $b = -1$, $f(x, t) = t^2 e^x$, $g(x) = \sin x$.

Esercizio 3.2.3 [10, §2.5-1] Si consideri il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = cu & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

dove $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Provare che questo problema ha una unica soluzione, scrivere una formula rappresentativa per la soluzione u , disegnare un grafico di $u(\cdot, t)$ per alcuni tempi t .

3.3 Approfondimenti

In merito all'espressione (3.5) e al suo significato fisico si veda [42, §6.1].

Capitolo 4

L'equazione di Laplace

In questo capitolo studiamo l'equazione di Laplace, forse l'equazione alle derivate parziali più famosa ed utilizzata. Oltre al libro di Evans [10] si potranno consultare i libri di John [24] e di Folland [13]; quest'ultimo usa in modo sostanziale la trasformata di Fourier. In generale, un'ottima fonte di informazioni sull'equazione di Laplace e sulle equazioni ellittiche è il classico libro di Gilbarg e Trudinger [16].



Laplace

4.1 Introduzione

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; l'*equazione di Laplace* in U è l'equazione alle derivate parziali

$$\Delta u = 0. \tag{4.1}$$

La funzione incognita è $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, dove $u = u(x)$; in effetti, poiché avremo bisogno di assegnare i valori di u sul bordo ∂U di U per determinarla, molto spesso supporremo che u sia definita in $\bar{U}$. La sua versione non omogenea

$$-\Delta u = f, \tag{4.2}$$

è detta *equazione di Poisson*, dove chiaramente il segno meno davanti al Laplaciano è inessenziale dal punto di vista analitico. La presenza del segno meno ha varie motivazioni; ad esempio, l'equazione del calore $u_t - \Delta u = f$ si riduce proprio a (4.2) quando si considerano soluzioni stazionarie (cioè non dipendenti dal tempo).

Come scritto poco sopra, l'equazione (4.1) o (4.2) è di solito risolta nell'aperto U imponendo che la funzione u soddisfi delle opportune condizioni

al bordo. In queste note ci limiteremo allo studio del *problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U. \end{cases} \quad (4.3)$$

Altre condizioni al bordo danno origine ai problemi di Neumann (in cui si impone che $\partial_\nu u = g$ al bordo, dove ν è il versore normale esterno a U) o di Robin (in cui le condizioni al bordo sono di tipo misto Dirichlet-Neumann).

Definizione 4.1.1 Una funzione $u \in C^2(U)$ che soddisfa (4.1) è detta *armonica*.

Esempio 4.1.1 (Un'interpretazione fisica dell'equazione di Laplace)

Una tipica interpretazione fisica dell'equazione di Laplace è la seguente. Supponiamo che u rappresenti la concentrazione di una certa sostanza in un regime di equilibrio, in una regione aperta $U \subset \mathbb{R}^n$; sia $F = F(u)$ la densità di flusso; la funzione F è dunque a valori vettoriali e supporremo che sia di classe $C^2(U)$. Sia ora $V \subset U$ un aperto contenuto in U , con ∂V di classe C^1 , e ν il versore normale esterno al bordo ∂V di V ; si veda la Figura 4.1.

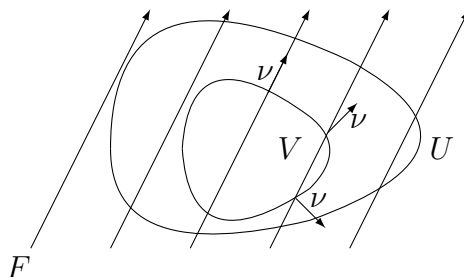


Figura 4.1: Versori normali esterni a V e il campo vettoriale F .

Allora il flusso totale attraverso ∂V deve essere zero:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS = 0.$$

In parole povere, tanto entra, tanto esce. Dal Teorema della divergenza 1.6.1 deduciamo allora

$$\int_V \operatorname{div} F \, dx = 0, \quad \text{per ogni } V \subset U \text{ con } \partial V \text{ di classe } C^1. \quad (4.4)$$

Poiché V è un sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}^n$, ne segue che

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{in } U. \quad (4.5)$$

Nella modellistica di vari fenomeni fisici si assume che la densità di flusso F sia *proporzionale* al gradiente Du : interpretando u come una concentrazione, ciò vuol dire, intuitivamente, che

- quanto più grande è la differenza della concentrazione in due punti diversi dello spazio, tanto maggiore sarà il flusso tra quei due punti;
- il flusso aumenta in modo *lineare* rispetto alla differenza di concentrazione.

Ricordando l'interpretazione geometrica del gradiente, Du punta verso la regione in cui la concentrazione è più alta. Il verso di F , invece, è opposto a quello di Du : in un regime di equilibrio il flusso avviene da regioni in cui la concentrazione è alta a regioni in cui la concentrazione è più bassa; si veda la Figura 4.2.

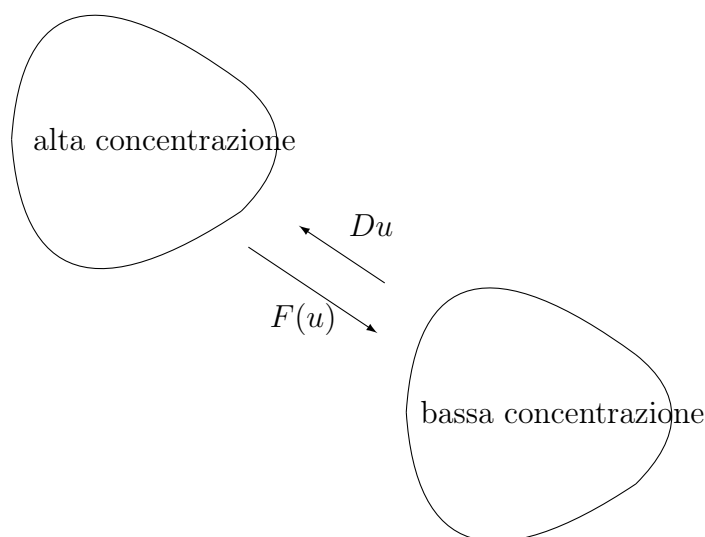


Figura 4.2: Gradiente di u e flusso.

In formule, questo vuol dire che

$$F(u) = -aDu, \quad a > 0. \quad (4.6)$$

Di conseguenza, da (4.5) abbiamo che $-a\Delta u = 0$ (si noti di nuovo come il segno meno davanti al Laplaciano venga fuori in maniera naturale) e dunque

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } U.$$

Osservazione 4.1.1 L'uguaglianza (4.6) può essere letta anche in modo leggermente diverso. Sia $F = F(x)$ un campo di forze, cioè $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il campo F si dice conservativo se ammette un potenziale, cioè se esiste $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(x) = D\phi(x)$ per ogni $x \in U$. Allora il potenziale di un campo conservativo a divergenza nulla soddisfa $\Delta\phi = 0$.

Osservazione 4.1.2 (Il Laplaciano e il campo elettrostatico) L'Osservazione 4.1.1 si applica in particolare al caso del campo elettrostatico E in un aperto U di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo che sia assegnata una distribuzione ρ di cariche elettriche; allora l'equazione di Gauss (la prima equazione di Maxwell) è (in unità mks)

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi\rho}{\epsilon},$$

dove ϵ è la costante dielettrica del mezzo. Nel caso di cariche localizzate in punti, l'equazione deve essere soddisfatta al di fuori da questi punti. Se esiste un potenziale ϕ di E , cioè se $\nabla\phi = E$, allora ϕ soddisfa in U l'equazione

$$\Delta\phi = \frac{4\pi\rho}{\epsilon},$$

che prende il nome di equazione di Poisson. Se il campo è creato da cariche fuori da U , allora $\rho = 0$ in U e ϕ diventa una funzione armonica.

Esercizio 4.1.1 Provare che se $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_V u \, dx = 0 \text{ per ogni aperto } V \subset U \quad \Rightarrow \quad u = 0 \text{ in } U.$$

Ciò dimostra che (4.4) implica (4.5).

Esercizio 4.1.2 Siano u e v due funzioni armoniche. Trovare una semplice condizione affinché anche il loro prodotto uv sia armonico.

Esercizio 4.1.3 [10, §2.5-2] Provare che l'equazione di Laplace è invariante

- (i) per traslazioni: se $\Delta u = 0$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $v(x) = u(x + b)$, allora $\Delta v = 0$;
- (ii) per rotazioni: se $\Delta u = 0$, A è una matrice ortogonale $n \times n$ e $v(x) = u(Ax)$, allora $\Delta v = 0$.

4.2 La soluzione fondamentale

Iniziamo lo studio dell'equazione di Laplace cercando soluzioni in una classe particolare, per le quali l'analisi è più semplice. Poiché l'equazione di Laplace è invariante per rotazioni, si veda l'Esercizio 4.1.3, è allora naturale cercare soluzioni che siano anch'esse invarianti per rotazioni. Tali soluzioni andranno dunque cercate tra le funzioni *radiali*, che dipendono solo da $r = |x|$. In tal caso, data u e fissato $x \in \mathbb{R}^n$, il valore $u(Ax)$ non cambia, qualunque sia la matrice ortogonale A .

In altre parole, cercheremo soluzioni u dell'equazione $\Delta u = 0$ della forma

$$u(x) = v(r),$$

dove v è una funzione di una variabile reale.



Dirichlet

Lemma 4.2.1 *Se $u(x) = v(r)$ soddisfa $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, allora per $r > 0$ si ha che*

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & \text{se } n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

per costanti arbitrarie $b, c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Da (1.6) calcoliamo, per $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(r) \frac{x_i}{r}, \\ u_{x_i x_i} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - x_i \frac{1}{r^2} \frac{x_i}{r} \right) = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\Delta u(x) = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

La risoluzione dell'equazione alle derivate parziali $\Delta u = 0$ è dunque ricondotta a quella dell'equazione differenziale *ordinaria* a coefficienti non costanti

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0,$$

definita per $r > 0$. Posto $v' = z$ otteniamo l'equazione a variabili separabili

$$z' + \frac{n-1}{r} z = 0.$$

Le soluzioni non nulle devono soddisfare

$$\frac{z'}{z} = -\frac{n-1}{r}.$$

Dunque $\log |z| = -(n-1) \log r + C$, per $C \in \mathbb{R}$ e

$$z(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$$

per $a \in \mathbb{R}$, da cui la tesi. □

Se $n = 1$ le soluzioni dell'equazione $u_{xx} = 0$ si riducono semplicemente alle funzioni lineari affini.

Osservazione 4.2.1 Nella dimostrazione del Lemma 4.2.1 si è visto che per funzioni radiali $u(x) = v(r)$ l'equazione $\Delta u = 0$ si riduce alla

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r}v_r = 0. \quad (4.7)$$

Essa viene chiamata *parte radiale del Laplaciano in coordinate polari*. Si noti che l'equazione (4.7) è singolare per $r = 0$; questo non dovrebbe sorprendere, in quanto le coordinate polari sono singolari a $r = 0$.

Il lemma precedente motiva la seguente definizione.

Definizione 4.2.1 *La funzione*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (4.8)$$

definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è detta soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace o potenziale Newtoniano.

A proposito del caso $n = 2$, si noti che $\alpha(2) = \pi$. Pertanto la funzione Φ in tale caso si può scrivere

$$\frac{1}{2\alpha(2)} \log \frac{1}{|x|},$$

che rende questo caso un po' più simile al caso $n \geq 3$.

Dal Lemma 4.2.1, abbiamo che

$$\Delta \Phi(x) = 0 \quad \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

La denominazione *fondamentale* data a questa soluzione, così come la presenza delle varie costanti, sarà chiarita completamente in seguito, si veda l'Osservazione 4.3.3. Useremo la notazione Φ_n quando vorremo specificare la dipendenza di Φ dalla dimensione spaziale e $\Phi(|x|)$ quando vorremo sottolineare il fatto che la soluzione fondamentale è in realtà una funzione radiale. A questo proposito notiamo che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Phi_n(x)| = \begin{cases} +\infty & \text{se } n = 2, \\ 0 & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (4.9)$$

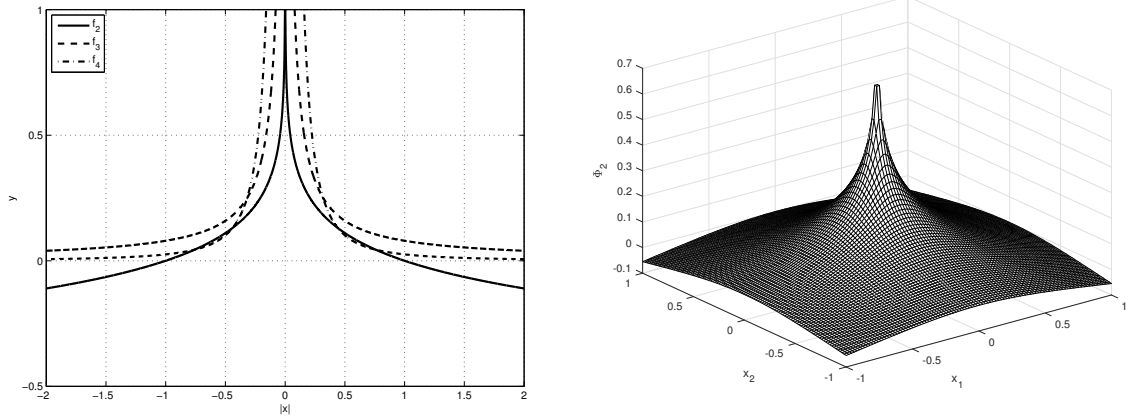


Figura 4.3: Grafici proiettati delle funzioni $f_n(|x|) = \Phi_n(x)$ e grafico della funzione Φ_2 .

Proposizione 4.2.1 (Proprietà della soluzione fondamentale) *La soluzione fondamentale Φ soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) si ha

$$D\Phi(x) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x}{|x|^n} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (4.10)$$

$$\int_{B(0,1)} |D\Phi(x)| dx = 1; \quad (4.11)$$

(iii) per ogni funzione continua f si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S(0,\epsilon)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) dS(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S(x,\epsilon)} \partial_\nu \Phi(x-y) f(y) dS(y) = f(x), \quad (4.12)$$

dove ν è il versore normale interno a $S(x,\epsilon)$;

(iv) $|D^2\Phi| \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Dimostriamo nell'ordine gli enunciati qui sopra.

(i) Proviamo che l'integrale di Φ su un qualsiasi compatto di $\mathbb{R}^n$ è convergente. Poiché la funzione Φ è continua ovunque tranne che nel punto

0, in cui non è limitata, basta considerare, ad esempio, l'integrale sulla palla $B(0, r)$.

Se $n = 2$

$$\int_{B(x^0, r)} \log |x| \, dx = 2\pi \int_0^r r \log r \, dr,$$

che è convergente. Se $n \geq 3$ il risultato segue dal Lemma 1.4.2.

(ii) La formula (4.10) segue direttamente da (1.6). Inoltre, dal Teorema 1.4.1 si ha

$$\int_{B(0,1)} |D\Phi(x)| \, dx = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_0^1 \frac{1}{r^{n-1}} n\alpha(n) r^{n-1} \, dr = 1.$$

(iii) Notiamo che

$$\nu(y) = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\epsilon}. \quad (4.13)$$

Dalla (4.10) e dall'espressione (4.13) di ν si ha, per $y \in S(0, \epsilon)$,

$$\partial_\nu \Phi(y) = -\frac{y}{\epsilon} \cdot \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n} = \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}.$$

Pertanto, dal Teorema 1.4.2 e dalla continuità di f segue che, per $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_{S(0,\epsilon)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) \, dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}} \int_{S(0,\epsilon)} f(x-y) \, dS(y) = \oint_{S(x,\epsilon)} f(y) \, dS(y) \rightarrow f(x).$$

La seconda uguaglianza segue da un cambiamento di variabili lineare.

(iv) Basta derivare (4.10) e usare i criteri di convergenza per gli integrali.

□

Osservazione 4.2.2 Le formule (4.11) e (4.12) sono una motivazione della normalizzazione fatta di Φ . Si osservi che il gradiente di Φ punta verso il punto 0, come era evidente dai grafici in Figura 4.3. Si noti la proprietà di approssimazione (4.12), che sarà ripetutamente usata nel seguito e che ricorda l'analoga proprietà dei mollificatori (si veda il Teorema 1.7.1 (iii)); in questo caso si tratta però di un integrale superficiale.

Osservazione 4.2.3 Da (4.10) segue che, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e per qualche costante $C > 0$, si ha

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}. \quad (4.14)$$

Osservazione 4.2.4 La Proposizione 4.2.1 stabilisce che $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $|D\Phi| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ma $|D^2\Phi| \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 4.2.1 Calcolare esplicitamente

$$\int_{B(0,r)} \Phi(x) dx = \begin{cases} -\frac{r^2}{2} \log r + \frac{r^2}{4} & \text{se } n = 2, \\ \frac{r^2}{2(n-2)} & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (4.15)$$

e

$$\int_{S(0,r)} \Phi(y) dS(y) = \begin{cases} -r \log r & \text{se } n = 2, \\ \frac{r}{n-2} & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (4.16)$$

Esercizio 4.2.2 Sono integrabili Φ , $|D\Phi|$ e $|D^2\Phi|$ all'infinito?

Si veda [1, §34] per un'introduzione elementare alla soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace fatta da un grande matematico.

4.3 L'equazione di Poisson

Come già visto nel Capitolo 2, l'equazione di Poisson è l'equazione lineare non omogenea

$$-\Delta u = f, \quad (4.17)$$

dove $f = f(x)$ è una funzione data. Una motivazione intuitiva al prossimo Teorema 4.3.1 può essere la seguente. Sappiamo che la funzione Φ è armonica se $x \neq 0$; poiché l'equazione di Laplace è invariante per traslazioni, fissato $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione

$$x \mapsto \Phi(x - y)$$

sarà armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Lo stesso sarà allora vero per la funzione

$$x \mapsto \Phi(x - y)f(y)$$

e, di conseguenza, per ogni somma finita

$$x \mapsto \sum_{i=1}^m \Phi(x - y_i)f(y_i).$$



Poisson

Pensando allora intuitivamente di mandare m all'infinito e, dunque, di rimpiazzare la somma con un integrale, si potrebbe congetturare che la funzione

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy = (\Phi * f)(x) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|) f(y) dy & \text{se } n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y) dy & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

sia *armonica*. Ciò è falso, e la causa dipende dal fatto che $x \rightarrow |D^2(\Phi)(x-y)|$ non è sommabile in un intorno di y (si veda il punto (iv) della Proposizione 4.2.1). Pertanto, non è lecito calcolare le derivate seconde di u derivando sotto il segno di integrale.

Teorema 4.3.1 (L'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$) Sia $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ e u definita da (4.18). Allora $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che la convergenza al finito dell'integrale in (4.18) è garantita dalla Proposizione 4.2.1 (i) mentre all'infinito l'integrale converge per l'ipotesi che f sia a supporto compatto.

1. Per ovviare al fatto che la funzione $y \mapsto |D^2\Phi(x-y)|$ non è localmente sommabile, ricordiamo che, dalle proprietà della convoluzione (o con un semplice cambiamento di variabili) segue che

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y) dy.$$

Calcoliamo dunque le derivate di u partendo da questa formula. Dal Teorema di derivazione sotto il segno di integrale segue che

$$u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i x_j}(x-y) dy,$$

per $i, j = 1, \dots, n$. Pertanto u ammette derivate parziali seconde; poiché f è di classe C^2 , ne segue che $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Per dimostrare che u soddisfa l'equazione di Poisson, a causa della singolarità di Φ in 0 conviene introdurre $\epsilon > 0$ e scrivere

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= I_\epsilon + J_\epsilon. \end{aligned} \quad (4.19)$$

2. Cominciamo con lo studiare I_ϵ . Osserviamo che, per la (1.1) con $C = \sqrt{n}$, abbiamo

$$|\Delta f(x)| = \left| \sum_i f_{x_i x_i} \right| \leq \sum_i |f_{x_i x_i}| \leq C \sqrt{\sum_i |f_{x_i x_i}|^2} \leq C \sqrt{\sum_{i,j} |f_{x_i x_j}|^2} = C |D^2(f(x))|.$$

Dalla disuguaglianza precedente e da (4.15) deduciamo

$$|I_\epsilon| \leq C \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(y)| dy \leq \begin{cases} C\epsilon^2 \log |\epsilon| & \text{se } n = 2, \\ C\epsilon^2 & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Qui e nel seguito la lettera C indica una costante che non è essenziale specificare e che può cambiare da riga a riga. In particolare $I_\epsilon \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

3. Stimiamo ora J_ϵ . Poiché $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$, dalla seconda formula di Green (Teorema 1.6.2 (ii)) deduciamo

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} D_y \Phi(y) \cdot D_y f(x-y) dy + \int_{S(0,\epsilon)} \Phi(y) \partial_\nu f(x-y) dS(y) \\ &= J_\epsilon^i + J_\epsilon^b. \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso ν è la normale *interna* a $S(0, \epsilon)$, si veda la Figura 4.4.

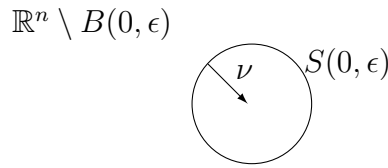


Figura 4.4: Versore normale esterno a $\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)$.

Stimiamo ora separatamente J_ϵ^i e J_ϵ^b . Per stimare J_ϵ^i possiamo utilizzare di nuovo la seconda formula di Green in quanto l'integrale viene fatto al di fuori da 0. Deduciamo allora

$$\begin{aligned} J_\epsilon^i &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Delta_y \Phi(y) f(x-y) dy - \int_{S(0,\epsilon)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) dS(y) \\ &= - \int_{S(0,\epsilon)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) dS(y) \rightarrow -f(x) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

in quanto Φ è armonica fuori da 0 e sfruttando la Proposizione 4.2.1 (iii).

Per J_ϵ^b , da (4.16) deduciamo

$$|J_\epsilon^b| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{S(0,\epsilon)} |\Phi(y)| dS(y) \leq \begin{cases} C\epsilon |\log \epsilon| & \text{se } n = 2, \\ C\epsilon & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Abbiamo perciò dimostrato che $J_\epsilon^i \rightarrow -f(x)$ e $J_\epsilon^b \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$.

4. Da (4.19) e dai due punti precedenti abbiamo la tesi.

□

Osservazione 4.3.1 Ci si può chiedere se, a meno di costanti additive, le soluzioni (limitate) dell'equazione di Poisson siano *tutte* della forma (4.18). La risposta è sì: si veda il Teorema 4.4.7.

Osservazione 4.3.2 L'ipotesi $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, fatta nel Teorema 4.3.1, ha semplificato la dimostrazione ma è piuttosto restrittiva. Il Teorema in effetti vale per funzioni f limitate e localmente Hölderiane con esponente $\alpha \in (0, 1)$, si veda [13, Theorem 2.16] o [16, Lemma 4.2].

Si noti che benché f sia a supporto compatto, la soluzione u definita da (4.18) non è in generale a supporto compatto.

Osservazione 4.3.3 Quanto esposto in questa sezione ha un senso (profondo) nell'ambito della teoria delle distribuzioni [23, 44]. In tale ambito si dimostra infatti senza difficoltà ulteriori a quelle incontrate qui sopra che

$$-\Delta\Phi = \delta_0,$$

dove δ_0 è la distribuzione di Dirac di centro 0; si veda [13, Theorem 2.15] o [16, §2]. Questo, tra l'altro, è una ulteriore motivazione alla normalizzazione della funzione Φ . Poiché $\delta_0 * f = f$ nel senso delle distribuzioni, si ritrova allora, formalmente, che se u è definita da (4.18) allora

$$-\Delta u(x) = -\Delta\Phi * f(x) = \delta_0 * f(x) = f(x).$$

Questo chiarisce il perché la congettura fatta sotto la formula (4.18) fosse falsa; in maniera intuitiva, è proprio il “valore” di $-\Delta\Phi$ in 0 a produrre la soluzione dell'equazione di Poisson.

Da un punto vista fisico, ricordando l'Osservazione 4.1.2, Φ rappresenta (a meno di costanti), il potenziale elettrico dovuto ad una carica unitaria localizzata nell'origine.

Esercizio 4.3.1 Verificare che se $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, allora la funzione

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y) dy$$

è continua.

4.4 Proprietà delle funzioni armoniche

In questa sezione dimostriamo le principali proprietà delle funzioni armoniche.

4.4.1 Le formule di media

In questa sezione facciamo vedere una caratterizzazione delle funzioni armoniche tramite le formule di media. Iniziamo ricordando la definizione e alcune proprietà delle medie sferiche, che risulteranno utili anche nella trattazione dell'equazione delle onde.

Definizione 4.4.1 Sia $u \in C(U)$ una funzione; fissiamo $x \in U$ e $r > 0$ tali che $B(x, r) \subset U$. La media di u sulla sfera di centro x e raggio r è

$$\bar{u}(x; r) := \oint_{S(x, r)} u dS. \quad (4.20)$$

Benché la funzione $\bar{u}$ dipenda anche da $x \in U$, nel seguito, poiché x è fissato, tale dipendenza è spesso omessa per semplicità.

Il lemma seguente mostra alcune proprietà delle medie sferiche; si noti bene che tali proprietà valgono per funzioni qualsiasi, cioè non necessariamente armoniche.

Lemma 4.4.1 (Proprietà delle medie sferiche) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $u \in C^2(U)$ e $x \in U$. Allora per ogni $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset U$ si ha

$$\bar{u}_r(x; r) = \oint_{S(x, r)} Du(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS(y) = \frac{r}{n} \oint_{B(x, r)} \Delta u dy, \quad (4.21)$$

$$\bar{u}_{rr}(x; r) = \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \oint_{B(x, r)} \Delta u dy + \oint_{S(x, r)} \Delta u dS(y). \quad (4.22)$$

Inoltre

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \bar{u}(x; r) = u(x), \quad \lim_{r \rightarrow 0+} \bar{u}_r(x; r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0+} \bar{u}_{rr}(x; r) = \frac{1}{n} \Delta u(x). \quad (4.23)$$

Osservazione 4.4.1 Il lemma 4.4.1 implica che la funzione $\bar{u}(x; r)$ è prolungabile a $r = 0$ in modo C^2 . Con un leggero abuso di notazione scriveremo $\bar{u}(x; \cdot) \in C^2([0, \infty))$.

Esercizio 4.4.1 Disegnare un grafico approssimativo in un intorno destro di $r = 0$ della funzione $\bar{u}(x, \cdot)$.

Dimostrazione del Lemma 4.4.1. Dividiamo la dimostrazione in tre passi, a seconda del numero di derivate che facciamo su $\bar{u}$.

(i) Per il Lemma 1.4.1, si ha

$$\bar{u}(x; r) = \oint_{S(0,1)} u(x + rz) dS(z) \quad (4.24)$$

e questo dimostra che $\bar{u}(x; \cdot)$ è continua per $r \geq 0$. Da (4.20) si deduce, a causa del Teorema 1.4.2, che vale $(4.23)_1$.

(ii) Usiamo l'espressione (4.24) per calcolare la derivata di $\bar{u}$. Si ha

$$\bar{u}_r(x; r) = \oint_{S(0,1)} Du(x + rz) \cdot z dS(z) = \oint_{S(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS(y),$$

dove nel secondo passaggio siamo ritornati alla sfera $S(x, r)$ col cambiamento di variabili $z = \frac{y-x}{r}$, riutilizzando il Lemma 1.4.1. Si noti che $\frac{y-x}{r}$ è il versore normale esterno alla sfera $S(x, r)$; perciò, utilizzando la prima formula di Green (1.25), otteniamo

$$\bar{u}_r(x; r) = \oint_{S(x,r)} \partial_\nu u(y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = \frac{r}{n} \oint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy. \quad (4.25)$$

Questo dimostra (4.21). Si noti ora che, fissato $r^0 > 0$ tale che $B(x^0, r^0) \subset U$, si ha, per ogni $f \in (0, r_0]$,

$$\frac{r}{n} \left| \oint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy \right| \leq \frac{r}{n} \max_{B(x^0, r^0)} |\Delta u|$$

e dunque deduciamo $(4.23)_2$.

(iii) Calcoliamo ora $\bar{u}_{rr}$. Da (4.21)₂ e dal Corollario 1.4.1 deduciamo

$$\bar{u}_{rr}(x; r) = \frac{1}{n} \oint_{B(x,r)} \Delta u dy + \frac{r}{n} \partial_r \left(\frac{1}{\alpha(n)r^n} \right) \int_{B(x,r)} \Delta u dy + \frac{r}{n} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{S(x,r)} \Delta u dy.$$

Si ha

$$\frac{r}{n} \partial_r \left(\frac{1}{\alpha(n)r^n} \right) = -\frac{r}{\alpha(n)n} \frac{n}{r^{n+1}} = -\frac{1}{\alpha(n)r^n}.$$

Perciò

$$\bar{u}_{rr}(x; r) = \frac{1}{n} \oint_{B(x,r)} \Delta u \, dy - \oint_{B(x,r)} \Delta u \, dy + \oint_{S(x,r)} \Delta u \, dy,$$

da cui segue immediatamente (4.22). Dal Teorema 1.4.2 deduciamo allora (4.23)₃.

Il lemma è completamente dimostrato. $\square$

Osservazione 4.4.2 Parafrasiamo la formula (4.21) del Lemma 4.4.1: la variazione “infinitesima”, rispetto al raggio, della media *sferica* di una funzione è proporzionale alla media *sulla palla* del Laplaciano della funzione.

Osservazione 4.4.3 La dimostrazione del Lemma 4.4.1 può essere iterata: se $u \in C^m(U)$ allora $\bar{u}(x; \cdot) \in C^m([0, \infty))$.

Premettiamo al Teorema 4.4.1 un risultato sul rapporto tra medie sferiche e medie su palle: se ogni media sferica di una funzione u ha il valore di u nel centro della sfera, allora lo stesso vale per le medie su palle, e viceversa.

Lemma 4.4.2 Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in C(U)$. Allora

$$u(x) = \oint_{S(x,r)} u(y) \, dS(y) \quad \forall B(x,r) \subset U \iff u(x) = \oint_{B(x,r)} u(y) \, dy \quad \forall B(x,r) \subset U. \quad (4.26)$$

Dimostrazione. Supponiamo valga (4.26)₁. Passando in coordinate polari abbiamo che

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,r)} u \, dy &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_0^r \left(\int_{S(x,s)} u \, dS \right) ds = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1} \underbrace{\left(\oint_{S(x,s)} u \, dS \right)}_{u(x)} ds \\ &= \frac{n}{r^n} u(x) \int_0^r s^{n-1} ds = u(x), \end{aligned}$$

e dunque vale (4.26)₂. Viceversa, supponiamo valga (4.26)₂. Dal Corollario 1.4.1 si ha che

$$\begin{aligned} \int_{S(x,r)} u \, dS &= \frac{d}{dr} \int_{B(x,r)} u \, dy = \frac{d}{dr} \left(\alpha(n)r^n \underbrace{\oint_{B(x,r)} u \, dy}_{u(x)} \right) = u(x) \frac{d}{dr} (\alpha(n)r^n) \\ &= n\alpha(n)r^{n-1}u(x), \end{aligned}$$

cioè vale (4.26)₁. Il lemma è completamente dimostrato. $\square$

Possiamo ora dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 4.4.1 (Formule di media) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $u \in C^2(U)$ una funzione. Allora u è armonica se e soltanto se per ogni palla $B(x, r) \subset U$ si ha*

$$u(x) = \oint_{S(x, r)} u(y) dS(y). \quad (4.27)$$

Osservazione 4.4.4 Si noti che la (4.27) è vera per ogni funzione al limite $r \rightarrow 0$, a causa di (4.23)₁. Inoltre, (4.27) è soddisfatta da ogni funzione con $u(x^0)$ al posto di $u(x)$, dove $x^0 \in S(x, r)$.

Dimostrazione del Teorema 4.4.1. Supponiamo che u sia armonica; fissiamo $x \in U$ e sia $B(x^0, r^0) \subset U$. Dalla (4.21)₂ deduciamo $\bar{u}_r(x; r) = 0$ per ogni $0 < r \leq r^0$. Perciò $\bar{u}$ è costante nell'intervallo $(0, r^0]$ e dunque, per il Teorema 1.4.2,

$$\bar{u}(x; r) = \lim_{s \rightarrow 0} \bar{u}(x; s) = \lim_{s \rightarrow 0} \oint_{S(x, s)} u dS = u(x), \quad r \in (0, r^0].$$

Viceversa, sia $u \in C^2(U)$ tale che valga (4.27) per ogni $B(x, r) \subset U$. Dunque, comunque fissato $x \in U$, se $B(x, r^0) \subset U$ allora la funzione $\bar{u}(x; \cdot)$ è costante nell'intervallo $(0, r^0]$, cioè $\bar{u}_r(x; r) = 0$ per ogni $r \in (0, r^0]$. Se u non fosse armonica, allora dovrebbe esistere almeno un punto $x^0 \in U$ in cui, ad esempio, $\Delta u(x^0) > 0$. Per continuità si avrebbe $\Delta u(y) > 0$ in tutti i punti y di una palla $B(x^0, r^0) \subset U$ e dunque $\bar{u}_r(x; r) > 0$ da (4.21), in contraddizione con quanto stabilito appena sopra. $\square$

Dal Lemma 4.4.2 segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 4.4.1 *Una funzione $u \in C^2(U)$ è armonica se e soltanto se per ogni palla $B(x, r) \subset U$ si ha*

$$u(x) = \int_{B(x, r)} u(y) dy. \quad (4.28)$$

Esercizio 4.4.2 [10, §2.5-3] Sia $n \geq 3$ e supponiamo che $u \in C^2(B(0, r))$ sia una soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B^o(0, r), \\ u = g & \text{su } S(0, r), \end{cases}$$

dove $f \in C(B^\circ(0, r))$ e $g \in C(S(0, r))$. Modificare la dimostrazione del Teorema 4.4.1 per provare che allora

$$u(0) = \int_{S(0, r)} g \, dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0, r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f \, dx. \quad (4.29)$$

La caratterizzazione dell'armonicità data dal Teorema 4.4.1 ha notevoli conseguenze. Queste verranno esposte nelle sezioni che seguono.

4.4.2 Il principio del massimo

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e consideriamo quindi il compatto $\bar{U}$. Poiché ogni funzione armonica è continua, essa ha massimo e minimo in $\bar{U}$. Dimostriamo ora che i punti di massimo e minimo giacciono sul bordo ∂U di U ; se U è anche connesso, essi non possono essere interni a meno che la funzione non sia costante.

Teorema 4.4.2 (Il principio del massimo) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ una funzione armonica in U . Allora*

$$(i) \max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u;$$

(ii) *se inoltre U è connesso ed esiste $x^0 \in U$ tale che $u(x^0) = \max_{\bar{U}} u$, allora u è costante in U .*

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare (ii).

Sia $M := \max_{\partial U} u$ e consideriamo l'insieme di livello M di u ,

$$\mathcal{L}_M = \{x \in U : u(x) = M\}.$$

L'insieme $\mathcal{L}_M$ non è vuoto in quanto $x^0 \in \mathcal{L}_M$; esso è relativamente chiuso in U poiché u è continua. Proviamo che $\mathcal{L}_M$ è aperto. Sia dunque $x \in U$ e scegliamo $0 < r < \text{dist}(x, \partial U)$, si veda la Figura 4.5; dalla formula di media (4.28) sulle palle deduciamo

$$M = u(x) = \int_{B(x, r)} u(y) \, dy. \quad (4.30)$$

Poiché $u(y) \leq M$ per ogni $y \in U$, e dunque per ogni $y \in B(x, r)$, l'uguaglianza (4.30) implica necessariamente che $u(y) = M$ per ogni $y \in B(x, r)$, poiché u è continua. Pertanto $B(x, r) \subset \mathcal{L}_M$ e così $\mathcal{L}_M$ è aperto. Allora $\mathcal{L}_M$ deve coincidere con U , in quanto U è connesso. Questo dimostra (ii).

Per dimostrare (i), notiamo che la funzione u è continua per ipotesi nel compatto $\bar{U}$, dunque ha massimo in $\bar{U}$. Sia $x^0 \in \bar{U}$ un punto di massimo e

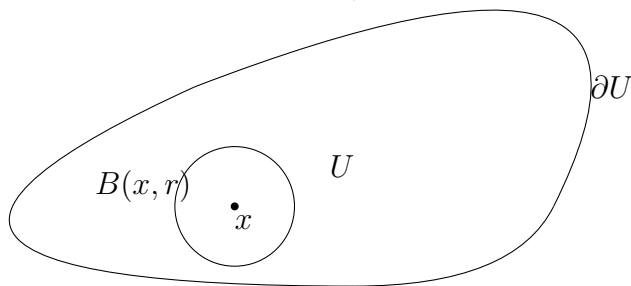


Figura 4.5: Il principio del massimo.

applichiamo il risultato dimostrato in (ii) alla componente connessa U_1 di U contenente x^0 . Se $x^0 \in \partial U_1 \subset \partial U$, allora vale (i). Se $x^0 \in U_1$, allora u è costante in U_1 e dunque, per continuità anche in $\bar{U}_1$; pertanto vale di nuovo (i). Ciò dimostra completamente (i). $\square$

Osservazione 4.4.5 Facciamo alcune osservazioni sul teorema precedente.

- Il punto (i) del Teorema 4.4.2 è chiamato *principio del massimo* per l'equazione di Laplace; esso vale per ogni aperto. Il punto (ii), che vale in aperti connessi, è chiamato *principio del massimo forte*.
- Scambiando u con $-u$, analoghi risultati valgono per il minimo e i punti di minimo:

$$(i) \quad \min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u;$$

- (ii) se U è connesso ed esiste $x^0 \in U$ tale che $u(x^0) = \min_{\bar{U}} u$, allora u è costante in U .

Pertanto, il risultato del teorema si può anche enunciare così:

$$\min_{\partial U} u \leq u(x) \leq \max_{\partial U} u, \quad \text{per ogni } x \in \bar{U}. \quad (4.31)$$

Questo vuol dire che una funzione armonica non può avere un grafico simile né ad un paraboloide convesso (avrebbe un punto di massimo sul bordo ma un punto di minimo interno) né ad un paraboloide concavo (avrebbe un punto di minimo sul bordo ma un punto di massimo interno). Sul bordo devono esserci sia il punto di massimo che quello di minimo. Ad esempio, un piano andrebbe bene (e ovviamente ogni funzione lineare è armonica); più in generale, si pensi alla soluzione fondamentale, si veda la Figura 4.6.

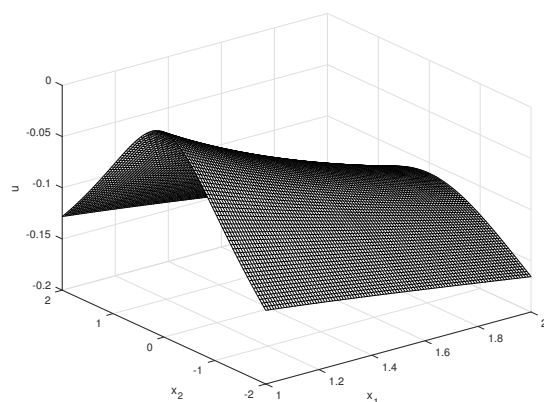


Figura 4.6: Grafico della soluzione fondamentale nel caso $n = 2$ nel rettangolo $[1, 2] \times [-2, 2]$. I punti di massimo e minimo stanno sul bordo del rettangolo.

- Se U non è connesso allora $U = U_1 \cup U_2$, con U_1 e U_2 aperti non vuoti ad intersezione vuota. Evidentemente può essere che u sia costante in U_1 ma non in U_2 . In ogni caso vale (i).

Esercizio 4.4.3 (Una dimostrazione diretta del principio del massimo) [10, §2.5-4] Fornire una dimostrazione *diretta* del principio del massimo.

A questo scopo definire $u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$ per $\epsilon > 0$; calcolare Δu_ϵ .

Esercizio 4.4.4 (Funzioni sub- e superarmoniche) [10, §2.5-5] Una funzione $v \in C^2(U)$ è detta *subarmonica* se $-\Delta v \leq 0$ in U (notare che il prefisso *sub*, relativo al segno di disuguaglianza $\leq$, si riferisce all'operatore $-\Delta$!). Analogamente, una funzione $w \in C^2(U)$ è detta *superarmonica* se $-\Delta w \geq 0$ in U ; ovviamente w è superarmonica se $-w$ è subarmonica.

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso. Provare quanto segue:

(i) se v è subarmonica allora

$$v(x) \leq \int_{B(x,r)} v(y) dy \quad \text{per ogni } B(x,r) \subset U;$$

(ii) $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$;

(iii) se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è regolare e convessa e u armonica, allora $v = \phi(u)$ è subarmonica;

(iv) se u è armonica allora $v = |Du|^2$ è subarmonica;

(v) nei casi (i)–(iii) enunciare gli analoghi risultati per una funzione superarmonica w .

Corollario 4.4.2 (Positività) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso, $g \in C(\partial U)$ tale che $g \geq 0$; sia $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ una soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Se esiste un punto $x^0 \in \partial U$ tale che $g(x^0) > 0$, allora $u(x) > 0$ per ogni $x \in U$.

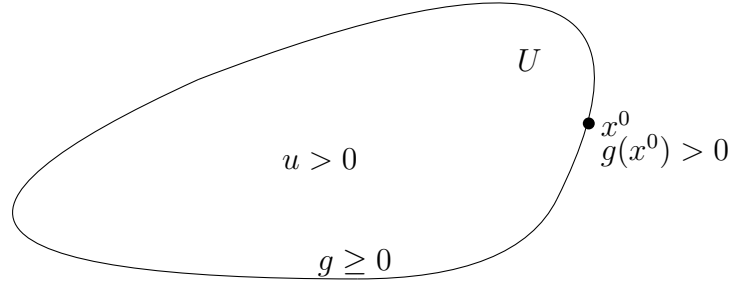


Figura 4.7: Positività di u .

Dimostrazione. Dal Teorema 4.4.2 sappiamo che $\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u = \min_{\partial U} g \geq 0$, dunque $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in U$. Se esistesse $x^0 \in U$ tale che $u(x^0) = 0$, allora x^0 sarebbe un punto di minimo interno per u , dunque u dovrebbe essere identicamente costante e allora uguale a 0. A causa della continuità di u fino al bordo ciò contraddice l'ipotesi $g(x^0) > 0$. $\square$

Osservazione 4.4.6 Se U non fosse connesso allora potrebbe essere $g = 0$ su una componente connessa U_1 e $g(x^0) > 0$ in un punto x^0 dell'altra, U_2 . In tal caso la soluzione sarebbe identicamente nulla su U_1 e strettamente positiva su U_2 .

Ovviamente la sola ipotesi $g \geq 0$ non implica $u \geq 0$: se infatti $g \equiv 0$ allora u può essere sia positiva che negativa (Φ_2), tutta positiva (Φ_n , $n \geq 3$) o tutta negativa ($-\Phi_n$, $n \geq 3$).

Un'altra applicazione del principio del massimo riguarda l'unicità di soluzioni del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U. \end{cases} \quad (4.32)$$

Si noti che non abbiamo ancora dimostrato l'esistenza delle soluzioni a tale problema.

Corollario 4.4.3 (Unicità per il problema di Dirichlet) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $g \in C(\partial U)$ e $f \in C(U)$. Esiste allora al più una soluzione $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ del problema di Dirichlet (4.32).*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo di avere due soluzioni u_1 e u_2 del problema (4.32); definiamo $w = u_1 - u_2$. La funzione w soddisfa allora il problema

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } U, \\ w = 0 & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Da (4.31) si ha $0 = \min_{\partial U} w \leq w(x) \leq \max_{\partial U} w = 0$, dunque $w \equiv 0$ e pertanto $u_1 = u_2$ in $\bar{U}$. $\square$

Esercizio 4.4.5 (Un principio del massimo per un problema di Dirichlet) [10, §2.5-6] Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato e sia $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ una soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Provare che esiste una costante $C > 0$, dipendente solo da U , tale che

$$\max_{\bar{U}} |u| \leq \max_{\partial U} |g| + C \max_{\bar{U}} |f|. \quad (4.33)$$

A tale scopo, posto $\mu = \max_{\bar{U}} |f|$, notare che $-\Delta \left(u + \frac{|x|^2}{2n} \mu \right) \leq 0$ (si confronti con l'Esercizio 4.4.3 e si usi l'Esercizio 4.4.4).

Questo esercizio estende il risultato del Corollario 4.4.3; l'unicità delle soluzioni segue infatti ragionando esattamente come nella dimostrazione del Corollario 4.4.3 (la funzione $w = u_1 - u_2$ soddisfa il problema omogeneo con dati nulli e dalla stima (4.33) segue che $w \equiv 0$). Tuttavia la stima (4.33) precisa in che modo la norma di u dipende da quelle di g e f .

4.4.3 Regolarità delle funzioni armoniche

In questa sezione dimostriamo alcune fondamentali proprietà di regolarità delle funzioni armoniche. Il primo risultato stabilisce che una funzione armonica è di classe C^∞ .

Teorema 4.4.3 (Regolarità C^∞) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $u \in C(U)$ soddisfa la proprietà di media (4.27) (o (4.28)) per ogni $B(x, r) \subset U$, allora $u \in C^\infty(U)$.

Osservazione 4.4.7 Si ricordi che il Teorema 4.4.1 stabilisce che una funzione u di classe C^2 è armonica se e soltanto se valgono le formule di media (4.27) (o (4.28)) per ogni $B(x, r) \subset U$. In effetti, per poter scrivere le formule di media basta che u sia continua. Il Teorema 4.4.3 stabilisce che questa ipotesi di continuità è sufficiente: le proprietà di media implicano allora che u è necessariamente di classe C^∞ .

Dimostrazione del Teorema 4.4.3. Sia η il mollificatore standard introdotto nella Sezione 1.7 e $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$. Cominciamo col dimostrare che $u \equiv u^\epsilon$ in U_ϵ : passiamo in coordinate polari e, poiché η è una funzione radiale, otteniamo, per $x \in U_\epsilon$,

$$u^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y)u(y) dy = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x, \epsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y) dy = \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \left(\int_{S(x, r)} u dS \right) dr.$$

Per le formule di media (4.27) deduciamo

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) n\alpha(n)r^{n-1}u(x) dr = \frac{u(x)}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \left(\int_{S(0, r)} dS \right) dr \\ &= \frac{u(x)}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \int_{S(0, r)} \eta\left(\frac{|y|}{\epsilon}\right) dS(y) dr = \frac{u(x)}{\epsilon^n} \int_{B(0, \epsilon)} \eta\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy = u(x) \end{aligned}$$

per (1.28). Ciò dimostra che $u \equiv u^\epsilon$ in U_ϵ ; per l'arbitrarietà di ϵ ne segue che $u \in C^\infty(U)$.

Nel caso valga (4.28) il risultato segue dal Lemma 4.4.2. $\square$

Corollario 4.4.4 Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Se u è armonica in U allora $u \in C^\infty(U)$.

Osservazione 4.4.8 Il corollario precedente sarà migliorato nel Teorema 4.4.5. Si noti che la regolarità di u nell'aperto U prescinde completamente dalla regolarità della sua traccia al bordo di U . In altri termini, può benissimo capitare che una funzione armonica in U , e dunque di classe $C^\infty(U)$, sia molto meno regolare sul bordo.

Abbiamo pertanto stabilito che se u è armonica allora essa ammette derivate di ogni ordine. E' naturale chiedersi quali informazioni possiamo dedurre

su queste derivate. La risposta è contenuta nel seguente risultato, piuttosto tecnico, di cui non diamo una dimostrazione completa. Come si capisce dall'enunciato, sarà conseguenza delle formule di media.

Teorema 4.4.4 (Stime sulle derivate) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e u una funzione armonica in U . Allora, per ogni palla $B(x^0, r) \subset U$ e ogni multi-indice α con $|\alpha| \leq k$ si ha*

$$|D^\alpha u(x^0)| \leq \frac{C_{n,k}}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x^0, r))}, \quad (4.34)$$

dove

$$C_{n,0} = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_{n,k} = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}, \text{ per } k = 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

Osservazione 4.4.9 Si notino alcune peculiarità della stima (4.34).

- (i) Le *derivate* di u sono controllate (puntualmente) dalla sola norma L^1 di u , a meno di costanti; inoltre le costanti $C_{n,k}$ dipendono da n e da k ma *non* dal raggio della palla.
- (ii) Si noti che

$$\|u\|_{L^1(B(x^0, r))} \leq \alpha(n)r^n \|u\|_{L^\infty(B(x^0, r))}$$

e dunque da (4.34) si arriva alla stima

$$|D^\alpha u(x^0)| \leq \frac{\bar{C}_{n,k}}{r^k} \|u\|_{L^\infty(B(x^0, r))} = \frac{\bar{C}_{n,k}}{r^k} \|u\|_{L^\infty(S(x^0, r))} \quad (4.36)$$

per il principio del massimo, dove

$$\bar{C}_{n,0} = 1, \quad \bar{C}_{n,k} = (2^{n+1}nk)^k, \text{ per } k = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

Dimostrazione del Teorema 4.4.4. Le formule (4.34) e (4.35) sono dimostrate per induzione su k .

- Se $k = 0$, dalle formule di media (4.28) su palle deduciamo

$$u(x^0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x^0, r)} u(x) dx,$$

da cui segue immediatamente (4.34) e (4.35) con $k = 0$.

- Sia ora $k = 1$. La funzione u_{x_i} è certamente armonica per $i = 1, \dots, n$; possiamo dunque applicare ad u_{x_i} la formula di media (4.28) sulla palla di centro x^0 e raggio $r/2$. Sfruttando anche la formula di integrazione per parti (1.23), abbiamo

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x^0)| &= \left| \int_{B(x^0, r/2)} u_{x_i}(x) dx \right| = \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{S(x^0, r/2)} u \nu^i dS \right| \\ &\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \cdot n\alpha(n) \frac{r^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \|u\|_{L^\infty(S(x^0, r/2))} = \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(S(x^0, r/2))}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

D'altro canto, se $x \in S(x^0, r/2)$, da (4.34), (4.35) con $k = 0$ (induzione!) e $r/2$ al posto di r segue

$$|u(x)| \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x, r/2))}, \quad x \in S(x^0, r/2).$$

Ma se $x \in S(x^0, r/2)$, allora $B(x, r/2) \subset B(x^0, r) \subset U$, si veda la Figura 4.8, e dunque

$$u(x) \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x^0, r))}, \quad x \in S(x^0, r/2).$$

Pertanto

$$\|u\|_{L^\infty(S(x^0, r/2))} \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x^0, r))}. \quad (4.39)$$

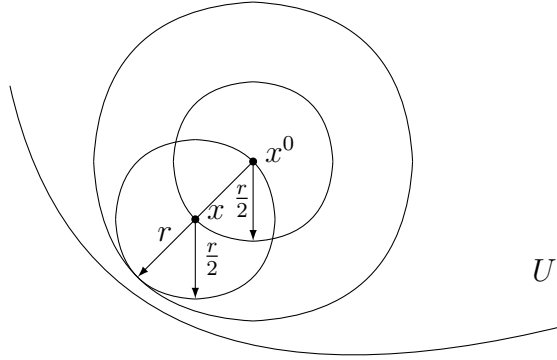


Figura 4.8: Sfere in U .

Da (4.38) e (4.39) segue allora

$$|u_{x_i}(x^0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x^0, r))}.$$

Questo dimostra (4.34) e (4.35) con $k = 1$.

- Se $k \geq 2$ la dimostrazione è analoga; rinviamo a [10, §2.2, Theorem 7] per i dettagli.

□

Il Teorema 4.4.4 ha numerose conseguenze. Una di queste, che si intuisce dalle stime (4.34) e da (4.35), è la seguente, che migliora il Teorema 4.4.3.

Teorema 4.4.5 (Regolarità analitica) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e u una funzione armonica in U . Allora u è analitica in U .*

Dimostrazione. Per dimostrare che u è analitica in U basta dimostrare che, fissato un qualsiasi $x^0 \in U$, allora u è sviluppabile in serie di potenze in un intorno di x^0 . A questo fine, è sufficiente dimostrare che le derivate di u soddisfano, in un intorno di x^0 , delle stime del tipo (si veda [12, §3.4], [27, Proposition 1.2.12], [40])

$$|D^\alpha u(x)| \leq MC^{|\alpha|} \alpha! \quad (4.40)$$

per ogni α , dove M e C sono costanti positive dipendenti dall'intorno ma indipendenti da α .

Sia r abbastanza piccolo in modo che $B(x^0, 2r) \subset U$. Come nella dimostrazione del Teorema 4.4.4, se $x \in B(x^0, r)$ allora $B(x, r) \subset B(x^0, 2r) \subset U$. Si veda la Figura 4.9, che è analoga alla Figura 4.8 ma con r al posto di $r/2$.

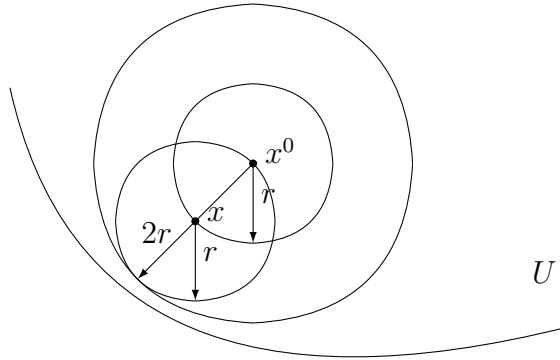


Figura 4.9: Sfere in U .

Dalle formule (4.34) e (4.35) con $|\alpha| = k$ sappiamo che

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x,r))} \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x^0,2r))}$$

per ogni $x \in B(x^0, r)$ e dunque

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u(x)\|_{L^\infty(B(x^0, r))} &\leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x^0, 2r))} = \frac{(2^{n+1}n)^k k^k}{r^k} \underbrace{\frac{\|u\|_{L^1(B(x^0, 2r))}}{\alpha(n)r^n}}_{=:M} \\ &= M \left(\frac{2^{n+1}n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Poiché $|\alpha|^{|\alpha|} \leq (ne)^{|\alpha|} \alpha!$, si veda (1.7), deduciamo allora

$$\|D^\alpha u(x)\|_{L^\infty(B(x^0, r))} \leq M \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha!.$$

Questa stima è esattamente del tipo (4.40) ed il teorema è dimostrato. $\square$

Si noti la differenza tra la dimostrazione del Teorema 4.4.3 di regolarità C^∞ , che fa uso essenzialmente solo delle formule di media, e la dimostrazione del Teorema 4.4.5 di regolarità analitica, che sfrutta informazioni molto precise sulle derivate e si basa sul Teorema 4.4.4.

Il seguente teorema, altra conseguenza del Teorema 4.4.4, stabilisce che una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ non può essere limitata a meno di essere costante.

Teorema 4.4.6 (Liouville) *Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$; se u è limitata allora u è costante.*



Liouville

Dimostrazione. Fissiamo $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e applichiamo il Teorema 4.4.4 a u_{x_i} nella palla $B(x^0, r)$. Otteniamo

$$|u_{x_i}(x^0)| \leq \frac{C_{n,1}}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x^0, r))} \leq \frac{C_{n,1}}{r^{n+1}} \alpha(n) r^n \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \frac{C_{n,1} \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

per $r \rightarrow \infty$ e per ogni $i = 1, \dots, n$. Pertanto $Du(x^0) = 0$ e, per l'arbitrarietà di x^0 , si ha che $Du \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$. Dunque u è costante ($\mathbb{R}^n$ è connesso...). $\square$

Osservazione 4.4.10 Il Teorema 4.4.6 è chiaramente legato all'analogo Teorema di Liouville in Analisi Complessa, che stabilisce che ogni funzione intera (analitica complessa convergente in tutto $\mathbb{C}$) e limitata è costante. Tale risultato è chiaramente falso per funzioni analitiche reali: si pensi alla funzione $\sin$ (che in ambiente complesso non è limitata).

Quale condizione deve soddisfare una funzione analitica in tutto $\mathbb{R}^n$ affinché sia limitata se è costante? Il Teorema 4.4.6 risponde a questa domanda:

è sufficiente che sia armonica (essendo armonica essa deve essere analitica in tutto $\mathbb{R}^n$).

Esercizio 4.4.6 Sia $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa nell'aperto $U \subset \mathbb{C}$. Provare allora che u e v sono armoniche in U (qui stiamo identificando, con un leggero abuso di notazioni, gli insiemi di $\mathbb{C}$ con quelli di $\mathbb{R}^2$).

Il Teorema di Liouville implica che, se $n \geq 3$, l'unica soluzione *limitata* dell'equazione di Poisson $-\Delta u = f \in C_c^2$ in $\mathbb{R}^n$ è $\Phi * f$, a meno di una costante additiva.

Teorema 4.4.7 (Una formula di rappresentazione per l'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$)
Sia $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, con $n \geq 3$. Allora le soluzioni limitate dell'equazione di Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

sono tutte e sole quelle del tipo

$$u = \Phi * f + C, \quad (4.41)$$

per $C \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. La funzione $\bar{u} = \Phi * f$ è di classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ e risolve l'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$ per il Teorema 4.3.1. Cominciamo col dimostrare che $\bar{u}$ è limitata. Infatti $\Phi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ per la Proposizione 4.2.1 e si ha

$$|\bar{u}(x)| \leq \int_{\text{spt}(f)} \Phi(x-y) |f(y)| dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\text{spt}(f)} \Phi(x-y) dy = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{x-\text{spt}(f)} \Phi(z) dz.$$

Se $n \geq 3$, allora $\Phi(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$ e dunque, dalla disuguaglianza di sopra, si ha che $\bar{u}(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, si veda l'Esercizio 4.4.7. Poiché $\bar{u}$ è una funzione continua, ne segue che $\bar{u}$ è limitata.

Sia u un'altra soluzione limitata dell'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$. Allora $w = u - \bar{u}$ è armonica e limitata; per il Teorema di Liouville w deve essere una costante. $\square$

Osservazione 4.4.11 Si noti la presenza della costante nella formula (4.41), che viene annullata dal Laplaciano. Ma anche ogni funzione lineare affine $a \cdot x + b$, con $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, viene annullata dal Laplaciano. Perché non compaiono tali funzioni invece di C nel Teorema 4.4.7? Semplice: se $a \neq 0$ non sono costanti...

Esercizio 4.4.7 Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ tale che $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto. Provare allora che $\|f\|_{L^1(x-K)} \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$.

Osservazione 4.4.12 Nel caso $n = 2$ la soluzione fondamentale $\Phi_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ diverge a $-\infty$ per $|x| \rightarrow \infty$ e la dimostrazione del Teorema 4.4.7 non si applica. In effetti non è difficile convincersi che in generale $\Phi_2 * f$ non è limitata, a causa della crescita del logaritmo.

Un'ultimo risultato di regolarità, in un senso lato, delle funzione armoniche è la disuguaglianza di Harnack, conseguenza anch'essa delle formule di media. Nell'enunciato qui sotto l'aggettivo "positivo" è da intendersi come "maggiore o uguale a 0".



Harnack

Teorema 4.4.8 (Disuguaglianza di Harnack) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset\subset U$ un aperto connesso. Esiste allora una costante positiva C , che dipende solo da V (e da U), tale che per ogni funzione armonica positiva u in U si ha

$$\sup_V u \leq C \inf_V u. \quad (4.42)$$

Osservazione 4.4.13 La disuguaglianza (4.42) è fondamentale e richiede alcuni commenti.

- Sappiamo che V è limitato e connesso e che $u \geq 0$. Se u si annullasse in qualche punto di V allora, dal principio del massimo forte, u dovrebbe essere identicamente nulla in V e dunque, per continuità, in $\bar{V}$. Analogamente, se u si annullasse in un qualche punto $x_0 \in \partial V$, allora u dovrebbe essere identicamente nulla in un aperto limitato e connesso W con $V \subset W \subset U$ in quanto x_0 sarebbe punto interno di W . Di conseguenza, o $u \equiv 0$ in tutto V o $\min_{\bar{V}} u = \inf_V u > 0$.
- Se x, y sono punti arbitrari di V , da (4.42) si ha che

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \sup_V u \leq C \inf_V u \leq C u(y), \\ u(x) &\geq \inf_V u \geq \frac{1}{C} \sup_V u \geq \frac{1}{C} u(y). \end{aligned}$$

Pertanto la disuguaglianza di Harnack implica che (in effetti, è equivalente a)

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y) \quad \text{per ogni } x, y \in V. \quad (4.43)$$

Ricordando che o $u \equiv 0$ o $\inf_V u > 0$ (e dunque u non si annulla mai in V), ciò vuol dire che

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq C \quad \text{per ogni } x, y \in V,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che u è positiva. Si ricordi che la costante C non dipende da u ma solo da V . In altre parole, i valori delle funzioni armoniche in V sono uniformemente confrontabili.

- La disuguaglianza (4.42) è ovviamente falsa se manca l'ipotesi di *positività* delle funzioni. Infatti potrebbe essere $\inf_V u < 0 < \sup_V u$ e allora nessuna costante positiva C potrebbe rendere vera la disuguaglianza (4.42). Ma essenzialmente (4.42) si applica anche a tale funzioni: poiché una funzione armonica è continua, sia $m > 0$ tale che $u + m \geq 0$ sul compatto $\bar{V}$. Deduciamo che $\sup_V(u + m) \leq C \inf_V(u + m)$.

Analogamente, l'ipotesi $V \subset\subset U$ implica che $\bar{V}$ è *compatto*, dunque $\sup_V$ è finito. Se V non fosse limitato la (4.42) potrebbe non essere soddisfatta per nessuna costante $C > 0$: $\sup_V u$ potrebbe non essere finito.

- Lo scopo dell'ipotesi $V \subset\subset U$ serve anche per evitare comportamenti “selvaggi” al bordo di U e per poter applicare le formule di media.
- Un problema interessante è stabilire l'ottimalità della costante C in funzione di V .

Dimostrazione del Teorema 4.4.8. Dimostriamo in effetti la disuguaglianza (4.43), dividendo la dimostrazione in due parti.

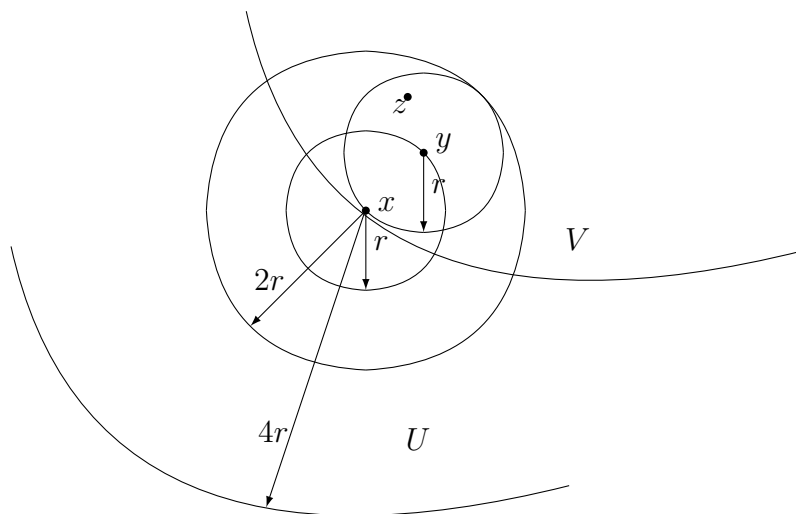
- (i) Sia $r = \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial U)$ e scegliamo $x, y \in V$ con $|x - y| < r$. Poiché $x \in V$ ne segue che $B(x, 2r) \subset U$; inoltre se $z \in B(y, r)$ si ha $|z - x| \leq |z - y| + |y - x| < 2r$ e dunque $B(y, r) \subset B(x, 2r)$. Si veda la Figura 4.10, che è assolutamente analoga alla Figura 4.9.

Dalle formule di media (4.28) e dalla positività di u segue allora che

$$u(x) = \int_{B(x, 2r)} u \, dz \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(y, r)} u \, dz = \frac{1}{2^n} \int_{B(y, r)} u \, dz = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Scambiando x con y arriviamo alla disuguaglianza

$$\frac{1}{2^n} u(y) \leq u(x) \leq 2^n u(y) \quad \text{per } x, y \in V, \quad |x - y| < r. \quad (4.44)$$

Figura 4.10: Sfere in U .

- (ii) Poiché $\bar{V}$ è compatto, esso è ricopribile con un numero finito N di palle aperte B_i di raggio $r/2$. Inoltre, poiché V è connesso, ogni palla B_i ha intersezione non vuota con almeno un'altra palla; se infatti così non fosse, allora

$$B_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{j \neq i} B_j$$

darebbero una sconnessione di V .

Fissiamo ora $x, y \in V$. Poiché V è connesso, allora esso è anche connesso per archi; sia $\Gamma \subset V$ il sostegno di un arco congiungente x con y . L'insieme Γ è ricoperto dalle palle B_i e, per quanto visto sopra, possiamo supporre, a meno di rinumerare le palle, che $x \in B_1$, $y \in B_M$, con $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ per $i = 2, \dots, M \leq N$.

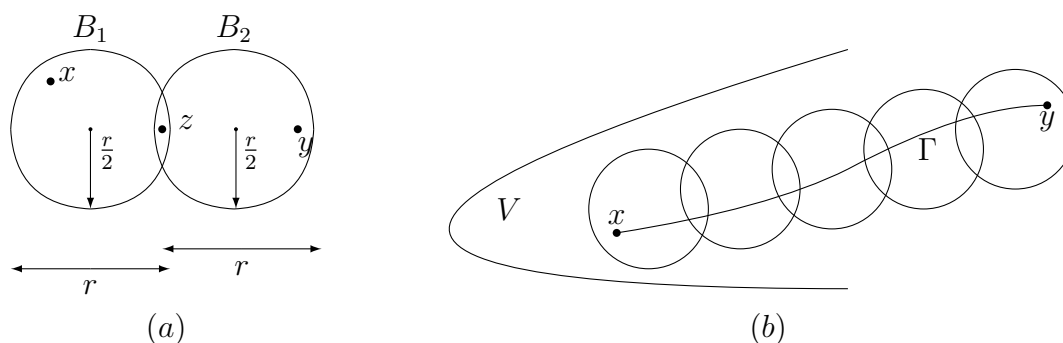
Se $x, y \in B_1$, allora $|x - y| < r$ e (4.44) si applica. Se invece $x \in B_1$ e $y \in B_2$, allora $|x - y| < 2r$. Esiste però per costruzione $z \in B_1 \cap B_2$, e dunque $|x - z| < r$, $|y - z| < r$; si veda la Figura 4.11(a).

Da (4.44) deduciamo (prendiamo per semplicità solo una delle due disuguaglianze; l'altra è evidente per simmetria)

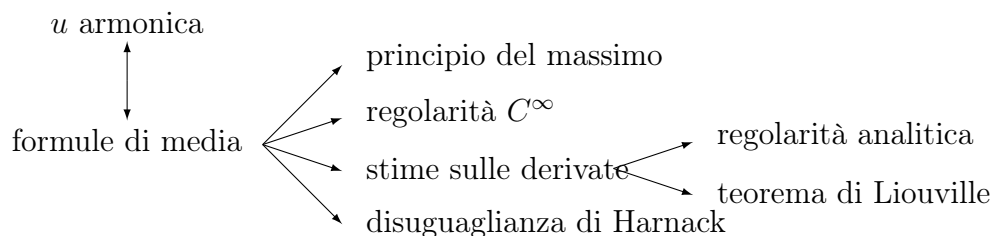
$$u(x) \leq 2^n u(z) \leq 2^n 2^n u(y) = 2^{2n} u(y).$$

Ripetendo questo argomento, si veda la Figura 4.11(b), si trova che vale (4.42) con $C = 2^{nN}$.

□

Figura 4.11: Sfere in V .

A conclusione di questa sezione, riassumiamo in uno schema i principali risultati visti finora sulle funzioni armoniche.



4.5 Il problema di Dirichlet e la funzione di Green

Dopo aver studiato in dettaglio nella sezione precedente le proprietà delle funzioni armoniche e qualche semplice applicazione al problema di Dirichlet, ci concentriamo ora proprio su quest'ultimo. Lo strumento tecnico che ne permetterà la soluzione sarà la funzione di Green.

4.5.1 Il problema di Dirichlet

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto *limitato* con bordo ∂U di classe C^1 e consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U. \end{cases} \quad (4.45)$$

Ricordando l'Osservazione 4.1.2, nel caso u rappresenti un potenziale del campo elettrostatico, la condizione $u = g$ su ∂U corrisponde a imporre un certo valore del potenziale al bordo del dominio che si considera.

Osservazione 4.5.1 Potremmo limitare lo studio del problema (4.45) ai casi in cui $f = 0$ o $g = 0$ e, di più, questi due casi sono più o meno equivalenti. Consideriamo infatti i due problemi

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{in } U, \\ u_1 = 0 & \text{su } \partial U, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{in } U, \\ u_2 = g & \text{su } \partial U. \end{cases} \quad (4.46)$$

Chiaramente se u_1 e u_2 soddisfano (4.46) allora $u = u_1 + u_2$ soddisfa (4.45) per linearità.

Facciamo ora vedere di più, cioè che $(4.46)_1$ e $(4.46)_2$ sono più o meno equivalenti.

Supponiamo infatti di saper risolvere $(4.46)_1$ e sia g definita sul bordo ∂U di U . Se g si può estendere a tutto $\bar{U}$ con una funzione regolare $\tilde{g}$, possiamo allora risolvere il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v = -\Delta \tilde{g} & \text{in } U, \\ v = 0 & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

La funzione $u_2 := \tilde{g} - v$ sarà allora una soluzione di $(4.46)_2$.

Viceversa, supponiamo di saper risolvere $(4.46)_2$. Estendiamo f a tutto $\mathbb{R}^n$ in modo che la sua estensione $\tilde{f}$ sia a supporto compatto e sufficientemente regolare; definiamo $v = \Phi * \tilde{f}$; pertanto $-\Delta v = \tilde{f}$. Sia infine w la soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } U, \\ w = v & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Allora $u_1 := v' - w$ soddisfa $(4.46)_1$.

Tuttavia, per questione di completezza, tratteremo sempre il problema (4.45) nella sua generalità.

4.5.2 Derivazione della funzione di Green

Ritorniamo ora al problema (4.45). Ci aspettiamo, ricordando il Teorema 4.3.1, relativo all'equazione di Poisson, che la soluzione di (4.45) si possa scrivere come la convoluzione di f con la soluzione fondamentale Φ , con qualche termine aggiuntivo che tenga conto del dato al bordo g . Cerchiamo cioè u sotto la forma

$$u = \Phi * f + B(g), \quad (4.47)$$

dove B è un qualche termine dipendente da g e dunque dai dati al bordo. Si noti tuttavia che mentre la convoluzione ha perfettamente senso nel caso del Teorema 4.3.1, in cui f è definita in tutto $\mathbb{R}^n$, qui ne dovremo precisare il senso, in quanto f è definita solo in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Avendo questo come filo conduttore, cerchiamo di dare una motivazione intuitiva su come si possa scrivere la soluzione di (4.45).

Procediamo analogamente alla dimostrazione del Teorema 4.3.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto *limitato* con bordo ∂U di classe C^1 e consideriamo una funzione $u \in C^2(\bar{U})$. Sia $x \in U$ e $\epsilon > 0$ tale che $B(x, \epsilon) \subset U$; denotiamo inoltre

$$V_\epsilon = U \setminus B(x, \epsilon),$$

si veda la Figura 4.12.

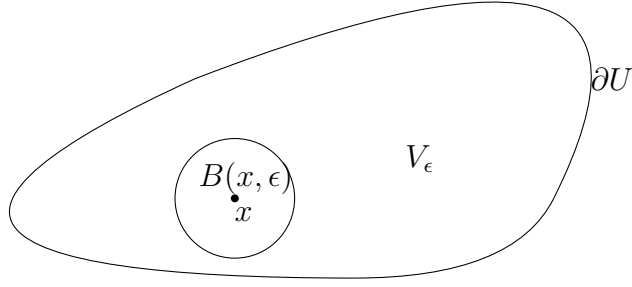


Figura 4.12: La derivazione della funzione di Green.

Applichiamo dunque la terza formula di Green (1.27) a $u(y)$, per il momento una funzione generica, non necessariamente una soluzione di (4.45), e $\Phi(y - x)$ nell'aperto V_ϵ . Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{V_\epsilon} (u(y)\Delta_y\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta_y u(y)) dy &= \int_{\partial V_\epsilon} (u(y)\partial_\nu\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_\nu u(y)) dS(y) \\ &= \left(\int_{\partial U} + \int_{S(x,\epsilon)} \right) (u(y)\partial_\nu\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_\nu u(y)) dS(y), \end{aligned} \quad (4.48)$$

dove ν è il versore normale esterno a ∂V_ϵ . Si noti che abbiamo bisogno di V_ϵ perché $\Delta_y\Phi(x, y)$ non è localmente sommabile in un intorno di x . Facciamo alcuni commenti su questa espressione.

- La funzione $y \rightarrow \Phi(y - x)$ è armonica in V_ϵ , dunque $\Delta_y\Phi(y - x) = 0$.
- Per opportune costanti C_n , $n \geq 2$, abbiamo

$$\max_{S(0,\epsilon)} |\Phi| = \begin{cases} C_2 |\log \epsilon| & \text{se } n = 2, \\ C_n \epsilon^{2-n} & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Pertanto deduciamo, per qualche costante positiva C ,

$$\left| \int_{S(x,\epsilon)} \Phi(y-x)\partial_\nu u(y) dS(y) \right| \leq C\epsilon^{n-1} \max_{B(0,\epsilon)} |\Phi| = o(1) \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.49)$$

- Facciamo il cambiamento di variabili $z = x - y$ e ricordiamo che Φ è radiale; abbiamo

$$\int_{S(x,\epsilon)} u(y) \partial_\nu \Phi(y-x) dS(y) = \int_{S(0,\epsilon)} u(x-z) \partial_\nu \Phi(z) dS(z) \rightarrow u(x)$$

per $\epsilon \rightarrow 0$, a causa della Proposizione 4.2.1 (iii).

Concludendo, l'integrale su $S(x, \epsilon)$ in (4.48) tende a $u(x)$ per $\epsilon \rightarrow 0$; quello su V_ϵ tende ovviamente all'analogo integrale su U . Perciò, da (4.48) deduciamo, passando al limite per $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy &= \int_{\partial U} (u(y) \partial_\nu \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \partial_\nu u(y)) dS(y) + u(x) \\ &= - \int_{\partial U} (\Phi(y-x) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_\nu \Phi(y-x)) dS(y) + u(x) \end{aligned}$$

e infine

$$u(x) = \int_{\partial U} (\Phi(y-x) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_\nu \Phi(y-x)) dS(y) - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy. \quad (4.50)$$

Questa è una formula di rappresentazione *implicita* per *ogni* funzione $u \in C^2(\bar{U})$; è implicita perché u compare anche nei termini di destra. Riassumiamo questo risultato nel seguente lemma.

Lemma 4.5.1 (Una formula di rappresentazione implicita) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo ∂U di classe C^1 e $u \in C^2(\bar{U})$. Allora vale (4.50) per ogni $x \in U$.*

Supponiamo ora che u risolva il problema di Dirichlet (4.45); in tal caso (4.50) si riduce a

$$u(x) = \Phi * f(x) + \int_{\partial U} (\Phi(y-x) \partial_\nu u(y) - g(y) \partial_\nu \Phi(y-x)) dS(y). \quad (4.51)$$

Si confronti la (4.51) con la congettura (4.47). Siamo molto vicini ad una formula di rappresentazione *esplicita* per la soluzione u ; il problema è che, nel termine di destra in (4.51), *non* conosciamo il termine implicito $\partial_\nu u$ sui punti del bordo ∂U di U ! Chiaramente $\partial_\nu u \neq \partial_\nu g$: il termine $\partial_\nu g$ non ha neanche senso, dal momento che g è definita solo sul bordo di U e non in U . Del resto, la funzione $y \mapsto \Phi(y-x)$ non si annulla su ∂U !

L'idea è di aggirare il problema introducendo un *correttore* additivo alla soluzione fondamentale Φ che cancelli tale termine. Ritorniamo dunque a

(4.50) (il termine Δu giocherà un ruolo essenziale) e, fissato $x \in U$, cerchiamo una funzione $\phi^x = \phi^x(y)$ tale che, sostituendo in (4.50) la funzione $\Phi(y - x)$ con la funzione

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y),$$

il termine contenente $\partial_\nu u$ scompare. Se aggiungiamo e togliamo i termini dovuti al contributo di ϕ^x in (4.50) otteniamo

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\partial U} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_\nu G(x, y)) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dy \\ & + \int_{\partial U} (\phi^x \partial_\nu u - u \partial_\nu \phi^x) dS - \int_U \phi^x(y) \Delta u(y) dy. \end{aligned} \quad (4.52)$$

A proposito dell'ultimo addendo a destra, notiamo che, applicando la terza formula di Green (1.27), abbiamo

$$\int_U \phi^x(y) \Delta u(y) dy = \int_U u(y) \Delta \phi^x(y) dy + \int_{\partial U} (\phi^x \partial_\nu u - u \partial_\nu \phi^x) dS.$$

Pertanto, se ϕ^x è armonica, l'ultima riga in (4.52) è identicamente nulla: la struttura della formula (4.50) (o (4.51)) non è cambiata e troviamo

$$u(x) = \int_{\partial U} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - u(y) \partial_\nu G(x, y)) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dy. \quad (4.53)$$

Ma ora abbiamo la possibilità di scegliere G (diversamente a prima, dove avevamo $\Phi(y - x)$). Per eliminare il termine con $\partial_\nu u$ in (4.53) basta che $G(x, y) = 0$ per ogni $x \in U$ e $y \in \partial U$, ovvero che $\Phi(x - y) = \phi^x(y)$ per $x \in U$, $y \in \partial U$. In conclusione, il correttore ϕ^x deve risolvere il seguente problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } U, \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{su } \partial U. \end{cases} \quad (4.54)$$

Si noti che il dato al bordo $\Phi(y - x)$ è regolare su ∂U in quanto $x \in U$; si veda la Figura 4.13. Non abbiamo ancora nessun risultato di esistenza di soluzioni per problemi di Dirichlet del tipo (4.54); anzi, si vedano i Teoremi 4.5.2 e 4.5.3, essi verranno dedotti proprio dalla scelta di opportune funzioni ϕ^x . Invece, dal Corollario 4.4.3 segue che, se ϕ^x esiste, allora essa è unica.

Definizione 4.5.1 (Funzione di Green) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo ∂U di classe C^1 e supponiamo che il problema di Dirichlet (4.54) abbia soluzione ϕ^x . La funzione G di Green per U è

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y), \quad (4.55)$$

definita per ogni $x \in U$, $y \in \bar{U}$ con $x \neq y$.

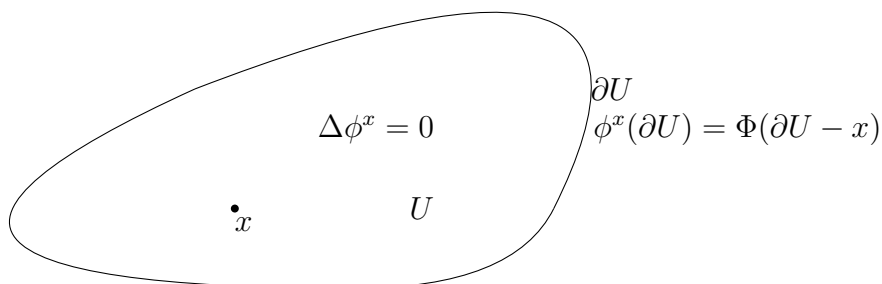


Figura 4.13: Il correttore.

Possiamo dunque riassumere quanto visto nel seguente teorema, che dà una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione del problema (4.45).

Teorema 4.5.1 (La formula di rappresentazione con la funzione di Green)

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo ∂U di classe C^1 e consideriamo due funzioni $f \in C(U)$ e $g \in C(\partial U)$; sia inoltre $u \in C^2(\bar{U})$ una soluzione del problema di Dirichlet (4.45). Se esiste la funzione (4.55) di Green, allora

$$u(x) = \int_U G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial U} g(y) \partial_\nu G(x, y) dS(y), \quad x \in U. \quad (4.56)$$

Si consideri la (4.56). Poiché $G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y)$, l'integrale su U è convergente poiché $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mentre $\phi^x \in C(\bar{U})$, in quanto armonica in U e continua su ∂U . Per quanto riguarda l'integrale su ∂U , il termine $\partial_\nu \Phi(y - x)$ non è singolare se $y \in \partial U$, ma non abbiamo nessuna informazione su $\partial_\nu \phi^x$ al bordo.

Si confronti (4.56) con (4.47): abbiamo dovuto rinunciare al termine $\Phi * f$ per poter determinare esplicitamente il termine al bordo. La formula (4.56) è chiamata *formula di Poisson* e il termine

$$-\partial_\nu G =: K(x, y)$$

è detto *nucleo di Poisson*. Con queste notazioni la (4.56) si scrive

$$u(x) = \int_U G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial U} K(x, y) g(y) dS(y).$$

Il nome di Green è associato a questa formula in quanto egli fu probabilmente il primo ad intuirla, basandosi su considerazioni fisico-matematiche [13, §2 D].

Abbiamo dunque una formula esplicita per una possibile soluzione del problema (4.45), a condizione di poter determinare la funzione di Green.

Questo, a sua volta, equivale a trovare il correttore ϕ^x che risolve (4.54). Una volta determinato il correttore (e allora esso sarà unico), dovremo verificare che (4.56) dà una funzione u regolare, che soddisfa l'equazione $\Delta u = f$ in U e la condizione al bordo $u = g$. Affronteremo questo programma solo nel caso di insiemi U particolarmente semplici.

Osservazione 4.5.2 Ricordando l'Osservazione 4.3.3, abbiamo che la funzione di Green risolve (per ogni $x \in U$ fissato, nel senso delle distribuzioni) il problema al bordo

$$\begin{cases} -\Delta_y G = \delta_x(y) & \text{in } U, \\ G(x, \cdot) = 0 & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Si veda la Figura 4.14.

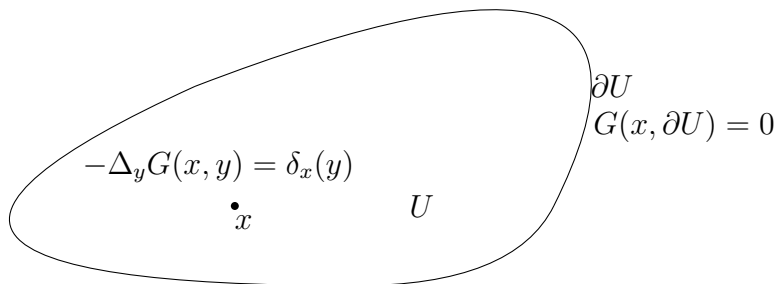


Figura 4.14: La funzione di Green.

Nonostante la funzione Φ sia radiale, e dunque $\Phi(x - y) = \Phi(y - x)$, la funzione di Green parrebbe non simmetrica rispetto alle variabili x e y a causa del correttore ϕ^x . In realtà non è così.

Proposizione 4.5.1 (Simmetria della funzione di Green) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo ∂U di classe C^1 e G la funzione di Green relativa ad U . Allora*

$$G(x, y) = G(y, x)$$

per ogni $x, y \in U$ con $x \neq y$.

Dimostrazione. Per $x, y \in U$ con $x \neq y$ denotiamo

$$v(z) = G(x, z), \quad w(z) = G(y, z).$$

La funzione v è definita in $\bar{U} \setminus \{x\}$ mentre la funzione w è definita per $\bar{U} \setminus \{y\}$. Dobbiamo dimostrare che

$$v(y) = w(x) \quad \text{per ogni } x, y \in U, \quad x \neq y. \quad (4.57)$$

Sappiamo che

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } U \setminus \{x\}, \\ v = 0 & \text{su } \partial U, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } U \setminus \{y\}, \\ w = 0 & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Togliamo quindi da U due intorni di x e y . Sia $\epsilon > 0$ tale che $B(x, \epsilon) \cup B(y, \epsilon) \subset U$ e $B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) = \emptyset$. Definiamo

$$V_\epsilon = U \setminus (B(x, \epsilon) \cup B(y, \epsilon)),$$

si veda la Figura 4.15.

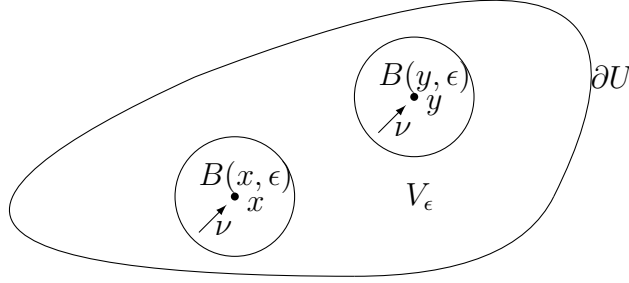


Figura 4.15: La proprietà di simmetria della funzione di Green.

Sfruttiamo ora il fatto che v e w sono armoniche in V_ϵ e che sono nulle al bordo ∂U di U ; applicando la terza formula di Green (1.27) a V_ϵ deduciamo

$$\int_{S(x, \epsilon)} (v \partial_\nu w - w \partial_\nu v) dS(z) = \int_{S(y, \epsilon)} (w \partial_\nu v - v \partial_\nu w) dS(z), \quad (4.58)$$

dove ν è il versore normale *interno* a $S(x, \epsilon) \cup S(y, \epsilon)$.

Consideriamo il primo membro di (4.58).

- Per quanto riguarda il primo addendo, ripetiamo un argomento già usato per dimostrare (4.49). Notiamo che w è regolare in tutta $B(x, \epsilon)$ (poiché $B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) = \emptyset$) e dunque

$$\left| \int_{S(x, \epsilon)} v \partial_\nu w dS(z) \right| \leq C \epsilon^{n-1} \sup_{S(x, \epsilon)} |v|. \quad (4.59)$$

Ma

$$\begin{aligned} \sup_{S(x, \epsilon)} |v| &= \sup_{z \in S(x, \epsilon)} |G(x, z)| \leq \sup_{z \in S(x, \epsilon)} |\Phi(z - x)| + \sup_{z \in S(x, \epsilon)} |\phi^x(z)| = \sup_{z \in S(0, \epsilon)} |\Phi(z)| + O(1) \\ &= O(1) + \begin{cases} C_2 \log |\epsilon| & \text{se } n = 2, \\ C_n \epsilon^{2-n} & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

per $\epsilon \rightarrow 0$, in quanto ϕ^x è armonica, dunque regolare. Pertanto da (4.59) deduciamo che, per $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_{S(x,\epsilon)} v \partial_\nu w \, dS(z) \rightarrow 0.$$

- Per quanto riguarda il secondo addendo, dalla definizione di v possiamo scrivere

$$\int_{S(x,\epsilon)} w \partial_\nu v \, dS(z) = \int_{S(x,\epsilon)} w \partial_\nu \Phi(z-x) \, dS(z) + \int_{S(x,\epsilon)} w \partial_\nu \phi^x \, dS(z).$$

Il primo integrale a destra tende a $w(x)$ per $\epsilon \rightarrow 0$ a causa della Proposizione 4.2.1(iii). Il secondo integrale a destra tende a 0 per $\epsilon \rightarrow 0$ perché la funzione integranda è regolare in $B(x, \epsilon)$.

Concludiamo che il primo membro di (4.58) tende a $w(x)$; per simmetria il secondo membro di (4.58) tende a $v(y)$ e questo dimostra (4.57). $\square$

4.5.3 Il problema di Dirichlet e la funzione di Green in un semispazio

In questa sezione costruiamo la funzione di Green nel caso in cui U è un semispazio. Questo caso non pare compreso nel quadro generale tracciato nella sezione precedente, in quanto un semispazio non è evidentemente limitato. Nondimeno vedremo che la costruzione delineata sopra è possibile e, anzi, il fatto di avere un insieme così semplice faciliterà non poco i calcoli.

Denotiamo allora

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Definizione 4.5.2 Se $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, il suo riflesso rispetto al piano $\{x_n = 0\}$ è il punto $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) = (x', -x_n)$; si veda la Figura 4.16.

Nel caso di un semispazio la costruzione del termine correttore ϕ^x è classica e si basa sul *principio di riflessione della singolarità*. Più precisamente definiamo, per $x, y \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\phi^x(y) := \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y' - x', y_n + x_n).$$

Si noti che la funzione $y \rightarrow \phi^x(y)$ è regolare in $\mathbb{R}_+^n$ in quanto il termine di destra è singolare solo in $\tilde{x} \notin \mathbb{R}_+^n$. Pertanto, fissato $x \in \mathbb{R}_+^n$, la funzione ϕ^x

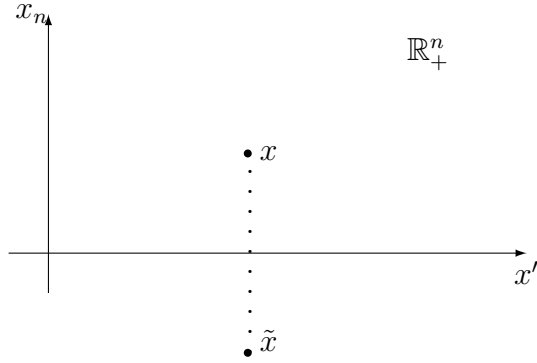


Figura 4.16: Il riflesso $\tilde{x}$ di un punto $x \in \mathbb{R}_+^n$.

risolve il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{su } \{y_n = 0\}, \end{cases} \quad (4.60)$$

in quanto

$$\phi^x(y', 0) = \Phi(y' - x', x_n) = \Phi(y' - x', -x_n) = \Phi(y - x)|_{y_n=0}.$$

Pertanto la funzione di Green per il semispazio $\mathbb{R}_+^n$ è

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}), \quad \text{per } x, y \in \bar{\mathbb{R}}_+^n, \ x \neq y. \quad (4.61)$$

Si noti che vale la proprietà di simmetria $G(x, y) = G(y, x)$ nonostante la Proposizione 4.5.1 non si applichi in quanto $\mathbb{R}_+^n$ non è limitato. Il nucleo di Poisson è, in questo caso,

$$K(x, y) = -\partial_\nu G(x, y) = \partial_{y_n} G(x, y).$$

Lemma 4.5.2 (Il nucleo di Poisson) *Nel caso del semispazio, il nucleo di Poisson K soddisfa*

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \ y \in \partial\mathbb{R}_+^n, \quad (4.62)$$

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dS(y) = 1, \quad x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (4.63)$$

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare (4.62). Si ha $\nu = (0, \dots, 0, -1)$ e dunque da (4.10) (cioè $D\Phi(x) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x}{|x|^n}$) si deduce

$$-\partial_\nu G(x, y) = G_{y_n}(x, y) = \partial_{y_n} (\Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x})) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \left(\frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right),$$

da cui segue (4.62) in quanto $|y - x| = |y - \tilde{x}|$.

La dimostrazione di (4.63) è un po' tecnica ma non difficile: si veda l'Esercizio 4.5.1. $\square$

Si noti che il nucleo di Poisson K è definito solo per $x \in \mathbb{R}_+^n$: se $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$, la frazione che definisce K ha nullo sia il numeratore che il denominatore se $y = x$.

Esercizio 4.5.1 (Integrale del nucleo di Poisson) Provare (4.63). Si confronti con la (4.11). Può essere utile ricordare che [12, §5.9, pag. 220]

$$\frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)} = 2 \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du. \quad (4.64)$$

Consideriamo ora il problema di Dirichlet in un semispazio; per quanto osservato nella Sezione 4.5.1 ci possiamo limitare, per semplicità, al caso in cui $f = 0$, cioè

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g & \text{su } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases} \quad (4.65)$$

In tal caso la formula di Poisson (4.56) si scrive, per $x \in \mathbb{R}_+^n$,

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y). \quad (4.66)$$

Dobbiamo verificare che questa espressione dà in effetti una soluzione di (4.65).

Teorema 4.5.2 (La formula di Poisson per il semispazio) Sia $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ e sia u definita da (4.66). Allora u risolve il problema di Dirichlet (4.65) nel senso che

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$;
- (ii) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}_+^n$;
- (iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in \mathbb{R}_+^n}} u(x) = g(x^0)$ per $x^0 \in \{x_n = 0\}$.

Osservazione 4.5.3 Si noti, da (i), che u è limitata; naturalmente questo non è in contraddizione con il Teorema di Liouville (che vale in tutto $\mathbb{R}^n$). Rivedendo la dimostrazione di quel risultato, si vede che, fissato $x^0 \in \mathbb{R}_+^n$, non possiamo fare il limite per $r \rightarrow \infty$: ad un certo punto la palla $B(x^0, r)$ interseca il piano $\{x_n = 0\}$.

Si noti inoltre che il punto (iii) precisa in che modo sono assunte le condizioni al bordo. In generale, infatti, la funzione u non è definita su $\{x_n = 0\}$. Per rendersene conto, si osservi che il fattore $\frac{2x_n}{n\alpha(n)}$ è evidentemente nullo su tale piano. D'altro canto l'integrale è divergente; infatti g è una funzione limitata e su $x_n = 0$ abbiamo

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y')}{|x'-y'|^n} dy'.$$

Se $g(x') \neq 0$, allora l'integrale di destra diverge nell'intorno di x' . In altri termini, il limite in (iii) si presenta sotto la forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Dimostrazione del Teorema 4.5.2. Poniamo $K(x, y) := -\partial_\nu G(x, y) = -G_{y_n}(x, y)$, come nel Lemma 4.5.2.

(i) Notiamo che, se $x \in \mathbb{R}_+^n$, allora

$$|u(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dS(y) = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})},$$

a causa di (4.63). Perciò $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Per dimostrare che $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, cominciamo col provare che, fissato $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$, la funzione $x \mapsto K(x, y)$ è armonica in $\mathbb{R}_+^n$.

Infatti, dato $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione $y \mapsto G(x, y)$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$; dalla Proposizione 4.5.1 (applicata ad aperti limitati che invadono $\mathbb{R}^n$) allora anche la funzione $x \mapsto G(x, y)$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, fissato $y \in \mathbb{R}^n$, e lo stesso deve valere per $-G_{y_n}(x, y)$ per il Teorema di Schwarz. Pertanto, se $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$, allora la funzione $x \mapsto K(x, y)$ è armonica in $\mathbb{R}_+^n$, dunque $K(\cdot, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$.

Per dimostrare che $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ basta allora far vedere che si può derivare sotto il segno di integrale, ovvero (Teorema di derivazione sotto il segno di integrale) che l'integrale delle derivate della funzione integranda è ancora convergente. Consideriamo allora, per $i = 1, \dots, n-1$ e $x \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x) &= \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_i} \frac{g(y)}{(|x'-y|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} dy \\ &= -\frac{n}{2} \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{(|x'-y|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} 2(x_i - y_i) dy \end{aligned}$$

e perciò

$$|u_{x_i}(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|x_i - y_i|}{(|x'-y|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} dy.$$

L'integrale a secondo membro converge al finito perché $x_n \neq 0$ e all'infinito per gli usuali criteri di convergenza degli integrali. La convergenza dell'integrale relativo a u_{x_n} è analoga, in quanto

$$u_{x_n}(x) = \frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{(|x' - y|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} dy - \frac{2x_n^2}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{(|x' - y|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}} dy.$$

Per le derivate successive si itera questo argomento. Perciò $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ e questo dimostra (i).

(ii) Questo punto segue dalla derivabilità di u e dal fatto che, fissato $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$, la funzione $x \mapsto K(x, y)$ è armonica in $\mathbb{R}_+^n$.

(iii) Fissiamo $x^0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ e $\epsilon > 0$; poiché g è continua in x^0 , esiste allora $\delta > 0$ tale che

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon \quad \text{se } |y - x^0| < \delta, \quad y \in \partial\mathbb{R}_+^n. \quad (4.67)$$

Se $x \in \mathbb{R}_+^n$ (si veda la Figura 4.17), si ha, per l'Esercizio 4.5.1,

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x^0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) [g(y) - g(x^0)] dS(y) \right| \\ &\leq \left(\int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cap B(x^0, \delta)} + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(x^0, \delta)} \right) K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dS(y) \\ &=: I + J. \end{aligned}$$

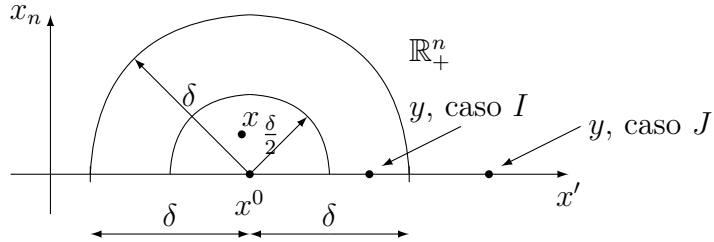


Figura 4.17: Per la dimostrazione della condizione al bordo.

Per quanto riguarda I notiamo che da (4.67) e (4.63) segue

$$I \leq \epsilon \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dS(y) = \epsilon.$$

Per quanto riguarda J notiamo che se $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ e $|y - x^0| \geq \delta$ allora

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|$$

e dunque

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0| \quad \text{se} \quad |x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |y - x^0| \geq \delta. \quad (4.68)$$

Perciò si deduce

$$\begin{aligned} J &\leq 2 \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(x^0, \delta)} K(x, y) dS(y) = \frac{2^2 x_n \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(x^0, \delta)} \frac{1}{|x - y|^n} dS(y) \\ &\leq \frac{2^{n+2} x_n \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}}{n\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B'(x^0, \delta)} \frac{1}{|y - x^0|^n} dy, \end{aligned}$$

dove abbiamo denotato con $B'(x^0, \delta)$ la palla in $\mathbb{R}^{n-1}$ di centro x^0 e raggio δ . Si noti che l'integrale a destra è *convergente* (senza la rimozione della palla non lo sarebbe stato, si veda l'Osservazione 4.5.3); pertanto $J \rightarrow 0$ per $x_n \rightarrow 0+$.

Pertanto $|u(x) - g(x^0)| < 2\epsilon$ se $|x - x^0|$ è abbastanza piccolo e questo dimostra il punto (iii).

Il Teorema è allora completamente dimostrato. $\square$

Osservazione 4.5.4 Si noti con attenzione la stima fatta per J nella dimostrazione del Teorema 4.5.2. Se avessimo stimato in maniera grossolana

$$J \leq 2 \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \setminus B(x^0, \delta)} K(x, y) dS(y) \leq 2 \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})},$$

come avevamo fatto per I , non avremmo ottenuto che $J \rightarrow 0$. Il punto essenziale è stato quello di riconoscere che in

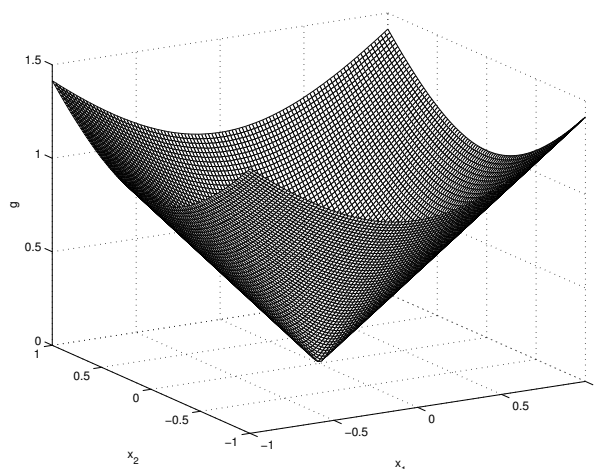
$$K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x - y|^n}$$

il secondo fattore in J non dà luogo ad un integrale divergente se x è vicino a 0 e y abbastanza lontano da 0, mentre il primo fattore tende a 0.

Esercizio 4.5.2 [10, §2.5-9] Sia u la soluzione del problema di Dirichlet (4.65) data dalla formula di Poisson (4.66). Supponiamo che g sia limitata e $g(x) = |x|$ per $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$, $|x| \leq 1$, si veda la Figura 4.18. Stimando il rapporto incrementale

$$\frac{u(h e_n) - u(0)}{h}$$

dimostrare allora che Du non è limitato in un intorno di $x = 0$.

Figura 4.18: Grafico della funzione g nel caso $n = 3$.

4.5.4 Il problema di Dirichlet e la funzione di Green in una palla

In questa sezione costruiamo la funzione di Green nel caso in cui U sia la palla $B(0, r)$. Il procedimento è analogo a quello impiegato nel caso del semispazio, anche se ora la riflessione avverrà attraverso la sfera $S(0, r)$. Per cominciare consideriamo il caso $r = 1$.

Definizione 4.5.3 Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; il punto

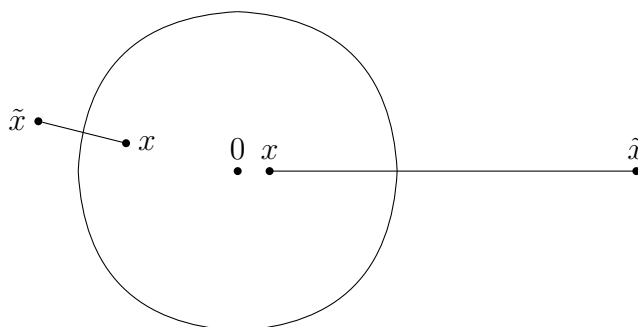
$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

è detto il punto duale di x rispetto alla sfera $S(0, 1)$. La funzione $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definita da $\mathcal{I}(x) = \tilde{x}$, è l'inversione attraverso la sfera $S(0, 1)$.

Osservazione 4.5.5 Si noti che l'applicazione $\mathcal{I}(x) = \tilde{x}$ è radiale e *conforme*, cioè conserva gli angoli; in particolare, la sfera di centro l'origine e raggio r è mappata sulla sfera di raggio $1/r$; i punti della sfera $S(0, 1)$ sono punti fissi dell'applicazione $\mathcal{I}$. La palla aperta privata dell'origine $B^\circ(0, 1) \setminus \{0\}$ è mappata nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$. Nel caso $n = 1$ si ha che $\mathcal{I}(x) = \frac{1}{x}$.

In questo caso il termine correttore ϕ^x introdotto in (4.54) deve soddisfare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } B^\circ(0, 1), \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{su } S(0, 1). \end{cases} \quad (4.69)$$

Figura 4.19: Il duale $\tilde{x}$ di un punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Come nel caso del semispazio, cerchiamo di dedurre ϕ^x tramite un principio di riflessione della singolarità. Diversamente dal caso del semispazio, la scelta $\phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$ non va bene. Infatti la funzione $y \mapsto \Phi(y - \tilde{x})$ è ancora chiaramente armonica in $B^\circ(0, 1)$ se $x \in B^\circ(0, 1) \setminus \{0\}$, ma il dato al bordo non è assunto: in generale

$$\phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x}) \neq \Phi(y - x) \quad \text{se } y \in S(0, 1), \quad x \in B(0, 1)^\circ \setminus \{0\},$$

poiché Φ è radiale e $|y - \tilde{x}| \neq |y - x|$, si veda la Figura 4.20. Pertanto la congettura $\phi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$ deve essere modificata. Tuttavia si noti che, se $y = x/|x|$, allora

$$|y - \tilde{x}| = \left| \frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|^2} \right| = \frac{1}{|x|} \left| x - \frac{x}{|x|} \right| = \frac{1}{|x|} |y - x|. \quad (4.70)$$

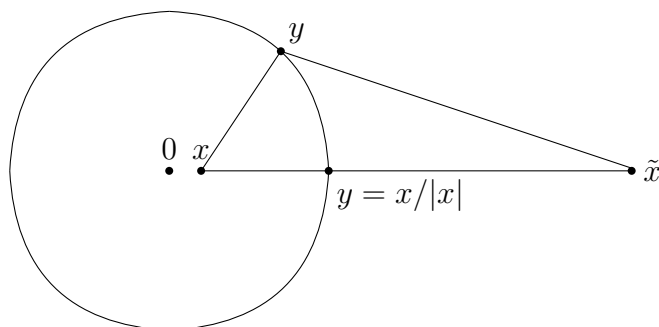


Figura 4.20: L'applicazione di inversione.

E' vera la (4.70) per un qualsiasi $y \in S(0, 1)$?

Lemma 4.5.3 Per qualsiasi $y \in S(0, 1)$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vale

$$|y - \tilde{x}| = \frac{1}{|x|} |y - x|. \quad (4.71)$$

Dimostrazione. Poiché $|y| = 1$ si ha

$$\begin{aligned} |y - \tilde{x}|^2 &= (y - \tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) = 1 - 2y \cdot \frac{x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2} (|x|^2 - 2y \cdot x + 1) \\ &= \frac{1}{|x|^2} (y - x) \cdot (y - x) = \frac{1}{|x|^2} |y - x|^2. \end{aligned}$$

□

Pertanto, se modifichiamo la congettura di sopra scegliendo

$$\phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})), \quad (4.72)$$

allora $\phi^x(y) = \Phi(y - x)$ quando $y \in S(0, 1)$. Tuttavia, definendo ϕ^x come in (4.72), abbiamo un problema: la funzione $\Phi(|x|(y - \tilde{x}))$ è definita solo quando $x \neq 0$! Osserviamo però che tale funzione si scrive, a meno di costanti e a meno di elevare alla potenza $n - 2$, come

$$\frac{1}{|x||y - \tilde{x}|} = \frac{1}{|x| \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|} = \frac{1}{\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right|}.$$

Fissato $y \neq 0$ (la funzione di Green è definita per $x \neq y$), questa espressione ha limite 1 se $x \rightarrow 0$, cioè $\Phi(|x|(y - \tilde{x}))$ può essere prolungata con continuità a $x = 0$ dandole il valore 1. Questo definisce pertanto ϕ^x per ogni $x \in B^\circ(0, 1)$; si noti che le proprietà di ϕ^x , come funzione della variabile y , non sono cambiate.

Ovviamente la funzione $\phi^x(y)$ definita in (4.72) è armonica per $y \in B^\circ(0, 1)$, fissato $x \in B^\circ(0, 1)$: l'argomento è stato moltiplicato per un termine costante in y .

Giungiamo alla conclusione che la funzione di Green per la palla $B^\circ(0, 1)$ è

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})), \quad \text{per } x, y \in B^\circ(0, 1), \ x \neq y. \quad (4.73)$$

Lemma 4.5.4 *Nel caso della palla, il nucleo di Poisson K soddisfa*

$$K(x, y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} \quad \text{per } x \in B^\circ(0, 1), \ y \in S(0, 1), \quad (4.74)$$

$$\int_{S(0, 1)} K(x, y) dS(y) = 1, \quad \text{per } x \in B^\circ(0, 1). \quad (4.75)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $K(x, y) = -\partial_\nu G(x, y)$. Incominciamo col dimostrare (4.74). Consideriamo

$$G_{y_i}(x, y) = \partial_{y_i} \left[\Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})) \right].$$

Dalla (4.10) e dal Lemma 4.5.3 deduciamo, per $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \partial_{y_i} \Phi(y - x) &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^n}, \\ \partial_{y_i} \Phi(|x|(y - \tilde{x})) &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|x|(y_i - \tilde{x}_i)}{(|x||y - \tilde{x}|)^n} |x| = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^2 y_i - x_i}{|y - x|^n}. \end{aligned}$$

Se $y \in S(0, 1)$ si ha $\nu(y) = y$; dunque, per $y \in S(0, 1)$ e $x \in B^\circ(0, 1)$, si deduce

$$-\partial_\nu G(x, y) = -\sum_{i=1}^n y_i G_{y_i}(x, y) = \frac{1}{n\alpha(n)|x - y|^n} \sum_{i=1}^n y_i (y_i - x_i - (|x|^2 y_i - x_i)),$$

da cui segue (4.74).

Proviamo ora (4.75). La dimostrazione può evitare il calcolo esplicito fatto nell'Esercizio 4.5.1 tramite il seguente trucco [13, §2 G]. Si ha che

$$K(0, y) = \frac{1}{n\alpha(n)}, \quad y \in S(0, 1). \quad (4.76)$$

Del resto, la funzione $x \rightarrow K(x, y)$ è armonica in $B^\circ(0, 1)$, per $y \in S(0, 1)$; questo può essere provato per calcolo diretto o ragionando come nella dimostrazione del Teorema 4.5.2. Pertanto, da (4.76) e dalla formula di media sferica otteniamo, per ogni $r \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} 1 &= n\alpha(n)K(0, y) = n\alpha(n) \int_{S(0, r)} K(x, y) dS(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S(0, r)} K(x, y) dS(x) \\ &= \int_{S(0, 1)} K(rz, y) dS(z), \end{aligned} \quad (4.77)$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di variabile $x = rz$. Consideriamo ora $y \in S(0, 1)$; pertanto $|z| = |y| = 1$. Abbiamo che, per $y, z \in S(0, 1)$,

$$K(rz, y) = \frac{1 - r^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|rz - y|^n}.$$

Dalla (4.71) con $x = rz$ si deduce che

$$|rz - y| = |ry - z|.$$

Pertanto

$$K(rz, y) = \frac{1 - r^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|ry - z|^n} = K(ry, z).$$

Da (4.77) deduciamo allora

$$1 = \int_{S(0,1)} K(ry, z) dS(z), \quad y \in S(0, 1).$$

e dunque, per $x = ry \in S(0, r)$, con $r \in (0, 1)$,

$$1 = \int_{S(0,1)} K(x, z) dS(z), \quad x \in B^\circ(0, 1).$$

Questo prova (4.75). $\square$

In conclusione, la formula di Poisson (4.56) per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^\circ(0, 1), \\ u = g_1 & \text{su } S(0, 1), \end{cases} \quad (4.78)$$

si scrive allora

$$u_1(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{S(0,1)} \frac{g_1(y)}{|x - y|^n} dS(y). \quad (4.79)$$

Cosa cambia nel caso del problema di Dirichlet per la palla $B(0, r)$? Si tratta del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^\circ(0, r), \\ u = g & \text{su } S(0, r). \end{cases} \quad (4.80)$$

Supponiamo che u sia una soluzione di (4.80); allora si vede subito che $u_1(x) := u(rx)$ risolve (4.78) con $g_1(x) := g(rx)$ e $x \in B^\circ(0, 1)$. Pertanto, da (4.79) si ha

$$u(rx) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{S(0,1)} \frac{g(ry)}{|x - y|^n} dS(y), \quad x \in B^\circ(0, 1). \quad (4.81)$$

Se consideriamo $x \in B^\circ(0, r)$, allora $\frac{x}{r} \in B^\circ(0, 1)$ e deduciamo da (4.81)

$$u(x) = \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r}\right)^2}{n\alpha(n)} \int_{S(0,1)} \frac{g(ry)}{\left|\frac{x}{r} - y\right|^n} dS(y), \quad x \in B^\circ(0, r).$$

Se infine in questa espressione facciamo il cambiamento di variabili $ry = z$ come in (1.18), otteniamo

$$u(x) = \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r}\right)^2}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{S(0,r)} \frac{g(z)}{\left|\frac{x}{r} - \frac{z}{r}\right|^n} dS(z)$$

e quindi

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{S(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y), \quad x \in B^\circ(0,r). \quad (4.82)$$

In altre parole, il nucleo di Poisson per la palla di centro l'origine e raggio r è

$$K_r(x, y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x-y|^n}, \quad x \in B^\circ(0,r), \quad y \in S(0,r).$$

Si noti che $K_1 = K$ nelle precedenti notazioni.

Esercizio 4.5.3 Provare che

$$\int_{S(0,r)} K_r(x, y) dS(y) = 1, \quad x \in B^\circ(0,r).$$

Possiamo finalmente concludere con la soluzione del problema di Dirichlet (4.80).

Teorema 4.5.3 (La formula di Poisson per la palla) *Sia $g \in C(S(0,r))$ e sia u definita da (4.82). Allora*

- (i) $u \in C^\infty(B(0,r))$;
- (ii) $\Delta u = 0$ in $B^\circ(0,r)$;
- (iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in B^\circ(0,r)}} u(x) = g(x^0)$ per $x^0 \in S(0,r)$.

La dimostrazione è completamente analoga a quella del Teorema 4.5.2 e quindi è omessa. In particolare, dall'Esercizio 4.5.3 si deduce che

$$\|u\|_{L^\infty(B(0,r))} \leq \|g\|_{L^\infty(S(0,r))}$$

Si noti che anche in questo caso valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nell'Osservazione 4.5.3.

Esercizio 4.5.4 [10, §2.5-7] Usare la formula di Poisson per la palla per dimostrare che se u è una funzione positiva e armonica in $B^\circ(0,r)$, allora

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0), \quad \text{per ogni } x \in B^\circ(0,r).$$

Questa formula può essere interpretata come una versione esplicita della disuguaglianza di Harnack.

Esercizio 4.5.5 (La trasformata di Kelvin per l'equazione di Laplace)

[10, §2.5-11] Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e indichiamo $\mathcal{I}(x) = \tilde{x} = x/|x|^2$ l'applicazione di inversione sferica. Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; la *trasformata di Kelvin* $\mathcal{K}u = \tilde{u} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ di u è definita da

$$\tilde{u}(x) = u(\tilde{x})|\tilde{x}|^{n-2} = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)|x|^{2-n}.$$

(i) Provare che $D_x \tilde{x} (D_x \tilde{x})^T = |\tilde{x}|^4 \text{Id}$.

(ii) Provare che se $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è un aperto e u è armonica in U , allora $\tilde{u}$ è armonica in $\mathcal{I}(U)$.

4.6 Metodi dell'energia: il principio di Dirichlet

Nella sezione precedente abbiamo utilizzato delle rappresentazioni *esplicite* delle soluzioni per dedurre delle proprietà; esse erano basate sulla funzione di Green che, a sua volta, sfruttava la soluzione fondamentale. Tra i molti altri metodi che si possono sfruttare per studiare l'equazione di Laplace (trasformata di Fourier, sopra- e sotto-soluzioni) introduciamo in questa breve sezione il cosiddetto *metodo dell'energia*. Benché a tale espressione si possa dare un senso fisico, in questo contesto è da intendersi come una tecnica che usa in maniera essenziale lo spazio L^2 e la sua struttura di spazio di Hilbert.

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con ∂U di classe C^1 . Abbiamo già dimostrato nel Corollario 4.4.3 che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U, \end{cases} \quad (4.83)$$

ha al più una soluzione $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ se f e g sono continue. Quel risultato era una semplice conseguenza del principio del massimo. Vediamo adesso una dimostrazione alternativa sotto ipotesi leggermente più restrittive (u , g ed f sono un po' più regolari, il bordo di U è di classe C^1).

Proposizione 4.6.1 (Unicità per il problema di Dirichlet) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe C^1 , $g \in C^2(\partial U)$ e $f \in C(\bar{U})$. Esiste allora al più una soluzione $u \in C^2(\bar{U})$ del problema di Dirichlet (4.83).*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo di avere due soluzioni u_1 e u_2 di (4.83) e poniamo $w = u_1 - u_2$. Allora $w \in C^2(\bar{U})$ risolve il problema di

Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } U, \\ u = 0 & \text{su } \partial U. \end{cases}$$

Poiché per ipotesi $w_{x_i} \in C^1(\bar{U})$, possiamo utilizzare la formula (1.24) di integrazione per parti e dedurre

$$0 = \int_U w \Delta w \, dx = \sum_{i=1}^n \int_U w w_{x_i x_i} \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_U w_{x_i} w_{x_i} \, dx + \int_{\partial U} w w_{x_i} \nu^i \, dS = - \int_U |Dw|^2 \, dx, \quad (4.84)$$

poiché w è armonica e nulla al bordo di U . Allora $Dw \equiv 0$ in U e dunque w è costante in ogni componente connessa di U ; poiché però w è nulla sul bordo di U , ne segue che $w \equiv 0$ in U . $\square$

L'applicazione però più significativa dei metodi di energia riguarda il *principio di Dirichlet*. A questo proposito introduciamo il problema di Dirichlet non omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \partial U, \end{cases} \quad (4.85)$$

e definiamo il *funzionale di energia*

$$\mathcal{I}[w] = \int_U \left(\frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \right) dx.$$

Il termine dato ad $\mathcal{I}$ può essere giustificato osservando che se $E = -Du$ è un campo elettrostatico con potenziale u , allora l'energia potenziale in U è

$$\int_U |Du|^2 \, dx.$$

Introduciamo anche l'insieme dei valori ammissibili $\mathcal{A}$ in cui faremo variare w :

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{U}) : w = g \text{ su } \partial U\}.$$

Enunciamo ora il risultato più importante di questa sezione.

Teorema 4.6.1 (Il principio di Dirichlet) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con ∂U di classe C^1 .*

(i) *Se $u \in C^2(\bar{U})$ risolve il problema di Dirichlet (4.85), allora*

$$\mathcal{I}[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} \mathcal{I}[w]. \quad (4.86)$$

(ii) Viceversa, se u soddisfa (4.86) allora risolve il problema di Dirichlet (4.85).

Osservazione 4.6.1 Il risultato precedente stabilisce pertanto un collegamento tra le Equazioni a Derivate Parziali e il Calcolo delle Variazioni, il cui scopo è lo studio dei minimi di funzionali. In altre parole, la soluzione del problema di Dirichlet (4.85) è quella funzione che minimizza l'“energia” $\mathcal{I}$; viceversa, la funzione che realizza il minimo di quel funzionale risolve anche il problema di Dirichlet (4.85).

Dimostrazione del Teorema 4.6.1. Dividiamo la dimostrazione in due parti.

(i) Sia u la soluzione di (4.85) e $w \in \mathcal{A}$ una funzione ammissibile; notiamo che $u \in \mathcal{A}$. Pertanto, se dimostriamo che

$$\mathcal{I}[u] \leq \mathcal{I}[w], \quad (4.87)$$

allora abbiamo dimostrato (4.86). L'idea è di sfruttare ancora l'integrazione per parti come abbiamo fatto nella dimostrazione della Proposizione 4.6.1. Poiché u e w hanno lo stesso valore al bordo, consideriamo allora l'uguaglianza analoga a (4.84) e integriamo per parti usando (1.24):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U (u - w)(-\Delta u - f) \, dx = - \int_U (u - w)\Delta u \, dx - \int_U (u - w)f \, dx \\ &= \int_U D(u - w) \cdot Du \, dx - \int_U (u - w)f \, dx = \int_U (D(u - w) \cdot Du - (u - w)f) \, dx. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_U (|Du|^2 - uf) \, dx = \int_U (Du \cdot Dw - wf) \, dx. \quad (4.88)$$

Il primo addendo a secondo membro può essere stimato usando la disuguaglianza di Cauchy

$$|a \cdot b| \leq |a| |b| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2, \quad a, b \in \mathbb{R}^n,$$

e da (4.88) si ottiene

$$\int_U (|Du|^2 - uf) \, dx \leq \int_U \frac{1}{2}|Du|^2 \, dx + \int_U \left(\frac{1}{2}|Dw|^2 - wf \right) \, dx.$$

Da questa disuguaglianza segue immediatamente

$$\int_U \left(\frac{1}{2}|Du|^2 - uf \right) \, dx \leq \int_U \left(\frac{1}{2}|Dw|^2 - wf \right) \, dx,$$

cioè (4.87).

(ii) Supponiamo ora che valga (4.86); dobbiamo dimostrare che u risolve (4.85). Poiché $u \in \mathcal{A}$, ne segue che il dato al bordo è assunto, e resta da dimostrare che $-\Delta u = f$. In questa parte della dimostrazione utilizziamo un procedimento classico del Calcolo delle Variazioni.

Sia $v \in C_c^\infty(U)$ e introduciamo la *variazione* del funzionale $\mathcal{I}$, cioè la funzione $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$i(\tau) = \mathcal{I}[u + \tau v].$$

Poiché $u \in \mathcal{A}$ e v è nulla su ∂U , ne segue che $u + \tau v \in \mathcal{A}$ per ogni τ ; l'ipotesi (4.86) implica allora che la funzione i ha un minimo in 0. Se dimostriamo che la i è derivabile allora deduciamo dal Teorema di Fermat che

$$i'(0) = 0. \quad (4.89)$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} &= \frac{1}{\tau} \left(\int_U \left(\frac{1}{2} |Du + \tau Dv|^2 - (u + \tau v)f \right) dx - \int_U \left(\frac{1}{2} |Du|^2 - uf \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\int_U \left(\frac{1}{2} |Du|^2 + \tau Du \cdot Dv + \frac{\tau^2}{2} |Dv|^2 - (u + \tau v)f \right) dx - \int_U \left(\frac{1}{2} |Du|^2 - uf \right) dx \right) \\ &\rightarrow \int_U (Du \cdot Dv - vf) dx \quad \text{per } \tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque i è derivabile in 0 e allora, da (4.89) e dalla seconda formula di Green (1.26) si ottiene

$$0 = i'(0) = \int_U (Du \cdot Dv - vf) dx = \int_U (-\Delta u - f) v dx,$$

perché v è nulla su ∂U . Poiché la funzione $v \in C_c^\infty(U)$ era completamente arbitraria, deduciamo che $-\Delta u = f$ in U , si veda l'Esercizio 4.6.1. Dunque u soddisfa (4.85).

□

Esercizio 4.6.1 Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f \in C(U)$. Provare che se

$$\int_U f v dx = 0$$

per ogni funzione $v \in C_c^\infty(U)$, allora $f \equiv 0$.

4.7 Approfondimenti

Il p -Laplaciano. Il p -Laplaciano, per $1 \leq p < \infty$, è definito come

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

L'equazione “di Poisson” relativa,

$$-\Delta_p u = f(u),$$

modellizza il comportamento stazionario di alcuni fluidi particolari (fluidi non Newtoniani). Si tratta di una equazione quasi-lineare se $p \neq 2$, che si riduce all'usuale Laplaciano se $p = 2$. Alcune (poche) proprietà del Laplaciano si estendono anche a questa equazione. In generale, però, le soluzioni dell'equazione omogenea $-\Delta_p u = 0$ non saranno neanche di classe C^∞ . Si veda [32] per maggiori informazioni.

Le equazioni di Stokes. Un sistema di equazioni importanti in fluidodinamica sono le equazioni di Stokes. In un aperto limitato U di $\mathbb{R}^n$ esse sono

$$\begin{cases} \Delta v = \nabla p + f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Esse sono ottenute da una opportuna linearizzazione delle equazioni di Navier-Stokes. Qui sopra $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ rappresenta un campo di velocità, p una pressione, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una forza esterna. Tali equazioni sono spesso associate a condizioni di Dirichlet al bordo:

$$v = g \quad \text{su } \partial U.$$

Per maggiori dettagli si veda [14].

Capitolo 5

L'equazione del calore

In questo capitolo studieremo l'equazione del calore, detta anche equazione di diffusione, equazione di Fick o equazione di Fourier. Seguiremo al solito il testo di Evans [10]; maggiori informazioni si trovano in [5], nel caso di una dimensione di spazio, e, nel caso di più variabili spaziali, in [13, 24, 48].



Fourier

5.1 Introduzione

L'*equazione del calore* è l'equazione a derivate parziali

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{5.1}$$

o, più in generale, la sua versione non omogenea

$$u_t - \Delta u = f. \tag{5.2}$$

Qui sopra e nel seguito $t \in (0, \infty)$ è una variabile temporale e $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, con U aperto, una variabile spaziale. La funzione incognita è $u : \bar{U} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e Δ rappresenta il Laplaciano nella variabile x . La funzione $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è supposta data.

A causa della forma particolare dell'equazione (5.1) si potrebbe congetturare che molte proprietà delle funzioni armoniche vengano ereditate dall'equazione del calore; in effetti, le soluzioni stazionarie dell'equazione (5.1), cioè indipendenti dal tempo, devono essere armoniche. Questo principio è in generale vero, anche se con qualche cautela. La ragione è che il termine u_t , essendo di ordine più basso rispetto al Laplaciano, non “disturba” troppo il Laplaciano stesso.

Esempio 5.1.1 (Un'interpretazione fisica dell'equazione del calore)

Questa interpretazione è strettamente legata a quella analoga data per l'equazione di Laplace, con la differenza che qui abbiamo anche una variabile temporale.

Supponiamo che $u \in C^2(U)$ rappresenti la concentrazione di una certa sostanza (non più in un regime di equilibrio) in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e sia $F = F(u) \in C^2(U)$ la relativa densità di flusso. Sia $V \subset U$ un aperto regolare contenuto in U e ν il versore normale esterno al bordo di V . Allora la variazione temporale della quantità totale di sostanza, di cui u è la concentrazione, attraverso ∂V deve essere l'opposto del flusso totale:

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS.$$

In altri termini, se la variazione è negativa, cioè se la quantità totale di sostanza diminuisce in V , allora il flusso totale deve essere positivo (ν è il versore normale *esterno*). Applicando il Teorema della divergenza e derivando sotto il segno di integrale deduciamo allora, dall'arbitrarietà di V , che

$$u_t = -\operatorname{div} F \quad \text{in } U.$$

Se poi

$$F(u) = -aDu, \tag{5.3}$$

con $a > 0$, si deduce

$$u_t - a\Delta u = 0. \tag{5.4}$$

da cui (5.1) nel caso $a = 1$.

Nel caso in cui u rappresenti una temperatura, il termine F è la densità di flusso del calore e a è il coefficiente di conducibilità termica [41, Cap. 1, §1.2]; il segno meno è dovuto al fatto che il calore va da zone di temperatura più alta a zone di temperatura più bassa. In questo caso la (5.3) prende il nome *di legge di Fourier per la conduzione del calore*. Questo giustifica il nome di equazione del calore dato a (5.1), che regola la diffusione della temperatura al passare del tempo.

In altri ambiti, in particolare se u rappresenta una concentrazione, l'equazione (5.4) è detta equazione di Fick. Infine, una delle applicazioni più importanti dell'equazione (5.1) riguarda il moto Browniano [41, Cap. 1, §4.2].

Per semplicità, sceglieremo sempre $a = 1$ e ci riferiremo all'equazione (5.1) come equazione del calore.

Esercizio 5.1.1 Trovare un cambiamento delle variabili spaziali che trasformi (5.4) in (5.1).

Esercizio 5.1.2 [10, §2.5-12] Sia u una soluzione regolare dell'equazione $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

- (i) Provare che $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ risolve l'equazione del calore per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (ii) Usare (i) per dimostrare che anche $v(x, t) = x \cdot Du(x, t) + 2tu_t(x, t)$ soddisfa l'equazione del calore.

5.2 La soluzione fondamentale

Come per l'equazione di Laplace, iniziamo cercando delle soluzioni particolarmente semplici. In quel caso, avevamo cercato tali soluzioni tra le funzioni radiali; in questo caso l'osservazione fondamentale è che, se $u = u(x, t)$ soddisfa (5.1), allora anche $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ soddisfa la stessa equazione per $\lambda > 0$, si veda l'Esercizio 5.1.2. Sarebbe pertanto naturale cercare delle soluzioni del tipo

$$u(x, t) = v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \quad (5.5)$$

per $t > 0$, per le quali si ha evidentemente

$$u(\lambda x, \lambda^2 t) = u(x, t), \quad \lambda > 0. \quad (5.6)$$

Si noti che il termine r^2/t ha le stesse dimensioni fisiche del coefficiente di diffusione. *E' (5.5) un'ipotesi fisicamente ragionevole?* No! Mettiamoci infatti nel caso $n = 1$ e pensiamo ad u come alla temperatura di una barra; se $x = 0$, la condizione (5.5) implica

$$u(0, t) = v(0), \quad t > 0,$$

cioè che la temperatura in 0 è la stessa per tutti i tempi! Al contrario, ci aspettiamo che la temperatura si diffonda e dunque diminuisca.

Cerchiamo allora delle soluzioni del tipo

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right), \quad (5.7)$$

per un opportuno parametro reale α e $t > 0$. In questo caso deduciamo che

$$u(0, t) = \frac{1}{t^\alpha} v(0), \quad t > 0,$$

cioè che la temperatura decade nel punto 0 per un fattore di t^α .

Si noti che le funzioni u definite tramite la (5.7) soddisfano la *proprietà di riscalamento*

$$u(\lambda x, \lambda^2 t) = \frac{1}{\lambda^{2\alpha} t^\alpha} v\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\lambda^{2\alpha}} u(x, t), \quad \lambda > 0, \quad (5.8)$$

che prende il posto della (5.6).

Lemma 5.2.1 *Se $\alpha = \frac{n}{2}$ e $v(y) = ce^{-\frac{y^2}{4t}}$ per qualche $c \in \mathbb{R}$, allora la funzione u in (5.7) soddisfa l'equazione del calore (5.1). In tal caso si ha*

$$u(x, t) = \frac{c}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Invece di verificare direttamente l'enunciato del lemma, lo dimostriamo tramite un procedimento costruttivo. Sia $v : (0, \infty)$ una funzione generica, consideriamo $v(\frac{r}{\sqrt{t}})$ e indichiamo per brevità $y = \frac{r}{\sqrt{t}}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_t v(y) &= -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} r v'(y) = -\frac{1}{2} t^{-1} y v'(y), \\ \partial_{x_i} v(y) &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{x_i}{r} v'(y), \quad \partial_{x_i}^2 v(y) = t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} v'(y) - \frac{x_i^2}{r^3} v'(y) + t^{-\frac{1}{2}} \frac{x_i^2}{r^2} v''(y) \right), \\ \Delta v(y) &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{n-1}{r} v'(y) + t^{-1} v''(y) = t^{-1} \left(\frac{n-1}{y} v'(y) + v''(y) \right). \end{aligned}$$

Inseriamo l'espressione (5.7) in (5.1) e troviamo allora

$$\alpha t^{-\alpha-1} v(y) + \frac{1}{2} t^{-\alpha-1} y v'(y) + t^{-\alpha-1} \left(\frac{n-1}{y} v'(y) + v''(y) \right) = 0. \quad (5.9)$$

Semplificando i termini in $t^{-\alpha-1}$ otteniamo l'equazione per $v = v(y)$, dove ora naturalmente pensiamo y come una variabile indipendente:

$$v'' + \frac{n-1}{y} v' + \frac{1}{2} y v' + \alpha v = 0. \quad (5.10)$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, a coefficienti *non* costanti; non abbiamo una formula risolutiva per questa equazione. Tuttavia, se la moltiplichiamo per y^{n-1} , otteniamo l'equazione

$$y^{n-1} v'' + (n-1) y^{n-2} v' + \frac{1}{2} y^n v' + \alpha y^{n-1} v = 0.$$

Il primo e il secondo addendo si scrivono come $(y^{n-1} v')'$; il terzo e il quarto possono essere scritti come una derivata se scegliamo $\alpha = \frac{n}{2}$. Infatti

$$\frac{1}{2} y^n v' + \frac{n}{2} y^{n-1} v = \left(\frac{1}{2} y^n v \right)'.$$

In tal caso otteniamo

$$(y^{n-1}v')' + \frac{1}{2}(y^n v)' = 0.$$

Pertanto

$$y^{n-1}v' + \frac{1}{2}y^n v = C,$$

per qualche costante C . Pensando di nuovo all'interpretazione fisica, è naturale assumere che $\lim_{y \rightarrow \infty} v(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} v'(y) = 0$ in modo che $C = 0$. Si ottiene allora

$$v' + \frac{1}{2}yv = 0.$$

Si tratta di una equazione lineare del primo ordine (anche a variabili separabili), la cui soluzione è

$$v(y) = ce^{-\frac{y^2}{4}},$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Questo dimostra il lemma. $\square$

Dalla dimostrazione del lemma precedente potrebbe sembrare che vi possano essere altre soluzioni dell'equazione (5.10), forse per diversi valori di α ; in realtà non è così, si veda l'Esercizio 5.2.3 almeno per il caso $n = 1$.

Possiamo pertanto definire la soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

Definizione 5.2.1 *La funzione*

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

definita in $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, è detta soluzione fondamentale dell'equazione del calore, si veda la Figura 5.1.

Osservazione 5.2.1 La funzione Φ è anche chiamata *nucleo di Gauss*, di *Gauss-Weierstrass* o semplicemente *nucleo del calore*. Si noti che

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \Phi(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e se $x \neq 0$ lo stesso risultato vale anche per le derivate di Φ . Pertanto Φ è prolungabile ad una funzione di classe C^∞ in $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ che soddisfa ancora l'equazione (5.1). Di più, tutte le sue derivate sono uniformemente limitate in $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$, per ogni $\delta > 0$, e sommabili in $\mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$. Si noti anche che Φ è radiale nella variabile x .

Esercizio 5.2.1 Esiste il $\lim_{(x,t) \rightarrow (0,0)} \Phi(x, t)$?

Come nell'Osservazione 4.3.3, si può dimostrare che la funzione Φ soddisfa

$$\Phi_t - \Delta \Phi = \delta_0$$

nel senso delle distribuzioni [13, Theorem 4.6]. E' questa una prima motivazione alla normalizzazione introdotta nella definizione di Φ . Una seconda motivazione, in realtà collegata alla prima, è fornita dal lemma seguente.

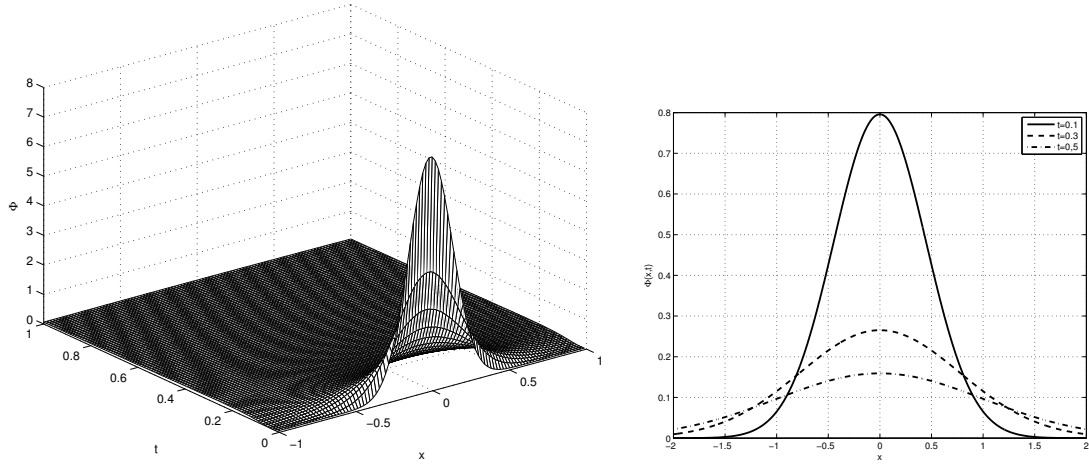


Figura 5.1: A sinistra, grafico della funzione Φ ; a destra, grafici della funzione $x \rightarrow \Phi(x, t)$ per alcuni valori di t .

Lemma 5.2.2 (L'integrale della soluzione fondamentale) Per ogni $t > 0$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

Dimostrazione. Facciamo il cambiamento di variabili $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$; allora $dx = 2^n t^{\frac{n}{2}} dz$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i = 1,$$

come volevamo dimostrare. $\square$

Osservazione 5.2.2 Si noti bene che nel Lemma 5.2.2 non si è fatto l'integrale della funzione Φ rispetto al complesso delle variabili (x, t) , ma *solo* l'integrale in x , a t fissato; si veda la Figura 5.1. Si noti che, dal Teorema di Fubini,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx dt = T.$$

e dunque $\Phi \notin L^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

Esercizio 5.2.2 Si usi il cambiamento di variabili trovato nell'Esercizio 5.1.1 per definire la soluzione fondamentale dell'equazione (5.4), cioè della soluzione analoga alla (5.11) ma normalizzata come nel Lemma 5.2.2. Si disegnino con MATLAB alcuni grafici delle soluzioni fondamentali, al variare di a e a tempo fissato, per rendersi conto che la diffusione di u è tanto maggiore quanto maggiore è il coefficiente di diffusività.

Esercizio 5.2.3 [10, §2.5-13] Sia $n = 1$ e $u(x, t) = v(x/\sqrt{t})$ per $t > 0$.

(i) Provare che

$$u_t - u_{xx} = 0 \iff v'' + \frac{y}{2}v' = 0. \quad (*)$$

(ii) Provare che l'integrale generale dell'equazione di destra in (*) è, per $c, d \in \mathbb{R}$,

$$v(y) = c \int_0^y e^{-\frac{s^2}{4}} ds + d.$$

(iii) Derivare l'espressione $u(x, t) = v(x/\sqrt{t})$ rispetto ad x e scegliere opportunamente la costante c in modo da ottenere la soluzione fondamentale Φ nel caso $n = 1$. Spiegare perché questa procedura fornisce la soluzione fondamentale.

5.3 Il problema ai valori iniziali

In questa sezione studiamo in dettaglio il problema ai valori iniziali per l'equazione del calore. Incominciamo dal caso omogeneo.

5.3.1 Il problema omogeneo

Ripensando all'interpretazione dell'equazione (5.1) come modello per la diffusione della temperatura in un corpo, viene naturale pensare che un problema associato a tale equazione sia quello ai valori iniziali. Così è.

Consideriamo dunque il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Nonostante il problema (5.12) sembri molto simile al problema al bordo per il Laplaciano nel caso di un semispazio (4.65), la differenza è sostanziale. In (5.12) il dato è assegnato su tutto $\mathbb{R}^n$ e non su un suo iperpiano; se, ad esempio, u fosse una soluzione stazionaria di (5.12), allora l'equazione diventerebbe sì $-\Delta u = 0$, ma a causa della condizione iniziale u dovrebbe coincidere con g , che allora dovrebbe essere armonica.

Abbiamo visto nell'Osservazione 5.2.1 che la soluzione fondamentale Φ soddisfa l'equazione del calore tranne che nel punto $(0, 0)$; dunque la funzione $(x, t) \rightarrow \Phi(x - y, t)$ soddisfa la stessa equazione tranne che nel punto $(y, 0)$, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$. Pertanto la congettura è che la funzione

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \quad (5.13)$$

sia la soluzione di (5.12) per $t > 0$. Infatti si noti bene che, diversamente da quando succedeva per l'equazione di Laplace, la funzione integranda non è mai singolare per $t > 0$ fissato.

Teorema 5.3.1 (Soluzione del problema ai valori iniziali) *Sia $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e u data da (5.13). Allora*

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
- (ii) $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0)$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Fissato $\delta > 0$, dall'Osservazione 5.2.1 deduciamo che la funzione $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty))$ e che tutte le sue derivate sono uniformemente limitate in $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ e sommabili in x per ogni $t > 0$ fissato. Poiché g è limitata possiamo derivare sotto il segno di integrale e dedurre che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty))$; questo dimostra (i). Il punto (ii) segue allora dal fatto che $\Phi_t - \Delta \Phi = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Per dimostrare il punto (iii), fissiamo $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e ragioniamo come nel Teorema 4.5.2, relativo al problema di Dirichlet in un semispazio per il Laplaciano. Poiché g è continua, dato $\epsilon > 0$ esiste allora $\delta > 0$ tale che

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon \quad \text{se } |y - x^0| < \delta. \quad (5.14)$$

Abbiamo allora, dal Lemma 5.2.2,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) (g(y) - g(x^0)) dy \right| \\ &\leq \left(\int_{B(x_0, \delta)} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} \right) \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy = I + J. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda I notiamo che, per il Lemma 5.2.2,

$$I \leq \epsilon \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) dy < \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy = \epsilon,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Per quanto riguarda J , abbiamo

$$J \leq 2 \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} \Phi(x - y, t) dy = \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \quad (5.15)$$

Notiamo che $|y - x^0| > \delta$; dalla (4.68) deduciamo che se $|x - x^0| < \delta/2$, allora

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|. \quad (5.16)$$

Infatti (ripetiamo il ragionamento, si veda ora la Figura 5.2) si ha

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

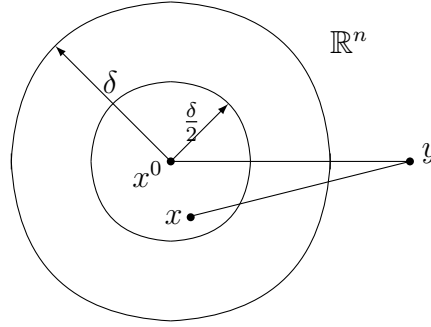


Figura 5.2: Per la dimostrazione della disuguaglianza (5.16).

Pertanto da (5.15) e (5.16) deduciamo, facendo anche il cambiamento di variabili $z = (y - x^0)/\sqrt{t}$, $dy = t^{n/2} dz$,

$$J \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy = C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta/\sqrt{t})} e^{-\frac{|z|^2}{16}} dz \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0+. \quad (5.17)$$

Se perciò $|x - x^0| < \delta/2$ e $t > 0$ è abbastanza piccolo, allora $|u(x, t) - g(x^0)| < 2\epsilon$. Questo dimostra il teorema. $\square$

Osservazione 5.3.1 Si noti che i primi due punti della dimostrazione del Teorema 5.3.1 non usano l'ipotesi di continuità del dato iniziale g ma solo la sua limitatezza.

Esercizio 5.3.1 Consideriamo il caso $n = 1$ nella dimostrazione del Teorema 5.3.1. In riferimento a (5.17), calcolare un asintotico, per $t \rightarrow 0+$, di

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{t}}]} e^{-x^2} dx.$$

Osservazione 5.3.2 (Velocità infinita di propagazione) La formula (5.13) ha una conseguenza importante. Supponiamo infatti che $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ soddisfi anche $g \geq 0$ e $g \not\equiv 0$; pertanto in qualche punto g deve essere strettamente positiva. Deduciamo allora che $u(x, t)$ deve essere strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t > 0$! Si confronti con il Corollario 4.4.2; si noti che mentre in quel risultato la funzione g era il dato *al bordo*, qui rappresenta il dato *iniziale*.

Pensando al modello di conduzione termica in dimensione 1, questo vorrebbe dire che è sufficiente che la temperatura in un qualche punto della barra sia strettamente positiva al tempo 0 per avere temperatura strettamente positiva anche a enormi distanze, per tempi arbitrariamente vicini a 0. Questo fenomeno, che chiaramente non rispecchia le leggi della fisica, è detto *velocità infinita di propagazione*.

La spiegazione viene dal fatto che l'equazione (5.1) è un modello *semplificato* per la propagazione termica, ma nondimeno utile e largamente usato proprio per questa sua semplicità. A causa del termine esponenziale nella soluzione fondamentale, i valori di u per x grandi (o t piccoli) sono molto piccoli e dunque fisicamente trascurabili; si veda l'Esercizio 5.3.2. Per “correggere” questa anomalia del modello sono state proposte equazioni più complete (ad esempio, l'equazione di Cattaneo, si veda la Sezione 5.6); l'equazione del calore conserva però una posizione assolutamente preminente nei problemi di termodinamica.

Esercizio 5.3.2 Sia $n = 1$ e $g(x) = \chi_{[-\epsilon, \epsilon]}$. Utilizzando la formula (5.13), dare una stima approssimata della soluzione u del problema (5.12) per ϵ piccolo. Si noti che nel Teorema 5.3.1 il dato iniziale è richiesto continuo e limitato ma, come abbiamo notato nell'Osservazione 5.3.1, per l'esistenza è sufficiente la sola limitatezza. Rappresentare graficamente la soluzione usando MATLAB, si veda la Figura 5.3.

Osservazione 5.3.3 (Irreversibilità) Si noti che benché il dato iniziale g sia richiesto solo continuo e limitato, la soluzione u è di classe C^∞ in

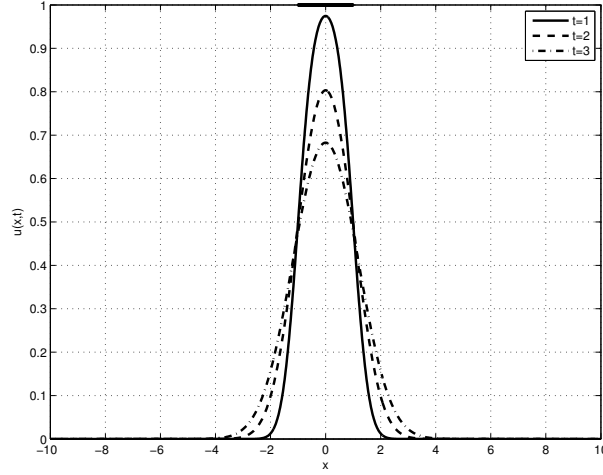


Figura 5.3: La funzione u ad alcuni istanti di tempo per il dato iniziale g , in grassetto. Qui $\epsilon = 1$.

$\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. In altre parole, l'equazione del calore ha un effetto regolarizzante (come l'equazione di Laplace). Pertanto, a meno che il dato iniziale non sia molto regolare, non possiamo pensare di prolungare la u nel passato, cioè per tempi $t < 0$. Questa proprietà analitica è interpretata come l'*irreversibilità del tempo nell'equazione del calore*, ed è legato al secondo principio della termodinamica.

Osservazione 5.3.4 (Teorema di approssimazione di Weierstrass) Una conseguenza sorprendente del Teorema 5.3.1 è il famoso *Teorema di approssimazione di Weierstrass*: se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un compatto, allora le restrizioni a K dei polinomi sono dense in $C(K)$. Si veda [13, Theorem 4.9] o [24, Problem 1, pag. 213]. Questo motiva il nome di nucleo di Gauss-Weierstrass dato a Φ .

5.3.2 Il problema non omogeneo e il principio di Duhamel

Consideriamo in questa sezione il problema non omogeneo ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (5.18)$$

In effetti, basta considerare il caso

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (5.19)$$

in cui $g = 0$ perché allora dalla sezione precedente, per linearità, si troverà la soluzione di (5.18). L'idea per risolvere (5.19) si basa su un principio piuttosto generale che si applica anche ad altre equazioni *evolutive*, cioè dipendenti dal tempo: il *principio di Duhamel*.

Sappiamo che la soluzione fondamentale Φ soddisfa l'equazione del calore in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Pertanto, fissato $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times (0, t)$, e allora $t - s > 0$, anche la funzione

$$(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t - s),$$

traslata in avanti nel tempo di s , soddisfa la stessa equazione ma nel semipiano $\mathbb{R}^n \times (s, \infty)$.



Duhamel

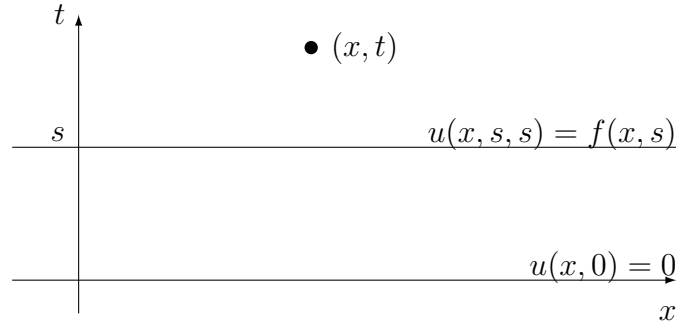


Figura 5.4: Il principio di Duhamel per l'equazione del calore.

Dalla formula (5.13) deduciamo che la funzione

$$u(x, t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy \quad (5.20)$$

risolve il problema ai valori iniziali su $t = s$

$$\begin{cases} u_t(x, t, s) - \Delta u(x, t, s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(x, s, s) = f(x, s) & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases} \quad (5.21)$$

I due problemi (5.19) e (5.21) sembrano non avere niente in comune: in particolare nel primo f compare nell'equazione, nel secondo f è il dato iniziale al tempo s . Ne diamo ora un'interpretazione intuitiva.

Osservazione 5.3.5 Supponiamo per un attimo che non vi siano i Laplaciani né in (5.19) né in (5.21), in modo che i due problemi si semplifichino rispettivamente in

$$\begin{cases} u(x, t)_t = f(x, t) & t > 0, \\ u = 0 & t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_t(x, t, s) = 0 & t > s, \\ u(x, s, s) = f(x, s) & t = s. \end{cases} \quad (5.22)$$

Se *integriamo* la funzione $u(x, t, s)$ in s e definiamo

$$u(x, t) := \int_0^t u(x, t, s) ds,$$

allora $u_t = u(x, t, t) + \int_0^t u_t(x, t, s) ds = f(x, t)$; inoltre $u(x, 0) = 0$. Pertanto $u(x, t)$ risolve il problema a sinistra in (5.22)!

Possiamo pertanto formulare il

Principio di Duhamel: la soluzione di un problema ai valori iniziali non omogeneo può essere ottenuta integrando in s la soluzione di un problema ai valori iniziali omogeneo in cui il dato al tempo s è precisamente il termine non omogeneo.

Ritroveremo lo stesso principio nella trattazione dell'equazione delle onde, si veda la Sezione 6.3.4.

Esercizio 5.3.3 Applicare il principio di Duhamel per risolvere il problema (si veda (3.6))

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Ritorniamo al problema (5.19). La candidata ad essere la soluzione di (5.19) è pertanto

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds, \quad (5.23)$$

per $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Dal momento che la funzione $\Phi(x - y, t - s)$ è nulla se $s \geq t$, la formula (5.23) si può anche scrivere

$$u(x, t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds.$$

Si noti che possiamo pensare di prolungare f con 0 se $s < 0$ (in modo non necessariamente continuo, ma solo per dare un'idea di come si può scrivere (5.23)). Con questa estensione l'integrale in (5.23) diventa allora

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \Phi * f(x, t),$$

dove $\Phi * f$ indica la convoluzione *completa*, cioè nel complesso delle variabili (x, t) . Questa scrittura riduce il principio di Duhamel all'osservazione che la soluzione di $u_t - \Delta u = f$ è data dalla convoluzione $\Phi * f$. Poiché nel senso delle distribuzioni $\Phi_t - \Delta \Phi = \delta$ e $\delta * f = f$, si deduce allora che $u_t - \Delta u = f$.

Verifichiamo ora il principio di Duhamel; per semplicità consideriamo una funzione f molto regolare.

Teorema 5.3.2 (Soluzione del problema non omogeneo con dati nulli)

Consideriamo $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ a supporto compatto e u definita da (5.23). Allora

- (i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
- (ii) $u_t - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x,t) = 0$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Diversamente dalla situazione considerata nella dimostrazione del Teorema 5.3.1, in cui Φ era regolare nella regione di integrazione $\{t > \delta\}$ e si integrava in x , qui si integra anche in s e allora la funzione $(y, s) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$ è singolare nel punto (x, t) , si veda la Figura 5.5.

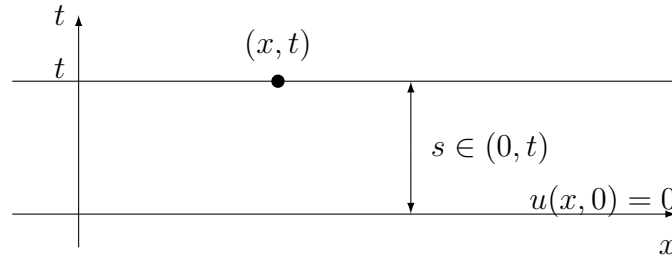


Figura 5.5: Per la dimostrazione del Teorema 5.3.2.

Procediamo allora come per l'equazione di Poisson, Teorema 4.3.1.

- (i) Cambiamo variabili ponendo $z = x - y$, $\sigma = t - s$ per ottenere

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) f(x - z, t - \sigma) dz d\sigma = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds,$$

dove nell'ultimo passaggio, per comodità, abbiamo di nuovo indicato con (y, s) le variabili di integrazione. Fissato $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, possiamo derivare sotto il segno di integrale rispetto a t e a x perché f è regolare e a supporto compatto, mentre $\Phi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Deduciamo che

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds,$$

$$u_{x_i x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_{x_i x_j}(x - y, t - s) dy ds,$$

per $i, j = 1, \dots, n$. Pertanto $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

(ii) Notiamo che

$$(\partial_t - \Delta_x) f(x - y, t - s) = (-\partial_s - \Delta_y) f(x - y, t - s).$$

Da questa formula e dai calcoli del punto (i) deduciamo, se $0 < \epsilon < t$,

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (\partial_t - \Delta_x) f(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (-\partial_s - \Delta_y) f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (-\partial_s - \Delta_y) f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= I_\epsilon + J_\epsilon + K. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Per quanto riguarda l'integrale in I_ϵ , si ricordi che Φ è singolare nel punto $(0, 0)$; tuttavia, dal Lemma 5.2.2, deduciamo

$$|I_\epsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy ds = C\epsilon,$$

per qualche costante $C > 0$.

Per quanto riguarda J_ϵ , integrando per parti sia in s che in y , e ricordando, a proposito dell'integrazione per parti in y , che f è a supporto compatto, si ha

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} [(\partial_s - \Delta_y) \Phi(y, s)] f(x - y, t - s) dy ds - \left[\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds \right]_\epsilon^t \\ &= -K + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy, \end{aligned}$$

in quanto Φ risolve l'equazione del calore nella striscia $\mathbb{R}^n \times [\epsilon, t]$. In conclusione, da (5.24) deduciamo

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = O(\epsilon) + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy$$

per ogni $\epsilon \in (0, t)$. Pertanto

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy = f(x, t), \tag{5.25}$$

procedendo esattamente come nel punto (iii) della dimostrazione del Teorema 5.3.1, relativo al problema ai valori iniziali per l'equazione del calore omogenea; si veda l'Esercizio 5.3.4.

(iii) Infine, di nuovo per il Lemma 5.2.2,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x - y, t - s) f(y, s)| \, dy \, ds \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \, dy \, ds = t \|f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

da cui segue l'ultimo punto.

□

Esercizio 5.3.4 Provare in dettaglio il limite in (5.25).

Esercizio 5.3.5 L'enunciato del Teorema 5.3.2 non copre il caso in cui $f = f(t)$ è indipendente dalla variabile x ; in tal caso, a meno che f non sia identicamente nulla, f può non essere a supporto compatto. Cosa dà formalmente la formula (5.23)? E' questa una soluzione?

Esercizio 5.3.6 [10, §2.5-15] Sia $n = 1$, $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(0) = 0$ e consideriamo il problema misto ai valori iniziali e al bordo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = g & \text{su } \{x = 0\} \times [0, \infty). \end{cases} \quad (5.26)$$

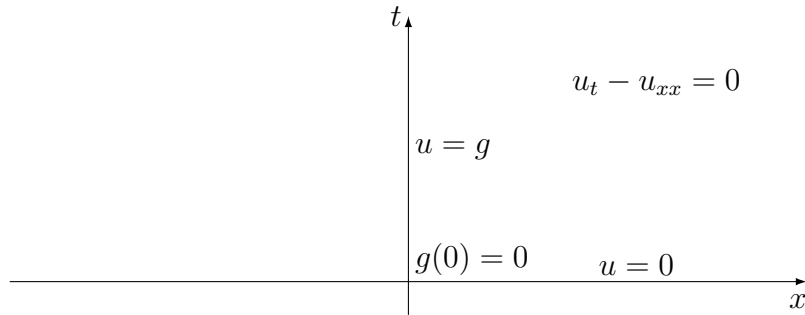


Figura 5.6: Il problema misto (5.26).

Si noti che la condizione $g(0) = 0$ è una *condizione di compatibilità* tra il dato iniziale e il dato al bordo.

(i) Dire cosa rappresenta fisicamente questo problema.

(ii) Provare che la funzione

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} ds$$

soddisfa il problema (5.26). Per farlo, conviene definire $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$ e estendere v a $\mathbb{R}_-$ in modo dispari (cioè con una *riflessione dispari*; rivedremo questa tecnica per l'equazione delle onde).

(iii) Cosa sarebbe successo se avessimo fatto una riflessione pari?

Combinando i Teoremi 5.3.1 e 5.3.2, per linearità otteniamo allora la soluzione del problema ai valori iniziali non omogeneo (5.18)

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds. \quad (5.27)$$

Si noti una certa analogia con la formula risolutiva (3.7). Per chiarezza scriviamo l'enunciato completo.

Teorema 5.3.3 (Soluzione del problema non omogeneo) Sia $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ a supporto compatto, $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e u definita da (5.27). Allora

(i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;

(ii) $u_t - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;

(iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0)$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 5.3.7 [10, §2.5-14] Sia $c \in \mathbb{R}$; scrivere una formula esplicita per una soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (5.28)$$

sotto opportune ipotesi per le funzioni f e g . Si ricordi l'Esercizio 3.2.3.

5.4 Proprietà delle soluzioni dell'equazione del calore

In questa sezione, parallela all'analogia sezione per l'equazione di Laplace, studiamo alcune proprietà delle soluzioni dell'equazione del calore e del relativo problema ai valori iniziali.

5.4.1 Le formule di media

Introduciamo per prima cosa le formule di media per soluzioni dell'equazione del calore; sfortunatamente, tali formule non sono così semplici come quelle per le funzioni armoniche. Iniziamo dando alcune notazioni.

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $T > 0$. Definiamo allora i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} U_T &= U \times (0, T] && \text{il cilindro parabolico,} \\ \Gamma_T &= \bar{U}_T \setminus U_T && \text{il bordo parabolico di } U_T. \end{aligned}$$

L'aggettivo *parabolico* non è dovuto tanto alla forma degli insiemi U_T e Γ_T quanto al fatto che l'equazione del calore è parabolica. L'insieme U_T è aperto ad eccezione della “parte superiore” $U \times \{t = T\}$: è chiamato l'interno parabolico del chiuso $\bar{U} \times [0, T]$. Il bordo parabolico Γ_T di $\bar{U} \times [0, T]$ è l'usuale bordo di quell'insieme tranne il “coperchio” $U \times \{t = T\}$. Si veda la Figura 5.7. In maniera rozza ma intuitiva, l'insieme $\bar{U} \times [0, T]$ può essere visualizzato come una pentola piena d'acqua: Γ_T è la pentola, U il suo fondo, U_T ne è l'acqua, fino all'ultimo strato incluso. Ecco perché U_T è detto *interno parabolico*.

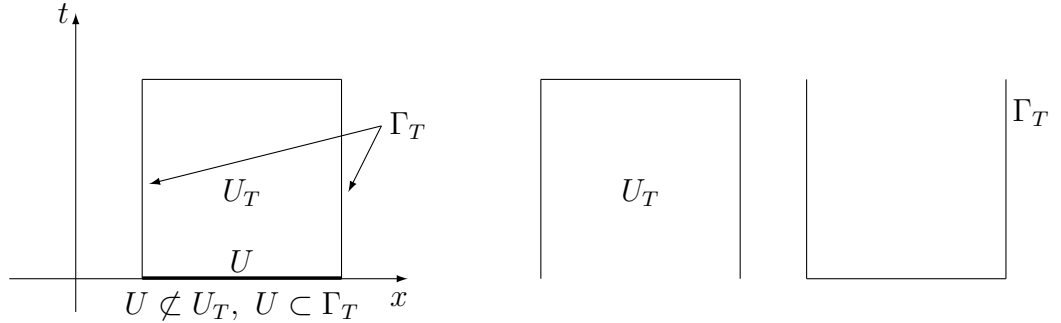


Figura 5.7: Gli insiemi U_T e Γ_T nel caso $n = 1$.

Una traccia per la ricerca delle formule di media per le soluzioni dell'equazione del calore può essere la seguente. Nel caso dell'equazione di Laplace, gli insiemi su cui si mediava erano le sfere $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}$, che sono superfici di livello della soluzione fondamentale (radiale) $y \rightarrow \Phi_\Delta(x - y)$, dove Φ_Δ indica la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace. Analogamente, si erano usate anche le palle $B(x, r)$ e si noti che, ad esempio se $n \geq 3$,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \Phi_\Delta(x - y) \geq \frac{c_n}{r^{n-2}} \right\},$$

dove $c_n = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}$.

Nel caso dell'equazione del calore la definizione pertinente è la seguente.

Definizione 5.4.1 Sia $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $r > 0$; definiamo la palla del calore

$$E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}. \quad (5.29)$$

Ovviamente la *sfera del calore* è l'insieme $\partial E(x, t; r)$, che è la superficie di livello $1/r^n$ della soluzione fondamentale $\Phi(x - y, t - s)$. Si noti che la definizione di E è imprecisa, perché la funzione $\Phi(x - y, t - s)$ non è definita quando $s = t$, ma chiariremo in che senso sia da intendere questa espressione. L'uso delle disuguaglianze deboli è giustificato per avere $E(x, t; r)$ chiusa, come nel caso di $B(x, r)$.

Per renderci conto di cosa sia $E(x, t; r)$ notiamo che, se $s < t$, esso è costituito dagli (y, s) che soddisfano la disequazione

$$\frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^n}, \quad s < t.$$

Dunque

$$\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} \leq \log \frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} = \log \left(\frac{r^2}{(4\pi(t-s))} \right)^{\frac{n}{2}}$$

ovvero

$$\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} \leq \frac{n}{2} \ln \frac{r^2}{4\pi(t-s)}. \quad (5.30)$$

Questa disuguaglianza può essere soddisfatta solo se $\frac{r^2}{4\pi(t-s)} \geq 1$, cioè se

$$t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s < t. \quad (5.31)$$

Ovviamente se $s = t - \frac{r^2}{4\pi}$, allora $x = y$. Pertanto $E(x, t; r)$ deve essere contenuto nella striscia $\mathbb{R}^n \times [t - \frac{r^2}{4\pi}, t]$. Per $s \in [t - \frac{r^2}{4\pi}, t]$ fissato, “affettiamo” $E(x, t; r)$; i punti di $E(x, t; r)$ a s fissato (la proiezione di $E(x, t; r)$ su $\mathbb{R}^n$, a s fissato) soddisfano, da (5.30), la disequazione

$$|x-y|^2 \leq 2n(t-s) \ln \frac{r^2}{4\pi(t-s)}. \quad (5.32)$$

Si tratta di sfere di centro x e raggio $\left(2n(t-s) \ln \frac{r^2}{4\pi(t-s)}\right)^{1/2}$; si veda la Figura 5.8 a sinistra. Ricordando la disuguaglianza (5.31), si noti inoltre che

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t-} 2n(t-s) \ln \frac{r^2}{4\pi(t-s)} &= 0, \\ \lim_{s \rightarrow t - \frac{r^2}{4\pi} +} 2n(t-s) \ln \frac{r^2}{4\pi(t-s)} &= 0, \end{aligned}$$

e dunque alle quote t e $t - \frac{r^2}{4\pi}$ l'insieme $E(x, t; r)$ si riduce ai punti (x, t) (il “Polo Nord”) e $(x, t - \frac{r^2}{4\pi})$ (il “Polo Sud”), rispettivamente, come avevamo già visto prima. Intenderemo dunque la Definizione (5.29), se $s = t$, nel senso di limite $s \rightarrow t-$. Più rigorosamente, dunque,

$$E(x, t; r) = \overline{\left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s < t, \Phi(x - y, t - s) > \frac{1}{r^n} \right\}}.$$

Infatti per tutti i valori di $s < t$ la funzione $\Phi(x - y, t - s)$ è continua e dunque la chiusura coincide con il prendere il segno di minore o uguale nell'insieme qui sopra.

Il punto (x, t) non è dunque all'interno dell'insieme $E(x, t; r)$ (come succede per $B(x, r)$), ma ne rappresenta il punto di massima altezza, e complessivamente $E(x, t; r)$ ricorda un ellissoide, da cui la notazione impiegata. Si veda la Figura 5.8 a destra.

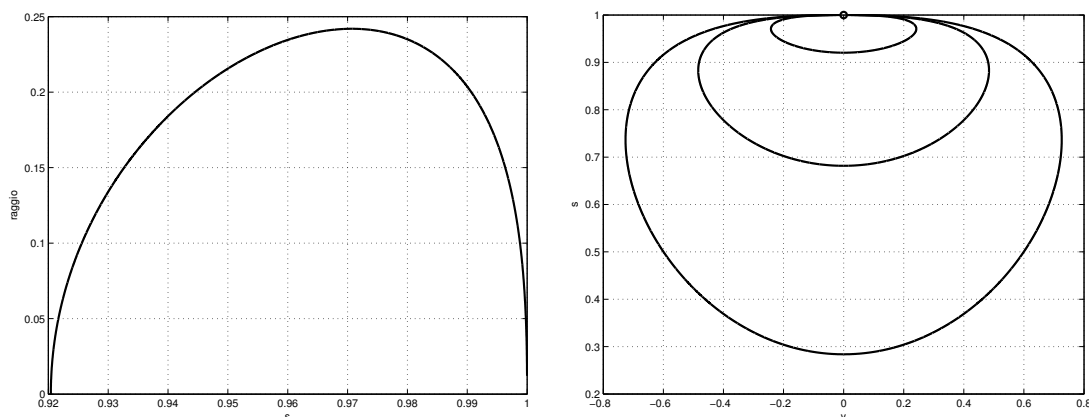


Figura 5.8: A sinistra, nel caso $r = 1$, il raggio delle sfere nel piano $\mathbb{R}^n_y$ in funzione di s . A destra, sfere del calore di raggio 1, 2 e 3; qui $n = 1$, il punto $(x, t) = (0, 1)$ è raffigurato con un cerchietto.

Teorema 5.4.1 (Proprietà di media per l'equazione del calore) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $T > 0$ e supponiamo che $u \in C_1^2(U_T)$ soddisfi l'equazione del calore. Allora*

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds \quad (5.33)$$

per ogni $E(x, t; r) \subset U_T$.

La dimostrazione di questo risultato, piuttosto tecnica, è omessa; i dettagli si possono trovare in [10].

A proposito di (5.33), si noti innanzi tutto che, prendendo $u = 1$, da (5.33) si deduce immediatamente

$$\frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x,t;r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds = 1. \quad (5.34)$$

Si confronti a tal proposito con (4.26) e (4.27) e si veda l'Esercizio 5.4.1. Osserviamo inoltre che la formula (5.33) non è proprio una media: gli integrali non sono mediati e la funzione integranda contiene, oltre ad u , anche un "peso" dipendente da y e s . L'aspetto più interessante di tale formula consiste nel fatto che essa è *causale*. Infatti $u(x, t)$ è completamente determinata dai valori $u(y, s)$ per $(y, s) \in E(x, t; r)$; tali valori si riferiscono a valori di u a tempi *minori* di t e non dall'evoluzione futura di u .

Esercizio 5.4.1 Provare (5.34) con un calcolo diretto.

5.4.2 Il principio del massimo

Il principio del massimo, come nel caso dell'equazione di Laplace, è conseguenza della formula di media (5.33).

Teorema 5.4.2 (Il principio del massimo) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $T > 0$ e supponiamo che $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ soddisfi l'equazione del calore in U_T . Allora*

$$(i) \max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u;$$

$$(ii) \text{ se inoltre } U \text{ è connesso ed esiste } (x^0, t^0) \in U_T \text{ tale che } u(x^0, t^0) = \max_{\bar{U}_T} u, \text{ allora } u \text{ è costante in } \bar{U}_{t^0}.$$

Come nel caso dell'equazione di Laplace, il punto (i) è detto *principio del massimo* per l'equazione del calore mentre il punto (ii) è detto *principio del massimo forte*. Vale naturalmente un analogo risultato per il minimo.

Osservazione 5.4.1 Il Teorema 5.4.2 merita alcuni commenti.

(a) Innanzi tutto, si noti che $\max_{\bar{U}_T} u$ esiste in quanto $\bar{U}_T$ è compatto e u è continua.

(b) Dove e quando è assunto il massimo? Dal punto (i) abbiamo che il massimo può essere assunto

- al tempo $t = 0$, in un qualsiasi punto di $\bar{U}$;
- al tempo $t > 0$, in un qualsiasi punto di ∂U .

In maniera un po' imprecisa, la prima opportunità capita in presenza di un punto di massimo di un dato iniziale h , la seconda in presenza di un punto di massimo di un dato al bordo g . Infatti, sebbene il Teorema 5.4.2 non menzioni né dati iniziali né dati al bordo, è chiaro che il problema fisico pertinente è il problema misto

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T, \\ u = g & \text{su } \partial U \times (0, T], \\ u = h & \text{su } U \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

In altre parole, i punti di massimo sono realizzati da dati “esterni”: all'interno, la u viene diffusa.

- (c) L'interpretazione del Teorema 5.4.2 è leggermente diversa da quella al Teorema 4.4.2. Infatti qui il principio del massimo forte stabilisce che se u raggiunge il massimo (o il minimo) in un punto interno (x^0, t^0) , allora u è costante per tutti i tempi *precedenti* t^0 . Anche questo risultato, come le formule di media dal quale è dedotto, è dunque *causale*, come è giusto che sia. Perché non è plausibile aspettarsi che u sia costante in tutto U_T ?

Per capirlo, consideriamo per $t^0 < T$ il problema misto

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T, \\ u = g(x, t) & \text{su } \partial U \times (0, T], \\ u = 1 & \text{su } U \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (5.35)$$

dove

$$g(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, t) \in \partial U \times [0, t^0], \\ e^{-(t-t^0)} & \text{se } (x, t) \in \partial U \times (t^0, T], \end{cases}$$

si veda la Figura 5.9.

La soluzione che fisicamente ci aspettiamo è quella che vale 1 fino al tempo t^0 (e questo è dimostrato dal successivo Corollario 5.4.1, si veda anche l'Osservazione 5.4.2); per tempi successivi a t^0 ci aspettiamo che u decresca, in quanto il dato al bordo decresce. Dunque, nonostante il massimo di u sia realizzato in tutti i punti dell'insieme $\bar{U} \times [0, t^0]$ e tale valore sia proprio il massimo su tutto $\bar{U}_T$, la u non è costante in tutto U_T .

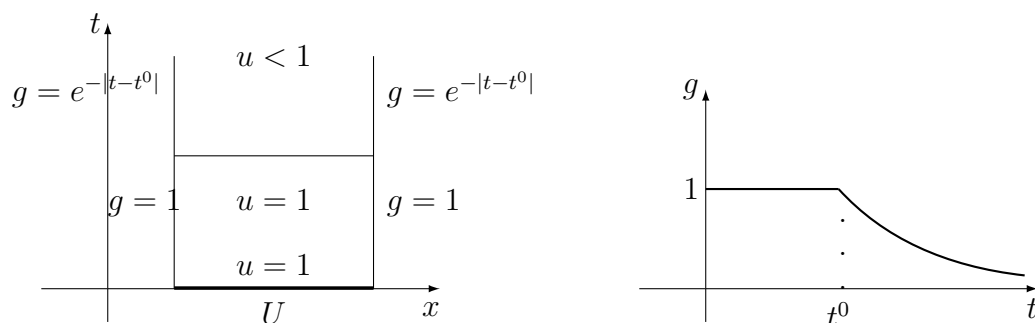


Figura 5.9: Un problema misto.

Dimostrazione del Teorema 5.4.2. La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 4.4.2, ma un po' più sottile, dovuta al fatto che abbiamo una variabile in più e le palle del calore $E(x, t; r)$ danno informazioni su u solo per tempi minori di t . Chiaramente il punto (i) è conseguenza banale del punto (ii), applicando tale risultato alle componenti connesse di $\bar{U}_T$. La dimostrazione di (ii) è divisa in due parti.

(a) Supponiamo che esista un punto $(x^0, t^0) \in U_T$ tale che

$$u(x^0, t^0) = \max_{\max \bar{U}_T} u =: M,$$

si veda la Figura 5.10. Allora esiste $r > 0$ tale che $E(x^0, t^0; r) \subset U_T$. Per il Teorema di media 5.4.1 deduciamo

$$u(x^0, t^0) = \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x^0, t^0; r)} u(y, s) \frac{|x^0 - y|^2}{(t^0 - s)^2} dy ds.$$

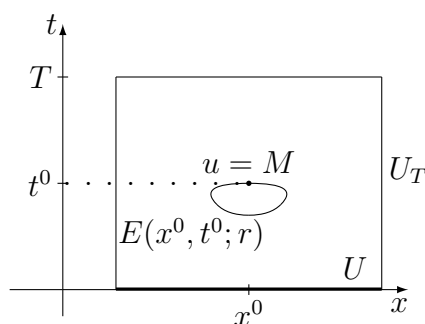


Figura 5.10: Per la dimostrazione del principio del massimo.

Poiché $u(y, s) \leq M$ per ogni $(y, s) \in U_T$, dall'Esercizio 5.4.1 si ha che $u \equiv M$ in $E(x^0, t^0; r)$.

Consideriamo ora (si veda la Figura 5.12) un altro punto $(y^0, s^0) \in U_T$, con $s^0 < t^0$, e supponiamo che il segmento L che congiunge (y^0, s^0) con (x^0, t^0) sia tutto contenuto in U_T ; questo può non capitare, ad esempio, se U non è convesso, si veda la Figura 5.11.

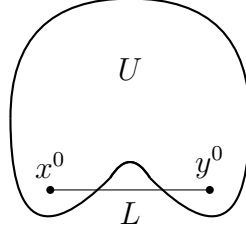


Figura 5.11: Un insieme U non convesso.

Vogliamo dimostrare che

$$u \equiv M \text{ lungo } L. \quad (5.36)$$

A questo scopo definiamo l'insieme

$$K = \{s \geq s^0 : u(x, t) = M \text{ per ogni } (x, t) \in L, t \in [s, t^0]\}.$$

Si ha $K \subset [s^0, t^0]$ e $t^0 \in K$; dunque K è limitato e non vuoto. Proviamo ora che il complementare di K ,

$$K^c = \{s \geq s^0 : \text{esiste } (x, t) \in L, t \in [s, t^0] \text{ tale che } u(x, t) < M\},$$

è aperto, si veda la Figura 5.12 a sinistra. Sia infatti $s \in K^c$; allora $s \in [s^0, t^0]$ ed esiste $(x^1, t^1) \in L$, $t^1 \in [s, t^0]$ con $u(x^1, t^1) < M$. Il fatto che K^c sia aperto segue allora dalla continuità della funzione u . Pertanto K è relativamente compatto in $[s^0, t^0]$.

Inoltre, K è un intervallo. Se infatti $s^1, s^2 \in K$ e ad esempio $s^1 < s^2$, allora $u(x, t) = M$ per $(x, t) \in L$, $t \in [s^1, t^0]$, e dunque in particolare tutto l'intervallo $[s^1, s^2]$ è contenuto in K .

In conclusione, l'insieme K è un intervallo chiuso, limitato e non vuoto; pertanto esiste il

$$r^0 = \min K.$$

Se fosse $r^0 > s^0$, allora u sarebbe identicamente uguale ad M scendendo lungo L fino a $(z^0, r^0) \in L$ incluso, si veda la Figura 5.12 a destra. Per il Teorema di media 5.4.1, ragionando come nella prima parte della dimostrazione, deduciamo che $u \equiv M$ in $E(z^0, t^0; r)$, per r abbastanza

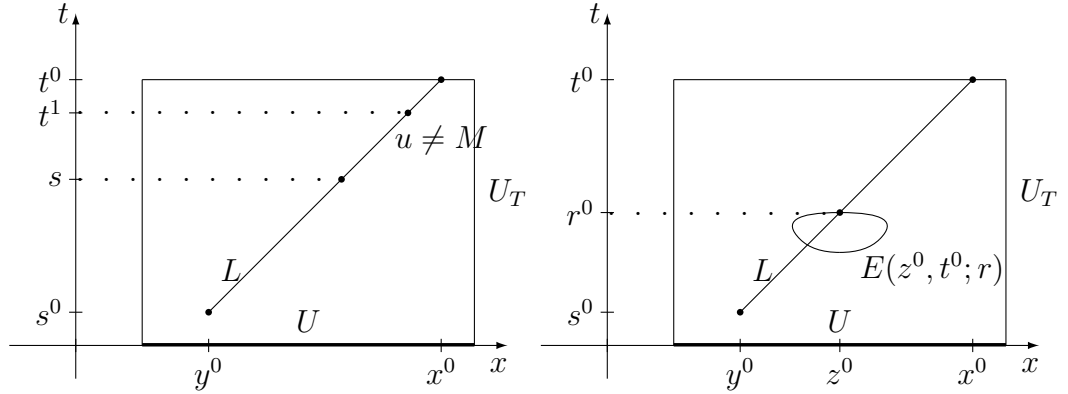


Figura 5.12: Per la dimostrazione del principio del massimo.

piccolo. Questo implicherebbe in particolare che $u \equiv M$ in $L \cap \{r^0 - \sigma \leq t \leq r^0\}$ per qualche σ abbastanza piccolo, una contraddizione.

Pertanto $r^0 = s^0$ e questo dimostra (5.36).

- (b) Consideriamo l'insieme dei punti $x \in U$ che possono essere congiunti con x^0 con una poligonale. Questo insieme è certamente non vuoto, aperto, relativamente chiuso in U e il numero di segmenti di ogni poligonale è finito perché $\bar{U}$ è compatto. Poiché U è connesso ne segue che tale insieme coincide con U e dunque ogni punto di U può essere congiunto a x^0 da una poligonale. I dettagli sono analoghi a quelli della dimostrazione della seconda parte del Teorema 4.4.8 della disuguaglianza di Harnack.

Fissiamo ora un punto $(x, t) \in U \times [0, t^0]$ e siano x^i , $i = 1, \dots, m$, i vertici di una poligonale contenuta in U che congiunge x^0 con $x = x^m$. Fissiamo inoltre dei tempi arbitrari $t^0 > t^1 > \dots > t^m = t$; per la struttura cilindrica di $U \times [0, T)$ la poligonale di vertici (x^i, t^i) , $i = 0, \dots, m$, è tutta contenuta in $U \times [0, t^0]$. Dal punto (i) abbiamo che u è identicamente uguale ad M in ogni segmento della poligonale; pertanto, per l'arbitrarietà di $(x, t) \in U \times [0, t^0]$, si ha che $u = M$ in $U \times [0, t^0]$. Poiché u è continua in $\bar{U}_T$, ne segue che $u(x, t) = M$ in $U \times [0, t^0]$.

□

Esercizio 5.4.2 [10, §2.5-16] Dare una dimostrazione diretta del principio del massimo per l'equazione del calore: se $u \in C_1^2(U_T)$ soddisfa l'equazione del calore, allora $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$. Si ricordi l'Esercizio 4.4.3. Come in quell'esercizio, definire $u^\epsilon = u - \epsilon t$ per $\epsilon > 0$ e mostrare che il massimo di u^ϵ in $\bar{U}_T$ non può essere realizzato in U_T .

Esercizio 5.4.3 (Sotto- e sopra-soluzioni) [10, §2.5-17] Una funzione $v \in C_1^2(U_T)$ è una *sotto-soluzione* dell'equazione del calore se

$$v_t - \Delta v \leq 0 \quad \text{in } U_T.$$

Nel caso di *sopra-soluzioni* il verso della disuguaglianza si inverte. Si confronti con l'Esercizio 4.4.4. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato; dimostrare quanto segue:

(i) se v è una sotto-soluzione allora

$$v(x) \leq \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds \quad \text{per ogni } E(x,t;r) \subset U_T;$$

(ii) se v è una sotto-soluzione allora $\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$; trovare una dimostrazione alternativa diretta come nell'Esercizio 5.4.2;

(iii) se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è regolare e convessa e u una sotto-soluzione dell'equazione del calore, allora $v = \phi(u)$ è ancora una sotto-soluzione;

(iv) se u è una sotto-soluzione dell'equazione del calore, allora $v = |Du|^2 + u_t^2$ è ancora una sotto-soluzione;

(v) nei casi (i)–(iii) enunciare gli analoghi risultati per una sopra-soluzione w .

Un risultato analogo al Corollario 4.4.2 è il seguente, relativo ad un problema misto (per il quale non vale dunque più la formula di rappresentazione (5.27)); un risultato molto simile è già stato dimostrato per il solo problema ai valori iniziali, si veda l'Osservazione 5.3.2.

Corollario 5.4.1 (Velocità infinita di propagazione e positività) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso, $g \in C(U)$ tale che $g \geq 0$; sia $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ una soluzione del problema misto

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T, \\ u = 0 & \text{su } \partial U \times [0, T], \\ u = g & \text{su } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Se esiste un punto $x^0 \in U$ tale che $g(x^0) > 0$, allora $u(x, t) > 0$ per ogni $(x, t) \in U_T$.

Dimostrazione. E' assolutamente analoga a quella del Corollario 4.4.2. Dal Teorema 5.4.2 sappiamo che $\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u = 0$, dunque $u(x, t) \geq 0$ per ogni $x \in U_T$. Se esistesse $(x^0, t^0) \in U_T$ tale che $u(x^0, t^0) = 0$, allora (x^0, t^0) sarebbe un punto di minimo interno per u , dunque u dovrebbe essere identicamente uguale a 0. A causa della continuità di u fino al bordo ciò contraddirebbe l'ipotesi che $g(x^0) > 0$. $\square$

A causa della variabile temporale t , la proprietà di positività data dal corollario precedente si legge meglio come un'altra versione della velocità infinita di propagazione.

Esercizio 5.4.4 In riferimento al Corollario 5.4.1 si consideri il problema misto

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T, \\ u = h & \text{su } \partial U \times [0, T], \\ u = 0 & \text{su } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Enunciare e dimostrare l'analogo risultato di velocità infinita di propagazione e positività.

Un'applicazione tipica del principio del massimo, come si era già visto nel Corollario 4.4.3 a proposito dell'equazione di Laplace, riguarda l'unicità delle soluzioni. E' quello che facciamo adesso, concentrandoci su due problemi diversi:

- (i) il problema misto con U limitato;
- (ii) il problema ai valori iniziali con $U = \mathbb{R}^n$.

Cominciamo considerando allora il problema misto (ai valori iniziali e al bordo)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T, \\ u = g & \text{su } \Gamma_T. \end{cases} \quad (5.37)$$

Si noti la scrittura un po' condensata ma efficace delle condizioni iniziali e al bordo in (5.37).

Corollario 5.4.2 (Unicità per il problema misto, U limitato) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in C(U_T)$ e $g \in C(\Gamma_T)$. Esiste allora al più una soluzione $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ del problema misto (5.37).*

Dimostrazione. E' analoga alla dimostrazione del Corollario 4.4.3. Siano u_1 e u_2 due soluzioni del problema (5.37) e definiamo $w = u_1 - u_2$. La funzione

w soddisfa il problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } U_T, \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_T. \end{cases}$$

Per il principio del massimo si ha che $\max_{\bar{U}_T} w = \max_{\Gamma_T} w = 0$ e $\min_{\bar{U}_T} w = \min_{\Gamma_T} w = 0$, cioè $w = 0$ in tutto $\bar{U}_T$. Pertanto $u_1 = u_2$ in $\bar{U}_T$. $\square$

Osservazione 5.4.2 Si consideri $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $C \in \mathbb{R}$ e il problema misto

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T, \\ u = C & \text{su } \partial U \times (0, T], \\ u = C & \text{su } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (5.38)$$

Il Corollario 5.4.2 implica che la funzione $u = C$ è l'unica soluzione di classe $C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ del problema (5.38).

Passiamo ora al caso del problema ai valori iniziali con $U = \mathbb{R}^n$ (non limitato!), cioè

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Una prima sorpresa è che l'unicità viene subito a mancare se non si impongono condizioni di crescita sulla soluzione u . Un famoso esempio, dovuto a A. N. Tichonov (1935), mostra infatti che il problema omogeneo a dati nulli

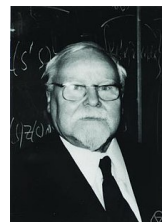
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

ha, oltre alla soluzione identicamente nulla, *infinite* altre soluzioni [24, §7.1, pag. 211] che sono identicamente nulle se $t \leq 0$ ma non se $t > 0$. Esse sono costruite prescrivendo il valore $u(0, t) = g_\alpha(t)$ di u sull'asse t , dove

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^\alpha}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0, \end{cases} \quad (5.40)$$

per $\alpha > 1$. Si costruisce allora una soluzione u_α tale che

$$|u_\alpha(x, t)| \leq e^{\frac{1}{\theta} \frac{|x|^2}{t} - \frac{1}{2} \frac{1}{t^\alpha}} \quad (5.41)$$



Tichonov

per $t > 0$, dove θ dipende da α . Si noti che questa stima implica che $u_\alpha(x, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0+$, uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}_x^n$. Infatti

$$e^{\frac{1}{\theta} \frac{|x|^2}{t} - \frac{1}{2} \frac{1}{t^\alpha}} = e^{\frac{1}{t} \left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right)}$$

e, per x in un compatto, l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$ per $t \rightarrow 0+$.

Si tratta di soluzioni che hanno una crescita molto più che esponenziale per $|x| \rightarrow \infty$ e chiaramente non sono soluzioni fisiche: a temperatura iniziale 0 e in assenza di fonti di calore (la f) la temperatura deve restare nulla.

L'esempio di Tichonov menzionato sopra ha come conseguenza che non possiamo avere un principio del massimo per il problema omogeneo ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (5.42)$$

senza ulteriori ipotesi (nelle soluzioni di Tichonov $g = 0$ ma u non è neanche limitata). Il teorema seguente tratta questo problema; si veda anche [24, §7.1, pag. 216]. Da questo risultato dedurremo facilmente l'unicità delle soluzioni che hanno crescita "non eccessiva".

Teorema 5.4.3 (Principio del massimo per il problema ai valori iniziali)

Per il problema ai valori iniziali (5.39) sia $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ una soluzione che soddisfi

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (5.43)$$

dove A e a sono costanti positive. Allora

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g. \quad (5.44)$$

Osservazione 5.4.3 Raccogliamo in questa osservazione vari commenti sul Teorema 5.4.3.

- (i) Nella stima di crescita (5.43) non c'è il valore assoluto di u . Questo è legato al fatto che il risultato finale, si veda (5.44), coinvolge solo l'estremo superiore. Un analogo risultato con l'estremo inferiore vale supponendo che u soddisfi la stima dal basso $u(x, t) \geq -Ae^{a|x|^2}$.
- (ii) Le formule (5.43) e (5.44), dovendo valere anche a $t = 0$, implicano che g deve necessariamente soddisfare la condizione

$$g(x) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pertanto il caso $\sup_{\mathbb{R}^n} g = \infty$ non è escluso. Questo spiega tra l'altro perché (5.44) è enunciata in termini di $\sup$ e non di $\max$.

- (iii) Le soluzioni del controesempio di Tichonov (relative a dati iniziali nulli) soddisfano la stima (5.41); essa è analoga alla (5.43) ma con a rimpiazzato (essenzialmente) da $1/t$. Esse non soddisfano dunque la (5.43): ad esempio, sulla superficie $t = 1/|x|$ la stima (5.41) fornisce

$$e^{\frac{1}{\theta}|x|^3 - \frac{1}{2}|x|^\alpha}$$

che è chiaramente maggiore della condizione di crescita (5.43), se $|x| \rightarrow \infty$, se scegliamo $\alpha < 3$. Questo spiega la costante a della condizione (5.43); questo fatto trasparirà anche dalla dimostrazione del teorema.

- (iv) Da un punto di vista fisico, il risultato (5.44) è più che plausibile: il calore è diffuso man mano che il tempo passa e la temperatura massima è raggiunta al tempo iniziale. L'esistenza delle soluzioni di Tichonov suggerisce una volta di più che, benché largamente utilizzata, l'equazione del calore non riesce a rappresentare in modo completamente corretto la diffusione del calore.

Dimostrazione del Teorema 5.4.3. Dividiamo la dimostrazione in più passi. Chiaramente, se $\sup_{\mathbb{R}^n} g = \infty$ non c'è nulla da dimostrare; supponiamo allora $\sup_{\mathbb{R}^n} g < \infty$.

- (i) Consideriamo dapprima il caso in cui

$$4aT < 1. \quad (5.45)$$

In altri termini, cerchiamo di stimare u per tempi piccoli. Scegliamo allora $\epsilon > 0$ in modo che

$$4a(T + \epsilon) < 1 \quad (5.46)$$

e, fissato $y \in \mathbb{R}^n$ e $\mu > 0$, definiamo, per $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$,

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon-t)}} \\ &= u(x, t) - \Psi(x - y, T + \epsilon - t). \end{aligned}$$

Si noti che la definizione di v ha senso in $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ grazie alla presenza di ϵ , che nel resto della dimostrazione non gioca altro ruolo. Si noti inoltre che

$$\Psi(x, t) = \frac{\mu}{t^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0,$$

non è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore: questo non tanto per l'assenza $(4\pi)^{-n/2}$, che potremmo pensare essere inglobato nella costante μ , quanto per il fatto che l'esponente della funzione esponenziale è *positivo* e non negativo. In particolare la funzione $(x, t) \mapsto \Psi(x - y, T + \epsilon - t)$ è singolare a $t = T + \epsilon$, in quanto tende a ∞ per $t \rightarrow (T + \epsilon)^-$, ed è definita nel passato, cioè per ogni $t < T + \epsilon$. Il suo scopo, come si vedrà qui sotto, è quello di *controllare* la crescita in x della funzione u , per tutti i tempi $t \in (0, T]$. Si veda la Figura 5.13.

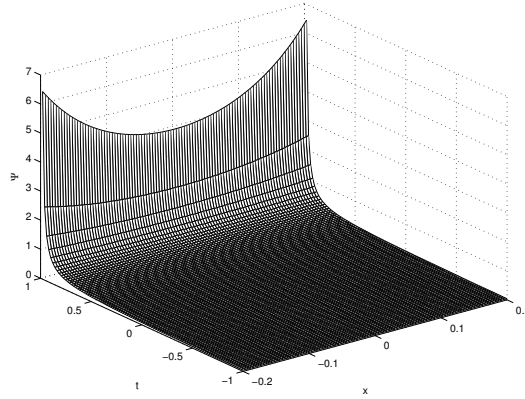


Figura 5.13: La funzione $\Psi(x, t)$ nel caso $y = 0$, $T + \epsilon = 1$.

Si vede facilmente (si ripensi ai calcoli fatti nella Sezione 5.2) che la funzione $(x, t) \mapsto \Psi(x - y, T + \epsilon - t)$ soddisfa l'equazione del calore e dunque

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T].$$

Fissiamo ora $r > 0$; denotiamo $U = B^\circ(y, r)$ così che $U_T = B^\circ(y, r) \times (0, T]$. Dal Teorema 5.4.2 (il principio del massimo sui limitati!) segue allora che

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v. \quad (5.47)$$

(ii) Andiamo ad esaminare ora i valori di v su Γ_T . Per quanto riguarda i valori iniziali abbiamo che

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\epsilon)}} \leq u(x, 0) = g(x), \quad x \in B^\circ(y, r). \quad (5.48)$$

Per quanto riguarda i valori al bordo, sia $(x, t) \in S(y, r) \times (0, T]$; allora, usando (5.43) e la disuguaglianza $|x| \leq |x - y| + |y| = |y| + r$, si ottiene

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T + \epsilon - t)}} \leq A e^{ax^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T + \epsilon - t)}} \\ &\leq A e^{a(|y| + r)^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T + \epsilon)}}, \quad (x, t) \in S(y, r) \times (0, T]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

L'idea della dimostrazione consiste nel fare in modo che il coefficiente $\frac{1}{4(T + \epsilon)}$ sia maggiore del coefficiente a , in modo da rendere v limitata. Infatti da (5.46) si deduce che $4(T + \epsilon) < 1/a$, dunque $\frac{1}{4(T + \epsilon)} > a$. Esiste pertanto $\gamma > 0$ tale che

$$\frac{1}{4(T + \epsilon)} = a + \gamma.$$

Da (5.49) deduciamo allora che

$$v(x, t) \leq A e^{a(|y| + r)^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{(a + \gamma)r^2}, \quad (x, t) \in S(y, r) \times (0, T].$$

Tralasciando le costanti moltiplicative, il primo fattore è asintotico a e^{ar^2} , il secondo a $e^{(a + \gamma)r^2}$; poiché stiamo supponendo che $\sup_{\mathbb{R}^n} g < \infty$, dalla disuguaglianza precedente segue che esisterà certamente r_0 abbastanza grande in modo che

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \text{per } x \in S(y, r) \times (0, T] \text{ e } r \geq r_0. \quad (5.50)$$

Da (5.47), (5.48), (5.50) si ottiene allora che

$$\max_{B(y, r) \times [0, T]} v \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \text{se } r \geq r_0$$

e dunque

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \text{per ogni } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Poiché questa stima è uniforme in μ , fissato $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ possiamo passare al limite per $\mu \rightarrow 0+$ e dedurre

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g. \quad (5.51)$$

(iii) Si tratta ora di eliminare l'ipotesi (5.45). A questo scopo sia $T > 0$ e dividiamo l'intervallo $[0, T]$ in sottointervalli $[0, T_1]$, $[T_1, 2T_1]$..., con $T_1 = \frac{1}{8a} < \frac{1}{4a}$. Possiamo applicare la stima (5.51) con T_1 al posto di T e dedurre che $\sup_{\mathbb{R}^n \times [t=T_1]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$. Usando $u(x, T_1)$ al posto di g possiamo applicare di nuovo (5.51) nella striscia $\mathbb{R}^n \times [T_1, 2T_1]$ per dedurre in particolare $\sup_{\mathbb{R}^n \times [t=T_2]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$ e così via.

Il teorema è completamente dimostrato. $\square$

Esercizio 5.4.5 Come complemento all'introduzione della funzione Ψ nel Teorema 5.4.3, si consideri la "soluzione fondamentale" a tempi invertiti $\check{\Phi}(x, t) = \Phi(x, T - t)$, dove $T > 0$ è fissato e $t < T$. Soddisfa ancora $\check{\Phi}$ l'equazione del calore?

Dal teorema precedente possiamo finalmente dedurre un risultato di unicità per il problema ai valori iniziali (5.39).

Corollario 5.4.3 (Unicità per il problema ai valori iniziali in $\mathbb{R}^n$) Sia $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ e $g \in C(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ del problema ai valori iniziali (5.39) soddisfacente la condizione di crescita $|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è completamente analoga a quella del Corollario 5.4.2. $\square$

5.4.3 Regolarità delle soluzioni dell'equazione del calore

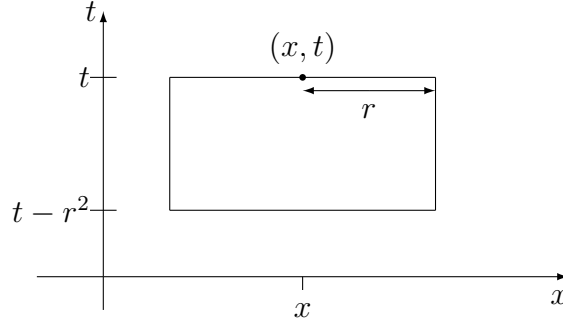
Anche le soluzioni dell'equazione del calore, come quelle dell'equazione di Laplace, sono regolari; si ricordi il Corollario 4.4.4.

Introduciamo prima la notazione

$$C(x, t; r) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x - y| \leq r, s \in [t - r^2, t]\}.$$

Questo insieme, analogo a $E(x, t; r)$, è un cilindro chiuso di raggio r e altezza r^2 in cui il punto (x, t) si trova al centro della parte superiore; si veda la Figura 5.14. In effetti, la misura precisa r^2 dell'altezza del cilindro non verrà mai usata nella dimostrazione seguente.

Teorema 5.4.4 (Regolarità) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $u \in C_1^2(U_T)$ risolve l'equazione del calore in U_T , allora $u \in C^\infty(U_T)$.

Figura 5.14: L'insieme $C(x, t; r)$.

Osservazione 5.4.4 Come nel caso dell'Osservazione 4.4.8, anche in questo caso la regolarità di u prescinde dalla sua regolarità al bordo (parabolico): in altri termini, nel caso u risolva un problema misto, essa può essere di classe $C^\infty(U_T)$ nonostante i suoi dati al bordo e la condizione iniziale siano molto meno regolari. Si noti inoltre come, ovviamente, il risultato del Teorema 5.4.4 sia molto più generale di quello del Teorema 5.3.1, in cui si dimostrava la regolarità di *una* specifica soluzione.

Dimostrazione del Teorema 5.4.4. La dimostrazione ricorda un po' quella del Teorema 4.4.3 ma è complicata dall'asimmetria delle variabili x e t ; si veda [34, Theorem 1, pag. 347]. Lo scopo è quello di cercare una formula di rappresentazione per u del tipo

$$u(x, t) = \iint_{\mathcal{D}} K(x, t, y, s) u(y, s) dy ds,$$

su qualche dominio $\mathcal{D}$, con K regolare in modo da scaricare le derivate su K . A tale scopo, cercheremo di ricondurci alla formula di rappresentazione (5.23) di Duhamel; per fare questo dovremo localizzare u , moltiplicandola per una funzione cutoff che sia uguale ad 1 nell'intorno del punto (x^0, t^0) in cui vogliamo studiare la regolarità di u ma che assicuri un dato iniziale 0.

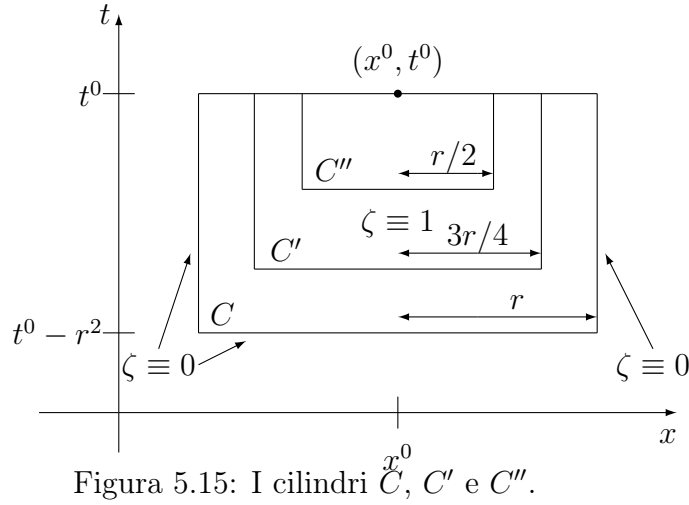
Fissiamo $(x^0, t^0) \in U_T$ e sia $r > 0$ tale che $C = C(x^0, t^0; r) \subset U_T$. Definiamo anche

$$C' = C(x^0, t^0; 3r/4) \quad \text{e} \quad C'' = C(x^0, t^0; r/2),$$

si veda la Figura 5.15. Consideriamo poi una funzione cutoff $\zeta = \zeta(x, t)$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ tale che

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta \equiv 1 \text{ su } C', \tag{5.52}$$

$$\zeta \equiv 0 \text{ in un intorno del bordo parabolico di } C \text{ e in } \mathbb{R}^n \times [0, t^0] \setminus C. \tag{5.53}$$

Figura 5.15: I cilindri C , C' e C'' .

Possiamo ora iniziare veramente la dimostrazione. Supponiamo per il momento che $u \in C^\infty(U_T)$ e definiamo

$$v(x, t) = \zeta(x, t)u(x, t) \quad (5.54)$$

in U_T . In effetti, dal momento che ζ è nulla in $\mathbb{R}^n \times [0, t^0] \setminus C$ e che $C \subset U_T$, la funzione v è prolungabile con 0 a $\mathbb{R}^n \times [0, t^0] \setminus C$; la identificheremo pertanto con il suo prolungamento a $\mathbb{R}^n \times [0, t^0]$. Si noti che v è limitata essendo il prodotto di due funzioni regolari, di cui una a supporto compatto.

Da (5.54) e (5.53) segue che

$$v \equiv 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

e inoltre che, in $\mathbb{R}^n \times [0, t^0]$,

$$v_t - \Delta v = \zeta_t u + \zeta u_t - (\Delta \zeta u + 2D\zeta \cdot Du + \zeta \Delta u) = \zeta_t u - 2D\zeta \cdot Du - u\Delta \zeta =: h.$$

Ovviamente $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, t^0])$ ed è a supporto compatto in $\mathbb{R}^n \times [0, t^0]$. Pertanto v risolve il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = h & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, t^0), \\ v = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (5.55)$$

Si ricordi ora il Teorema 5.3.2, che era stato dimostrato sotto l'ipotesi $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ a supporto compatto. La funzione h non è definita in tutto $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ ma è regolare (ecco perché stiamo supponendo $u \in C^\infty$: se non avessimo fatto così la funzione h sarebbe stata solamente di classe $C_1^1(U_T)$) e, ripercorrendo la dimostrazione di quel teorema, si vede che lo stesso risultato continua a valere, con h al posto di f , in $\mathbb{R}^n \times [0, t^0]$. Perciò anche

$$w(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) h(y, s) dy ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^0],$$

è soluzione di (5.55). La funzione w è limitata e dunque, per il Corollario 5.4.3, le funzioni v e w coincidono; pertanto

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) h(y, s) dy ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t^0]. \quad (5.56)$$

Sia ora $(x, t) \in C''$; da (5.52) deduciamo $v(x, t) = u(x, t)$ e da (5.53) che possiamo restringere a C (in effetti, a $C \setminus C'$ in quanto h è nulla su C') l'integrazione in (5.56); perciò

$$u(x, t) = \iint_C \Phi(x - y, t - s) (\zeta_s u - 2D\zeta \cdot Du - u\Delta\zeta) dy ds, \quad (x, t) \in C''. \quad (5.57)$$

Si noti che l'integrazione in tempo da 0 a t della formula (5.56) non compare più nella formula (5.57), in quanto $\Phi(x - y, t - s)$ è diversa da 0 solo se $s < t$, per $(x, t) \in C''$ e $(y, s) \in C \setminus C'$.

Siamo vicini ad una formula di rappresentazione per u : solo il termine con Du ci disturba. Notiamo che in (5.57) compaiono solo derivate della funzione ζ , che è identicamente uguale a 1 in C' ; ne segue che il termine tra parentesi è identicamente nullo in C' e dunque l'integrazione può essere limitata all'insieme $C \setminus C'$. In questo insieme la funzione $(y, s) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$ non è singolare se $(x, t) \in C''$. Possiamo dunque integrare per parti (nelle variabili y) il termine con il prodotto scalare dei due gradienti spaziali; vogliamo dimostrare che

$$\iint_C \Phi(x - y, t - s) D\zeta \cdot Du dy ds = - \iint_C (D_y \Phi(x - y, t - s) \cdot D\zeta + \Phi(x - y, t - s) \Delta\zeta) u dy ds. \quad (5.58)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \iint_C \Phi(x - y, t - s) D\zeta \cdot Du dy ds &= \int_{t^0 - r^2}^t \int_{B(x^0, r)} \Phi(x - y, t - s) D\zeta \cdot Du dy ds \\ &= \int_{t^0 - r^2}^t \sum_{i=1}^n \int_{B(x^0, r)} \Phi(x - y, t - s) \zeta_{y_i} u_{y_i} dy ds. \end{aligned}$$

Per $s \in (t^0 - r^2, t)$ abbiamo che, integrando per parti in y ,

$$\begin{aligned} &\int_{B(x^0, r)} \Phi(x - y, t - s) \zeta_{y_i} u_{y_i} dy \\ &= - \int_{B(x^0, r)} (\Phi_{y_i}(x - y, t - s) \zeta_{y_i} + \Phi(x - y, t - s) \zeta_{y_i y_i}) u dy + \int_{S(x^0, r)} \Phi(x - y, t - s) \zeta_{y_i} u dS(y) \\ &= - \int_{B(x^0, r)} (\Phi_{y_i}(x - y, t - s) \zeta_{y_i} + \Phi(x - y, t - s) \zeta_{y_i y_i}) u dy, \end{aligned}$$

perchè ζ è nulla in un intorno del bordo parabolico di C . Questo dimostra (5.58).

Da (5.57) e (5.58) segue allora

$$u(x, t) = \iint_C [\Phi(x - y, t - s)(\zeta_s + \Delta\zeta) + 2D_y\Phi(x - y, t - s) \cdot D\zeta] u \, dy \, ds, \quad (x, t) \in C''.$$

(5.59)

Questa formula di rappresentazione per u è stata ottenuta sotto l'ipotesi che $u \in C^\infty$; si noti tuttavia che essa non coinvolge nessuna derivata di u . Pertanto, se $u \in C_1^2(U_T)$, consideriamo la regolarizzazione $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u \in C^\infty$, dove η è un mollificatore nelle variabili (x, t) . Per la funzione u^ϵ la formula (5.59) vale e $u^\epsilon \rightarrow u$ uniformemente sui compatti, poiché u è continua; possiamo perciò passare al limite per $\epsilon \rightarrow 0+$. Questo dimostra che (5.59) vale anche per funzioni $u \in C_1^2(U_T)$.

La formula (5.59) ha l'espressione generale

$$u(x, t) = \iint_C K(x, t, y, s) u(y, s) \, dy \, ds, \quad (x, t) \in C''.$$

Si noti che $K(x, t, y, s) \equiv 0$ se $(y, s) \in C'$, in quanto $\zeta \equiv 1$ su C' , e $K(x, t, y, s)$ è regolare in $(x, t) \in C''$ se $(y, s) \in C \setminus C'$. Segue allora immediatamente che $u \in C^\infty(C'')$. $\square$

Osservazione 5.4.5 Il Teorema 5.4.4 può essere esteso per dimostrare che l'operatore del calore è *ipoellittico*, cioè se u risolve $u_t - \Delta u = f$ con $f \in C^\infty(U_T)$, allora $u \in C^\infty(U_T)$, si veda ad esempio [13, Theorem 4.8].

Concludiamo questa sezione con un risultato che dà una stima sulle derivate di una soluzione dell'equazione del calore. Esso è simile al Teorema 4.4.4 ma evidenzia il ruolo asimmetrico delle variabili x e t .

Teorema 5.4.5 (Stime sulle derivate) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e u una soluzione dell'equazione del calore in U_T . Per ogni $k, l \in \mathbb{N}$ esiste una costante positiva $C_{k,l}$ tale che, per ogni $C(x, t; r) \subset U_T$, si ha*

$$\max_{C(x,t;r/2)} \left| D_x^k D_t^l u \right| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^\infty(C(x,t;r))}.$$

Omettiamo la dimostrazione di questo risultato tecnico.

Osservazione 5.4.6 Una conseguenza importante del Teorema 5.4.5 è che, se u è una soluzione dell'equazione del calore, allora la funzione $x \rightarrow u(x, t)$ è analitica [34, Theorem 1, pag. 347]. Al contrario, però, la funzione $t \rightarrow$

$u(x, t)$ non è, in generale, analitica. Si può dimostrare in effetti che la funzione $t \rightarrow u(x, t)$ appartiene alla classe di Gevrey G^2 . Ricordiamo che una funzione f in $U \subset \mathbb{R}^n$ è analitica in U se per ogni compatto $K \subset U$ esiste una costante C tale che

$$\sup_K |D^\alpha f| \leq CR^{|\alpha|} \alpha!.$$

Si dice invece che una funzione f appartiene alla classe di Gevrey $G^s(U)$, con $s \geq 1$, se vale una stima più debole, cioè

$$\sup_K |D^\alpha f| \leq CR^{|\alpha|} \alpha!^s.$$

La funzione $g_\alpha = g_\alpha(t)$ definita in (5.40) è di classe $G^{1+\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R})$ se $\alpha \geq 1$, si veda [24, Problem 3, pag. 73] e non è analitica in quanto nulla se $t \leq 0$. Si può dimostrare che

$$\mathcal{A}(U) = G^1(U) \subset G^{s_1}(U) \subset G^{s_2}(U) \subset C^\infty(U)$$

se $1 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$. Pertanto le funzioni g_α in (5.40) sono di classe $G^2(\mathbb{R})$ per ogni $\alpha \geq 1$. Si ha inoltre

$$C^\infty(U) \setminus \bigcup_{s \geq 1} G^s(U) \neq \emptyset$$

e $G^s(U)$ contiene funzioni a supporto compatto non identicamente nulle per ogni $s > 1$. Si veda [40] per maggiori informazioni.

5.5 Metodi dell'energia

Il “metodo dell'energia” introdotto brevemente nella Sezione 4.6 trova applicazione anche per l'equazione del calore. A questo proposito consideriamo un'ultima volta il problema misto ai valori iniziali e al bordo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T, \\ u = g & \text{su } \Gamma_T. \end{cases} \quad (5.60)$$

Nel caso U limitato, l'unicità della soluzione al problema (5.60) è stata dimostrata nel Corollario 5.4.2 impiegando il principio del massimo. La ritroviamo ora con il metodo dell'energia; la dimostrazione è analoga a quella della Proposizione 4.6.1, con la differenza della variabile temporale.

Proposizione 5.5.1 (Unicità per il problema misto) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, con ∂U di classe C^1 ; sia $T > 0$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C_1^2(\bar{U}_T)$ del problema misto (5.60).*

Dimostrazione. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni di classe $C_1^2(\bar{U}_T)$ di (5.5.1), allora $w = u_1 - u_2$ risolve il problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } U_T, \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_T. \end{cases} \quad (5.61)$$

In questo caso l'“energia” associata al problema (5.61) è la funzione

$$e(t) = \int_U w^2(x, t) dx,$$

definita per $t \in [0, T]$. Dalla seconda formula di Green e dal fatto che w è nulla su ∂U si ha che

$$\dot{e}(t) = 2 \int_U w w_t dx = 2 \int_U w \Delta w dx = -2 \int_U |Dw|^2 dx \leq 0.$$

Pertanto *l'energia è dissipata in tempo*, come del resto ci si aspetta ricordando il modello di diffusione termica che motiva l'equazione del calore. Poiché in questo caso il dato iniziale è nullo, si ha immediatamente che

$$e(t) \leq e(0) = 0 \quad \text{per } t \in [0, T].$$

Ne segue che $e \equiv 0$ (non c'è niente da dissipare...) e dunque $w = 0$. Perciò $u_1 = u_2$. $\square$

Una seconda applicazione dei metodi dell'energia riguarda l'equazione del calore “all'indietro” (la cosiddetta *backwards heat equation*). Più precisamente consideriamo il problema *ai valori finali*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U \times [0, T), \\ u = g & \text{su } \partial U \times [0, T], \\ u = h & \text{su } U \times \{t = T\}. \end{cases} \quad (5.62)$$

Questo problema parrebbe, a prima vista, assolutamente analogo al problema misto considerato per esempio in (5.37). La differenza è che mentre in (5.37) assegnamo un dato iniziale e studiamo l'evoluzione della soluzione per tempi positivi, in (5.62) forniamo il dato ad un certo tempo $T > 0$ e vogliamo ricostruire la soluzione nel passato. Se poniamo $v(x, t) = u(x, -t)$, allora v è definita per $t \in [-T, 0]$ e il problema (5.62) diventa

$$\begin{cases} v_t + \Delta v = 0 & \text{in } U \times (-T, 0], \\ v = \check{g} & \text{su } \partial U \times [-T, 0], \\ v = h & \text{su } U \times \{t = -T\}, \end{cases} \quad (5.63)$$

dove $\check{g}(x, t) = g(x, -t)$. In altre parole, il problema (5.62) è equivalente ad un problema ai valori iniziali (al tempo $-T$) ma per l'equazione $v_t + \Delta v = 0$. Da un punto di vista fisico, ciò vuol dire che abbiamo cambiato segno al coefficiente di diffusione termica.

Dal momento che l'equazione del calore ha un effetto regolarizzante nel tempo, ci aspettiamo, al contrario, che l'equazione in (5.63) sviluppi delle singolarità; si noti che abbiamo già usato questo argomento nell'Osservazione 5.3.3. Pertanto ci aspettiamo che una eventuale soluzione del problema (5.62) possa diventare singolare per $t < T$ (e allora dovremmo specificare in che senso essa sarebbe soluzione di (5.62)) e che possa crescere per $t < T$ (si pensi alla soluzione fondamentale per l'equazione del calore). Ci aspettiamo dunque che piccole variazioni del dato h possano produrre grandi variazioni nelle soluzioni per tempi $t < T$, cioè che il problema sia *instabile*; si veda [37, pag. 26]. Sorprendentemente, vale ancora un risultato di unicità.

Teorema 5.5.1 (Unicità nel passato) *Esiste al più una soluzione $u \in C^2(\bar{U}_T)$ del problema (5.62).*

Si veda [10] per una semplice dimostrazione di questo risultato basata su metodi dell'energia.

5.6 Approfondimenti

L'equazione di Cattaneo. Abbiamo visto che l'equazione del calore gode della proprietà (non fisica) della velocità infinita di propagazione. Un'equazione alternativa, che non ha questo difetto, è l'equazione di Cattaneo (o di Maxwell-Cattaneo)

$$\sigma u_{tt} + u_t - a\Delta u = 0, \quad (5.64)$$

dove σ è parametro positivo; per $\sigma = 0$ si ritrova l'equazione del calore. Si veda [33] per una deduzione di questa equazione e qualche cenno storico. Si noti che l'equazione (5.64) non è più un'equazione parabolica ma iperbolica, si veda il Capitolo 6.

L'equazione di Black e Scholes. Un esempio famoso di equazione parabolica, in un certo senso simile all'equazione del calore, è l'*equazione di Black e Scholes*

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0. \quad (5.65)$$

Si tratta di un'equazione usata in finanza matematica, che ha origine stocastica; qui u rappresenta il valore di un'opzione, t il tempo, x il prezzo dell'opzione, $\sigma \geq 0$ la volatilità e $r \geq 0$ il tasso di interesse. Si noti che il

termine diffusivo ha segno *positivo* e suggerirebbe di considerarla analoga ad una equazione del calore all'indietro. In effetti, l'equazione (5.65) è associata ad un problema ai valori *finali*, e questo la rende ben posta. Si veda [41, §2.9] per ulteriori informazioni.

Si noti che l'equazione (5.65) è lineare, benché a coefficienti non costanti. In particolare il coefficiente di diffusione $a = a(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2$ dipende da x .

L'equazione dei mezzi porosi. L'equazione dei mezzi porosi è, in un certo senso, la più semplice estensione non lineare dell'equazione del calore. Essa è, per $m > 1$,

$$u_t - \Delta(u^m) = 0, \quad (5.66)$$

o, mettendo in evidenza il coefficiente di diffusione $a = a(u)$,

$$u_t - \operatorname{div}(a(u)Du), \quad a(u) = mu^{m-1}.$$

Essa modella tipicamente flussi fluidi in mezzi porosi ma anche fenomeni di radiazione termica in plasmi; in effetti questa equazione ha svariate applicazioni, ad esempio in biologia. A causa della forma particolare del termine non lineare e per le applicazioni, solo le soluzioni positive hanno importanza. Si veda [47] per una trattazione esaustiva.

Per $m = 1$ si ritrova l'equazione del calore. Si noti che il coefficiente di diffusione a non solo non è più costante, ma dipende da u ; pensando intuitivamente ad u come ad una concentrazione, il termine $a(u)$ prescrive che la diffusione è tanto più rapida (coefficiente di diffusione più grande, si ricordi l'Esercizio 5.2.2) quanto più u è grande: a maggior concentrazione corrisponde maggior diffusione. In particolare, a concentrazione 0 non vi è diffusione.

L'equazione (5.66) è un tipico esempio di una equazione parabolica *degenerate*: la parabolicità è persa nei punti in cui $u = 0$.

L'equazione (5.66) nel caso $m < 1$ l'equazione è chiamata equazione della diffusione rapida (*fast diffusion equation*). Si noti che in questo caso il coefficiente di diffusione è singolare in 0, e questo rende conto del nome dell'equazione. Si veda ancora [47] per maggiori informazioni su questa equazione.

L'equazione di Perona-Malik. Un'altra famosa equazione "parabolica", di applicazione nella teoria di ricostruzione delle immagini, è l'*equazione di Perona-Malik*

$$u_t = \operatorname{div}(c(|Du|^2)Du). \quad (5.67)$$

In questo caso u rappresenta la distribuzione delle tonalità di grigio in un'immagine in bianco e nero da ricostruire. Per semplicità consideriamo il caso

$n = 1$

$$u_t = (c(u_x^2)u_x)_x. \quad (5.68)$$

Il coefficiente di diffusione in questo caso è $c(u_x^2)$ e dipende da u_x . Si ha

$$(c(u_x^2)u_x)_x = 2c'(u_x^2)u_x^2u_{xx} + c(u_x^2)u_{xx} = (2c'(u_x^2)u_x^2 + c(u_x^2))u_{xx}.$$

Pertanto l'equazione di Perona-Malik può essere vista come un'equazione del calore quando

$$2c'(u_x^2)u_x^2 + c(u_x^2) > 0$$

Tipicamente nelle applicazioni si sceglie

$$c(s) = e^{-s} \quad \text{o} \quad c(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Nel primo caso, per esempio, si ha che $c'(s) = -e^{-s}$ e dunque

$$a = -2e^{-u_x^2}u_x^2 + e^{-u_x^2} = (1 - 2u_x^2)e^{-u_x^2}.$$

Pertanto l'equazione (5.68) si comporta come un'equazione del calore quando $a > 0$, cioè se $u_x^2 < \frac{1}{2}$ (piccole variazioni dei grigi) mentre si comporta come un'equazione del calore all'indietro se $a < 0$, cioè se $u_x^2 > \frac{1}{2}$ (grandi variazioni dei grigi).

Capitolo 6

L'equazione delle onde

In questo capitolo studieremo l'equazione delle onde, detta anche equazione di d'Alembert. Ci riferiremo come nei capitoli precedenti a [10]; si veda anche [13, 24].



D'Alembert

6.1 Introduzione

L'equazione delle onde è l'equazione

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (6.1)$$

la cui versione non omogenea diventa

$$u_{tt} - \Delta u = f. \quad (6.2)$$

Come nei capitoli precedenti, qui $t > 0$ è una variabile scalare e $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ una variabile spaziale, dove U è aperto. La funzione incognita è $u : \bar{U} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e Δ è il Laplaciano nelle variabili spaziali x . Infine la funzione $f : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è supposta data. L'equazione (6.1) è spesso abbreviata scrivendo $\square u = 0$, ma useremo tale notazione solo di tanto in tanto.

Da un lato l'equazione (6.1) può ricordare l'equazione di Laplace, ed in effetti le soluzioni stazionarie dell'equazione delle onde devono soddisfare l'equazione di Laplace, ma in realtà essa ne è profondamente diversa. Questo è dovuto al fatto che il termine temporale u_{tt} è ora dello stesso ordine del Laplaciano (diversamente dall'equazione del calore) e tale derivata seconda non ha lo stesso segno di quelle spaziali.

Esempio 6.1.1 (Un'interpretazione fisica dell'equazione delle onde)

L'equazione delle onde trova una tipica applicazione nei fenomeni ondulatori; essa modella le oscillazioni di una corda vibrante se $n = 1$, di una membrana se $n = 2$ e, più in generale, di un corpo elastico se $n = 3$. In tutti

questi casi $u(x, t)$ rappresenta lo spostamento, al tempo $t \geq 0$, di un punto del corpo in questione che ha x come posizione di quiete; si veda la Figura 6.1 nel caso di una corda vibrante vincolata agli estremi 0 e L .

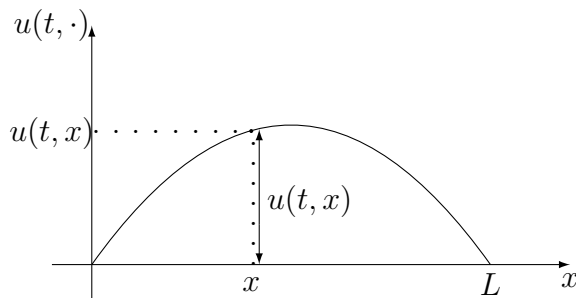


Figura 6.1: La corda vibrante.

Diamo ora un'interpretazione approssimativa dell'equazione delle onde analoga a quella data per l'equazione di Laplace e del calore. Pensiamo in particolare al moto di un corpo elastico che a riposo occupa la posizione data dall'aperto U .

Sia $V \subset U$ un aperto regolare contenuto in U e ν il versore normale esterno al bordo di V . L'accelerazione in V (cioè della parte di corpo che a riposo giace in V) è data da

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u \, dx = \int_V u_{tt} \, dx,$$

mentre la forza elastica di contatto su ∂V è

$$- \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS.$$

Il segno meno è dovuto al fatto che ν è diretto esternamente a ∂V . Se supponiamo per semplicità che la densità di massa sia 1, la legge di Newton impone

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u \, dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS.$$

Applicando il Teorema della divergenza e derivando sotto il segno di integrale deduciamo allora, dall'arbitrarietà di V , che

$$u_{tt} = - \operatorname{div} F \quad \text{in } U.$$

Nel caso di piccole deformazioni Du , si può linearizzare F tramite l'espressione $F(u) \sim -c^2 Du$. Infatti a spostamento nullo corrisponde una forza nulla e

se, ad esempio, Du punta verso l'esterno (il corpo si sta dilatando), allora la forza elastica si oppone al moto puntando verso l'interno. Deduciamo allora

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad (6.3)$$

da cui (6.1) nel caso $c = \pm 1$. Si noti che c ha le dimensioni fisiche $[\text{m}][\text{s}]^{-1}$, cioè di una *velocità*. Le due derivate temporali e il modello fisico suggeriscono che il problema corretto per l'equazione (6.2) sia il problema ai valori iniziali, con due condizioni iniziali.

Nel seguito, invece di cercare delle soluzioni particolari dell'equazione omogenea (6.1), come abbiamo già fatto nel caso dell'equazione di Laplace e dell'equazione del calore, risolviamo dapprima il problema ai valori iniziali nel caso $n = 1$, facendo poi vedere come lo stesso problema in dimensioni spaziali maggiori possa essere ricondotto a questo tramite un procedimento induttivo (sebbene complicato). Questo approccio mostrerà che le soluzioni dell'equazione delle onde sono molto diverse a seconda che la dimensione dello spazio sia pari o dispari.

Esercizio 6.1.1 (La regola di Stokes) [10, §2.5-18] Sia $u \in C^3(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ una soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = 0, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Provare allora che $v = u_t$ risolve

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v = h, \quad v_t = 0 & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Questo semplice risultato è chiamata *regola di Stokes*.

Esercizio 6.1.2 (Le equazioni di Maxwell) [10, §2.5-21] Consideriamo i campi elettrico $E = (E^1, E^2, E^3)$ e magnetico $B = (B^1, B^2, B^3)$; in assenza di sorgenti di carica e di corrente essi sono soluzioni di classe $C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ delle equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} E_t &= c^2 \text{rot } B, \\ B_t &= -\text{rot } E, \\ \text{div } E &= 0, \\ \text{div } B &= 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

in $\mathbb{R}^3$, dove c è la velocità della luce. Provare che allora E e B soddisfano le equazioni delle onde vettoriali

$$E_{tt} - c^2 \Delta E = 0 \quad \text{e} \quad B_{tt} - c^2 \Delta B = 0. \quad (6.5)$$

Esercizio 6.1.3 (L'equazione dell'elasticità lineare) [10, §2.5-21] Sia $u = (u^1, u^2, u^3)$ una soluzione di classe C^3 dell'equazione (vettoriale) dell'elasticità lineare

$$u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) D(\operatorname{div} u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

Le costanti λ e μ sono dette *costanti di Lamé*; si veda [8] per maggiori informazioni. Provare allora che

$$v := \operatorname{div} u \quad \text{e} \quad w := \operatorname{rot} u$$

risolvono entrambi un'equazione delle onde (scalare per v , vettoriale per w) ma con diverse velocità di propagazione.

Esercizio 6.1.4 (L'equazione delle onde smorzata) [10, §2.5-22] Supponiamo di avere un flusso unidimensionale di particelle, alcune delle quali si muovono verso destra con velocità $c > 0$, e le altre verso sinistra con velocità $-c$. Sia u la densità delle particelle che si muovono verso destra e v la densità di quelle che si muovono verso sinistra. Supponiamo inoltre che le particelle possano invertire la loro direzione, assumendo velocità opposta, e che questo accada ad un tasso $d > 0$. Le funzioni u e v devono allora soddisfare il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t + cu_x = d(v - u), \\ v_t - cv_x = d(u - v). \end{cases} \quad (6.6)$$

Giustificare il modello e dimostrare che, se u e v sono di classe C^2 , allora entrambe soddisfano l'equazione delle onde smorzata

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} + 2dw_t = 0. \quad (6.7)$$

Si giustifichi l'aggettivo *smorzato* dato all'equazione di sopra supponendo $w = w(t)$ e risolvendo la relativa equazione differenziale ordinaria.

Osservazione 6.1.1 (Equazione del telegrafo) L'equazione (6.7) è anche detta *equazione del telegrafo*. Il nome di *equazione del telegrafo* deriva dal fatto che essa modella le variazioni del potenziale elettrico w in una linea di trasmissione senza perdite. Consideriamo infatti una linea di trasmissione senza perdite, parametrizzata da x , di resistenza R , capacità C e induttanza L (per unità di lunghezza); sia i la corrente lungo la linea. Il bilancio di carica si scrive allora

$$i_x + Cw_t = 0$$

e la legge di Ohm è

$$w_x + Li_t + Ri = 0.$$

Eliminiamo i derivando la prima equazione rispetto a t , la seconda rispetto a x e prendendo un'opportuna combinazione lineare delle due. Otteniamo

$$LCw_{tt} + RCw_t - w_{xx} = 0.$$

Notiamo come lo smorzamento sia dovuto alla resistenza R ; se infatti $C = 0$ l'equazione diventa banale.

Osservazione 6.1.2 (Un modello di traffico a due corsie) Una leggera variante del sistema (6.6) può descrivere in maniera semplificata un flusso di traffico veicolare a due corsie. Si consideri infatti il sistema

$$\begin{cases} u_t + c_1 u_x = d(v - u), \\ v_t + c_2 v_x = d(u - v), \end{cases}$$

dove $0 < c_1 < c_2$. In questo caso u e v rappresentano rispettivamente le densità di auto che avanzano lungo un'autostrada (stesso verso di percorrenza!) con velocità c_1 e c_2 ; le prime sono più lente e possono essere pensate collocate nella corsia di destra, le seconde sono più rapide e possiamo pensarle sulla corsia di sorpasso. In questo caso i termini di sorgente rappresentano i cambi di corsia; si veda la Figura 6.2.

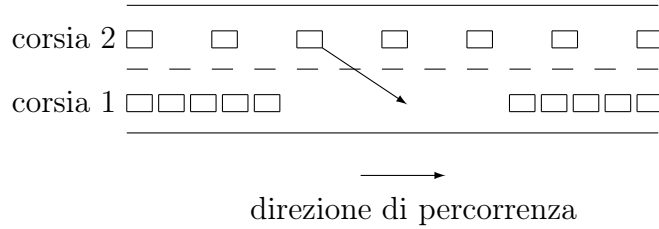


Figura 6.2: Flusso veicolare a due corsie.

Si noti che, in questo esempio come nel sistema (6.6), la densità totale $\rho = u + v$ è conservata: in altre parole, non vi sono né incidenti né caselli di entrata o di uscita. Per dimostrarlo, sommiamo le due equazioni e notiamo che ρ soddisfa l'equazione

$$\rho_t + (c_1 u + c_2 v)_x = 0.$$

Se supponiamo per semplicità che sia u che v siano regolari e a supporto compatto in x per ogni t , si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \rho_t(x, t) dx = - \int_{\mathbb{R}} (c_1 u + c_2 v)_x dx = [c_1 u + c_2 v]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Pertanto la quantità totale di veicoli $\int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) dx$ è costante nel tempo e in particolare

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(x, 0) dx.$$

In questo caso, diversamente dall'Esempio 6.1.4, non si riescono a scrivere u e v come due soluzioni di due equazioni delle onde (eventualmente smorzate).

6.2 Il caso $n = 1$ e la formula di d'Alembert

Consideriamo l'equazione delle onde in una dimensione di spazio

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (6.8)$$

e cerchiamo formalmente una soluzione. L'idea per risolvere (6.8) nasce dall'osservazione che se u risolve l'equazione (6.8) possiamo "fattorizzare" l'equazione e scrivere

$$u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t + \partial_x) \underbrace{(\partial_t - \partial_x)u}_v = 0. \quad (6.9)$$

Per risolvere (6.9) basta allora risolvere una dopo l'altra le due equazioni del trasporto

$$(\partial_t + \partial_x)v = 0, \quad (6.10)$$

$$(\partial_t - \partial_x)u = v, \quad (6.11)$$

in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Infatti, se in (6.9) poniamo

$$v(x, t) = (\partial_t - \partial_x)u(x, t), \quad (6.12)$$

allora v deve risolvere l'equazione del trasporto omogenea (6.10). Ricordando (3.5) con $b = 1$, la soluzione di questa equazione è

$$v(x, t) = v^0(x - t),$$

dove $v^0(x) = v(x, 0)$. Da (6.12) segue che u a sua volta deve risolvere l'equazione del trasporto non omogenea (6.11), cioè

$$u_t - u_x = v^0(x - t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Poniamo $u^0(x) = u(x, 0)$; con le notazioni di (3.7) si ha $f(x, t) = v^0(x - t)$, $b = -1$ e dunque

$$f((x + (t - s), s) = v^0(x + (t - s) - s) = v^0(x + t - 2s).$$

Deduciamo, col cambiamento di variabili $x + t - 2s = y$, $ds = -1/2 dy$, che

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^0(x + t) + \int_0^t v^0(x + t - 2s) ds = u^0(x + t) - \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} v^0(y) dy \\ &= u^0(x + t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v^0(y) dy. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Consideriamo allora il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.14)$$

dove g e h sono funzioni assegnate. Per determinare a e b in (6.13) usiamo le condizioni iniziali in (6.14). Si ha $u^0(x) = g(x)$ e

$$v^0(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x).$$

Da (6.13) deduciamo allora

$$u(x, t) = g(x + t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy$$

e quindi

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy. \quad (6.15)$$

La formula (6.15) è chiamata *formula di d'Alembert*. Abbiamo pertanto dedotto che se u risolve (6.14), per g e h abbastanza regolari, allora deve valere la formula di rappresentazione (6.15).

Teorema 6.2.1 (Soluzione dell'equazione delle onde, caso $n = 1$) *Siano $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ e u definita dalla formula di d'Alembert (6.15). Allora*

(i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$;

(ii) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$;

(iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}, t > 0}} u(x, t) = g(x^0)$ e $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}, t > 0}} u_t(x, t) = h(x^0)$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dobbiamo solo verificare che la formula di d'Alembert (6.15) fornisce una funzione con le proprietà elencate qui sopra. Si tratta di una verifica immediata; in particolare il punto (ii) segue per costruzione mentre, per il punto (iii),

$$u_t(x, 0) = \left\{ \frac{1}{2} (g'(x + t) - g'(x - t)) + \frac{1}{2} (h(x + t) + h(x - t)) \right\}_{|t=0} = h(x).$$

□

Osservazione 6.2.1 (Regolarità) Se $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$ allora in effetti $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; si ricordi l'Osservazione 3.1.1. La funzione u definita da (6.15) assume i valori iniziali g e h in senso *puntuale*, e non solo in senso di limite, come enunciato nel Teorema 6.2.1; infatti la u è di classe C^2 fino al tempo $t = 0$ incluso.

Se $g \in C^k(\mathbb{R})$ e $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ allora $u \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ma in generale u non è più regolare di così. Diversamente dall'equazione di Laplace e del calore, l'equazione delle onde *non* ha un effetto regolarizzante sulla soluzione.

Osservazione 6.2.2 (Velocità finita di propagazione) Il valore di u nel punto (x, t) dipende *solo* dai valori di g nei punti $x \pm t$ (in effetti, dalla loro media aritmetica) ma da *tutti* i valori di h compresi nel segmento di estremi $x - t$, $x + t$; si veda la Figura 6.3. Questo risultato è diverso da quanto visto, ad esempio, per l'equazione del calore, in cui la positività del dato iniziale in un punto implicava la positività della soluzione in ogni punto dello spazio e per ogni tempo, si veda il Corollario 5.4.1 sulla velocità infinita di propagazione.

Per l'equazione delle onde questo fenomeno è la *velocità finita di propagazione*: a causa della normalizzazione fatta nell'Introduzione, l'informazione viaggia dal punto x con velocità ± 1 , a destra e a sinistra; si ricordi l'interpretazione data alla soluzione nel caso dell'equazione del trasporto. Per l'equazione (6.3) l'informazione si propagerà con velocità $\pm c$.

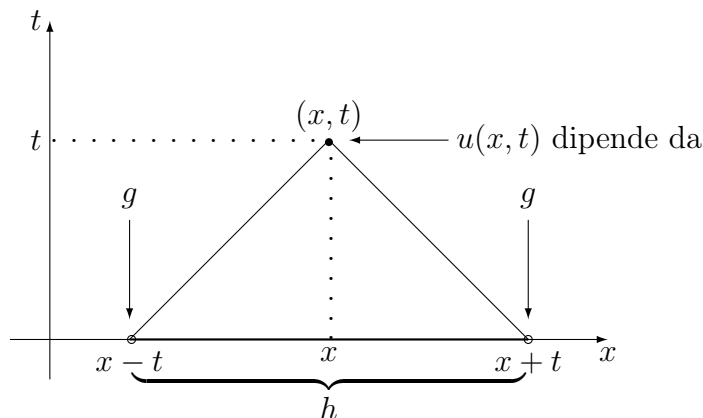


Figura 6.3: Interpretazione della formula di d'Alembert: il valore di u nel punto (x, t) dipende dai valori di g nei due punti $x \pm t$, indicati con un cerchietto vuoto, e da tutti i valori di h nel segmento di estremi $x - t$, $x + t$, raffigurato in tratto più grosso.

Osservazione 6.2.3 (Sovrapposizione) La formula di d'Alembert (6.15) si può anche scrivere sotto la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(g(x+t) + \int_0^{x+t} h(y) dy \right) + \frac{1}{2} \left(g(x-t) + \int_{x-t}^0 h(y) dy \right) \\ &= F(x+t) + G(x-t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

per opportune funzioni F e G . La scrittura (6.16) rappresenta la somma (fisicamente: la sovrapposizione) di due onde che si muovono con velocità ± 1 ; in altri termini, il grafico di $F(x+t)$ ($G(x-t)$) si deduce da quello di $F(x)$ ($G(x)$, rispettivamente) per traslazione rigida verso sinistra (destra) di t . Viceversa, è semplice verificare che date due funzioni $F(x)$ e $G(x)$ di classe $C^2(\mathbb{R})$ allora la funzione

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$$

risolve l'equazione delle onde. Si noti che le funzioni $F(x+t)$ e $G(x-t)$ sono due soluzioni generali delle equazioni $u_t - u_x = 0$ e $u_t + u_x = 0$, rispettivamente.

Esempio 6.2.1 A titolo di esempio consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.17)$$

nel caso $g(x) = h(x) = \frac{1}{1+x^2}$. In questo caso la formula di d'Alembert dà

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right) + \frac{1}{2} (\arctg(x+t) - \arctg(x-t)).$$

Al fine di evidenziare i diversi ruoli di g e h , la Figura 6.4 riporta i grafici a vari tempi della soluzione u_1 relativa ai dati iniziali $u = g$, $u_t = 0$, della soluzione u_2 relativa ai dati iniziali $u = 0$, $u_t = h$, e infine della soluzione $u = u_1 + u_2$ di (6.17).

Esercizio 6.2.1 [10, §2.5-19] In questo esercizio dimostriamo la formula di d'Alembert in un modo alternativo.

- (i) Provare che la soluzione generale dell'equazione $u_{xy} = 0$ è $u(x, y) = F(x) + G(y)$, dove F e G sono funzioni arbitrarie.
- (ii) Usando il cambiamento di variabili $\xi = x+t$, $\eta = x-t$, mostrare che $u_{tt} - u_{xx} = 0$ se e soltanto se $u_{\xi\eta} = 0$.

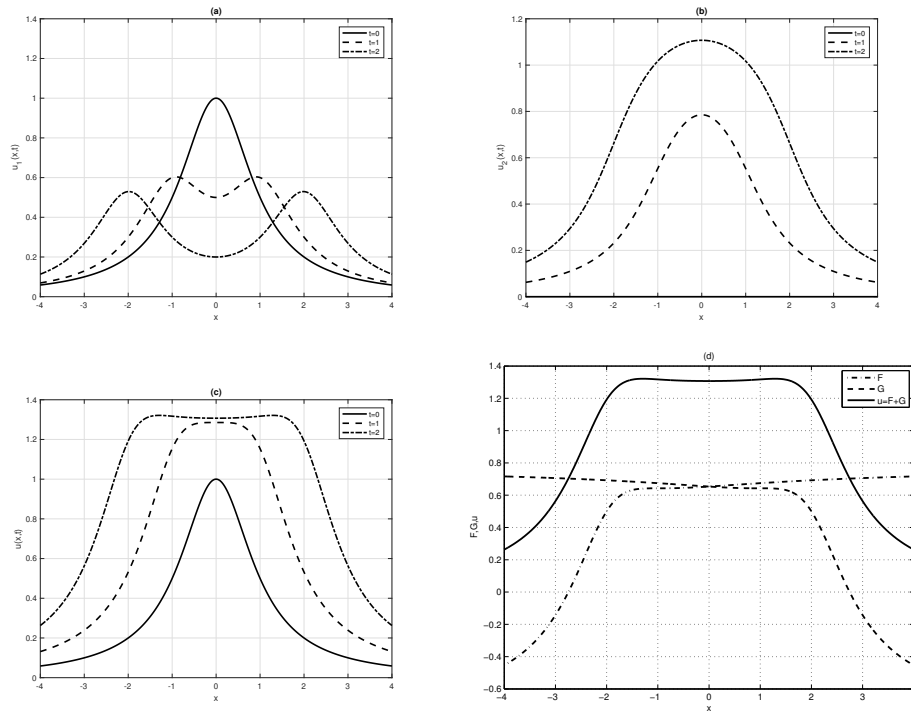


Figura 6.4: Grafici a vari istanti di tempo. (a): la soluzione u_1 relativa ai dati iniziali $u = g$, $u_t = 0$; (b) la soluzione u_2 relativa ai dati iniziali $u = 0$, $u_t = h$; la soluzione $u = u_1 + u_2$ di (6.17); (d): le funzioni $F(x+t)$, $G(x-t)$ e $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$ a $t = 2$. Qui $g(x) = h(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- (iii) Usare i due punti precedenti per dare una dimostrazione alternativa della formula di d'Alembert.
- (iv) Sotto quali condizioni sui dati iniziali g e h la soluzione u del problema (6.14) è un'onda che si muove verso destra (sinistra)?

Facciamo ora vedere una applicazione della formula di d'Alembert per la risoluzione di un problema misto. Consideriamo infatti il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = 0 & \text{su } \{x = 0\} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (6.18)$$

che modella le oscillazioni di una corda vibrante di lunghezza infinita, vincolata nel punto 0, con posizione iniziale g e velocità iniziale h . Si confronti con l'analogo Esercizio 5.3.6 per l'equazione del calore.

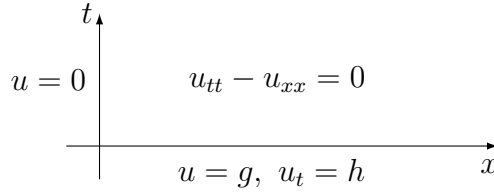


Figura 6.5: Il problema misto (6.18).

Supponiamo che $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}} \times [0, \infty))$ sia una soluzione del problema (6.18); in particolare allora $g \in C^2([0, \infty))$ e $h \in C^1([0, \infty))$. A causa della continuità di u in $(0, 0)$, dalla prima condizione iniziale e dalla condizione al bordo segue che

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} u(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0), \\ u(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0+} u(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto deduciamo la condizione necessaria $g(0) = 0$. Analogamente, dalla seconda condizione iniziale e dalla condizione al bordo si ha

$$\begin{aligned} u_t(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} u_t(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = h(0), \\ u_t(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0+} u_t(0, t) = 0, \end{aligned}$$

da cui $h(0) = 0$. Infine, sfruttando l'equazione,

$$\begin{aligned} u_{tt}(0, 0) &= u_{xx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} u_{xx}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} g''(x) = g''(0), \\ u_{tt}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0+} u_{tt}(0, t) = 0, \end{aligned}$$

da cui $g''(0) = 0$. Abbiamo quindi dedotto le condizioni necessarie di compatibilità

$$g(0) = h(0) = 0, \quad g''(0) = 0. \quad (6.19)$$

Corollario 6.2.1 (Un problema misto per l'equazione delle onde) Per $g \in C^2([0, \infty))$ e $h \in C^1([0, \infty))$ supponiamo che valgano le condizioni di compatibilità (6.19). Allora il problema (6.18) ha un'unica soluzione $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, \infty))$, che è data da

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{se } 0 \leq t \leq x, \\ \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{se } 0 \leq x \leq t. \end{cases} \quad (6.20)$$

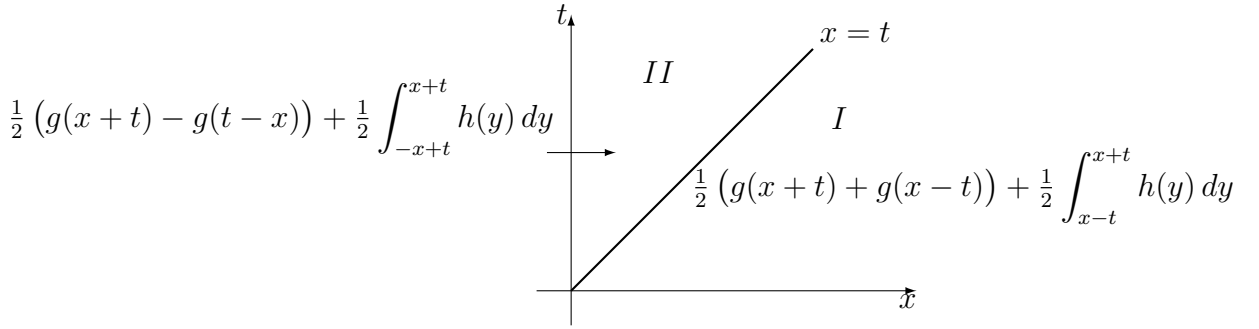


Figura 6.6: La soluzione del problema misto (6.18). In I vale $0 \leq t \leq x$, in II vale $0 \leq x \leq t$.

Dimostrazione. Si veda la Figura 6.6. Per risolvere il problema (6.18) usiamo il metodo della *riflessione dispari*, già impiegato nell'Esercizio 5.3.6. Più precisamente, definiamo

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0, \\ -g(-x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \geq 0, \\ -h(-x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e quindi

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{se } x \geq 0, t \geq 0, \\ -u(-x, t) & \text{se } x < 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Si noti che $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ sono continue in 0 per l'ipotesi (6.19)_{1,2}. La funzione $\tilde{g}$ è dispari e dunque $\tilde{g}'$ è pari in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre la derivata destra $\tilde{g}'_+(0)$ esiste per

ipotesi e allora esiste anche $\tilde{g}'_-(0) = g'_+(0) = g'(0)$; pertanto $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$ e lo stesso vale per $\tilde{h}$. Affinché $\tilde{g}$ sia derivabile due volte in 0 occorre infine (6.19)₃; infatti $\tilde{g}''$, se esiste, deve essere una funzione dispari e pertanto $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ solo se $g''(0) = 0$.

Pertanto $u \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, \infty))$ risolve (6.18) se e soltanto se $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ risolve

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \quad \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (6.21)$$

La formula (6.15) di d'Alembert dà

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy. \quad (6.22)$$

Vogliamo ora dedurre da (6.22) un'espressione per la soluzione u di (6.18). Si noti che per ogni $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ si ha $x+t \geq 0$; se inoltre $0 \leq x \leq t$ allora $x-t \leq 0$. La formula (6.20) è allora evidente per quanto riguarda il primo addendo da quanto osservato sopra; per il secondo, si noti che, se $0 \leq x \leq t$, facendo il cambiamento di variabili $z = -y$ si trova

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy &= \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy + \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy = \int_{x-t}^0 -h(-y) dy + \int_0^{x+t} h(y) dy \\ &= \int_{-x+t}^0 h(z) dz + \int_0^{x+t} h(y) dy = \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy. \end{aligned}$$

Questo dimostra il corollario. □

Esercizio 6.2.2 Cosa succede se una delle condizioni di compatibilità (6.19) viene a mancare?

Osservazione 6.2.4 Consideriamo per fissare le idee il caso $h = 0$. La formula (6.20) dà allora

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) & \text{se } 0 \leq t \leq x, \\ \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) & \text{se } 0 \leq x \leq t, \end{cases} \quad (6.23)$$

che si interpreta così: il “disturbo iniziale” g alla quiete si propaga verso destra e verso sinistra con velocità 1, si veda la Figura 6.7 per un esempio e si ricordi l'Osservazione 6.2.3. Man mano che l'onda che si muove a sinistra arriva al punto $x = 0$, essa rimbalza indietro, assumendo valori negativi.

Per capire meglio questo punto, fissiamo un punto x^0 di cui vogliamo seguire l'evoluzione, ad esempio il punto di massimo assoluto della funzione

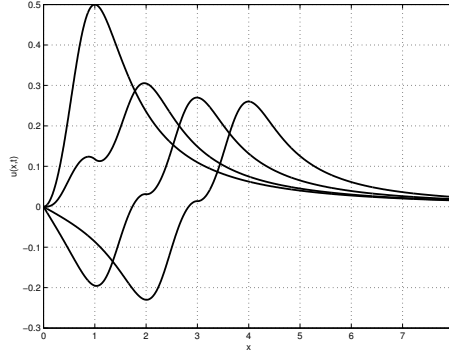


Figura 6.7: Grafici della soluzione del problema (6.18) ai tempi $t = 0, 1, 2, 3$. I grafici sono caratterizzati dai picchi di massimo decrescenti per t che cresce. In questo caso $g(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$, $h = 0$. Si noti l'onda che si propaga a destra; l'onda che si propaga a sinistra viene riflessa dal bordo diventando negativa.

g . Per $t > 0$ abbastanza piccolo, il punto x^0 dà luogo a due punti di massimo relativo. Mentre il punto di massimo relativo di destra continua a propagarsi verso destra, quello di sinistra arriva a 0 e rimbalza verso destra, diventando però un punto di minimo relativo.

Più precisamente ancora, si consideri la Figura 6.8(a). Lungo la retta a destra $\mathcal{D}$, cioè $x = x^0 + t$, si ha $x - t = x^0$ e dunque il termine $g(x - t)$ è costante; analogamente, lungo la retta a sinistra $\mathcal{S}$, cioè $x = x^0 - t$, ovvero $x + t = x^0$, il termine $g(x + t)$ è costante. A sua volta, lungo la retta $\mathcal{R}$, cioè $x = -x^0 + t$, si ha $t - x = x^0$ e dunque il termine $g(t - x)$ è costante; questo termine ha però un segno meno in (6.23), da cui la parte negativa di u nella Figura 6.7.

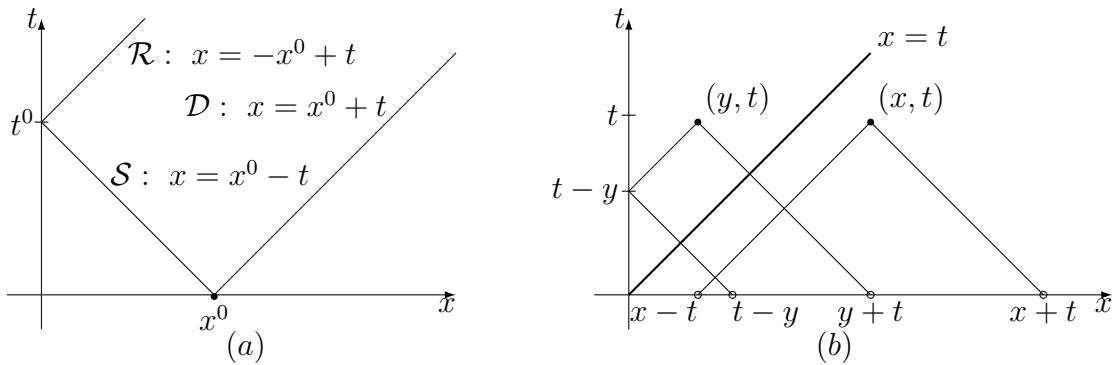


Figura 6.8: (a): caratteristiche del problema misto (6.18); (b): dominio di dipendenza della soluzione del problema misto (6.18).

Come nell'Osservazione 6.2.2 e in Figura 6.3, si noti da quali valori di g dipende la soluzione u in un punto (x, t) ; si veda la Figura 6.8(b). Se $x > t$ la

soluzione dipende dai valori di g corrispondenti ai punti intercettati sull'asse x dalle rette di pendenza ± 1 e uscenti dal punto (x, t) ; se invece $x < t$ uno dei due punti è ottenuto per riflessione.

L'interpretazione del termine aggiuntivo dovuto ad h è completamente analoga. In particolare, per quanto riguarda il valore di u nel punto (x, t) , esso dipenderà dall'integrale di h in $[x - t, x + t]$ o in $[t - y, y + t]$, a seconda che $x \geq t$ o $y \leq t$.

6.3 Il problema ai valori iniziali

Nella sezione precedente abbiamo studiato il caso in cui la dimensione spaziale era 1. Il caso in cui la dimensione spaziale è maggiore di 1 è purtroppo più complicato e non può essere risolto così semplicemente. Più precisamente, consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.24)$$

dove la regolarità delle funzioni g e h sarà specificata in seguito. Il piano d'attacco del problema (6.24) sarà il seguente:

1. introdurre le medie sferiche di u e dimostrare che soddisfano l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux;
2. nel caso n dispari, ricondurre l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux ad una equazione delle onde in dimensione 1, che si risolve con la formula di d'Alembert per il problema misto;
3. dedurre il caso n pari dal caso $n + 1$ dispari in cui una variabile non compare.

Questo metodo, dovuto a Hadamard, è detto *metodo della discesa*, si veda [24]. Si noti che questo metodo *non* usa il concetto di soluzione fondamentale per l'equazione delle onde.

6.3.1 L'equazione di Eulero-Poisson-Darboux

In questa sezione ricordiamo la definizione delle medie sferiche e introduciamo l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux. Le medie sferiche sono definite esattamente come nella Sezione 4.4.1, cioè

$$\bar{u}(x; r, t) = \oint_{S(x, r)} u(y, t) dS(y)$$

e analogamente

$$\bar{g}(x; r) = \oint_{S(x, r)} g(y) dS(y), \quad \bar{h}(x; r) = \oint_{S(x, r)} h(y) dS(y),$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e $r > 0$. Come nella Sezione 4.4.1 fisseremo $x \in \mathbb{R}^n$ e considereremo $\bar{u}$ (e $\bar{g}$, $\bar{h}$) come funzioni di r e t (di r , rispettivamente). Per questa ragione la dipendenza da x e da t sarà spesso omessa. Il Lemma 4.4.1 vale naturalmente anche per le medie sferiche introdotte qui sopra, dove la nuova variabile t appare semplicemente come un parametro.

Lemma 6.3.1 (L'equazione di Eulero-Poisson-Darboux) *Sia $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ una soluzione di (6.24). Allora $\bar{u} \in C^m(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, \infty))$ e $\bar{u}$ soddisfa il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{rr} - \frac{n-1}{r} \bar{u}_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h} & \text{su } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (6.25)$$



Eulero

Osservazione 6.3.1 L'equazione (6.25)₁ è detta *equazione di Eulero-Poisson-Darboux*. Si noti che il termine $\bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r} \bar{u}_r$ è precisamente la parte radiale del Laplaciano in coordinate polari, si veda (4.7), e dunque l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux non è nient'altro che l'equazione delle onde in coordinate polari. In altre parole, pertanto, il Lemma 6.3.1 stabilisce che se u risolve l'equazione delle onde allora $\bar{u}$ risolve l'equazione delle onde in coordinate polari. Si noti infine che il problema (6.25) manca della condizione al contorno (non abbiamo informazioni su $\bar{u}(x; 0, t) = u(x, t)$, si veda (4.23)₁), presente invece nel problema (6.18); questa condizione comparirà invece nel problema (6.28) per la funzione $\tilde{u}$.

Si noti infine che l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux non è una equazione delle onde smorzata, si veda l'Esercizio 6.1.4: essa contiene infatti una derivata rispetto a r (variabile spaziale), non rispetto a t .

Dimostrazione del Lemma 6.3.1. Il fatto che $\bar{u} \in C^m(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, \infty))$ è conseguenza immediata del Lemma 4.4.1 e dell'Osservazione 4.4.3.

Dimostriamo ora che $\bar{u}$ soddisfa il problema (6.25). Poiché u soddisfa l'equazione delle onde, da (4.21) si ha

$$\bar{u}_r = \frac{r}{n} \oint_{B(x,r)} u_{xx} dy = \frac{r}{n} \oint_{B(x,r)} u_{tt} dy = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy \quad \text{Darboux}$$

e dunque

$$r^{n-1}\bar{u}_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy.$$

Derivando rispetto a r otteniamo, per il Corollario 1.4.1,

$$(r^{n-1}\bar{u}_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{S(x,r)} u_{tt} dS(y) = r^{n-1} \oint_{S(x,r)} u_{tt} dS(y) = r^{n-1}\bar{u}_{tt}.$$

D'altro canto,

$$(r^{n-1}\bar{u}_r)_r = (n-1)r^{n-2}\bar{u}_r + r^{n-1}\bar{u}_{rr} = r^{n-1} \left(\bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r}\bar{u}_r \right),$$

da cui, dividendo per r^{n-1} , si deduce che $\bar{u}$ soddisfa l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux. Infine, è ovvio che $\bar{u}$ soddisfa le condizioni iniziali (6.25)₂. $\square$

6.3.2 Il caso $n = 3, 2$: le formule di Kirchhoff e Poisson

Per illustrare il procedimento generale delineato nella sezione precedente, consideriamo prima il caso $n = 3$. Lo scopo è di ridurre il problema ai valori iniziali per l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux, per le medie sferiche $\bar{u}$ di una soluzione u , ad un problema misto per l'equazione delle onde in dimensione 1.

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ una soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (6.26)$$

Indichiamo con

$$\tilde{u} = r\bar{u}, \quad \tilde{g} = r\bar{g}, \quad \tilde{h} = r\bar{h}, \quad (6.27)$$

(più precisamente $\tilde{u}(x; r, t) = r\bar{u}(x; r, t)$, $\tilde{g}(x; r) = r\bar{g}(x; r)$, $\tilde{h}(x; r) = r\bar{h}(x; r)$) le medie sferiche delle funzioni u, g, h , moltiplicate per r .



Lemma 6.3.2 Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ una soluzione del problema ai valori iniziali (6.26). Allora la funzione $\tilde{u} \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, \infty))$ risolve il problema misto per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \quad \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{su } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{su } \{r = 0\} \times (0, \infty). \end{cases} \quad (6.28)$$

Dimostrazione. La regolarità di $\tilde{u}$ segue dal Lemma 4.4.1 e dalla definizione (6.27). Dal Lemma 6.3.1 si ha direttamente che

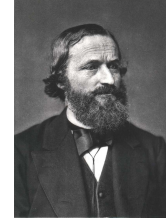
$$\tilde{u}_{tt} = r\bar{u}_{tt} = r\left(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{u}_r\right) = r\bar{u}_{rr} + 2\bar{u}_r = (\bar{u} + r\bar{u}_r)_r = \tilde{u}_{rr}. \quad (6.29)$$

Dunque $\tilde{u}$ soddisfa l'equazione delle onde. Le condizioni iniziali e al bordo sono verificate direttamente dalla definizione (6.27). $\square$

Osservazione 6.3.2 Si noti che, nel lemma precedente, l'ipotesi $n = 3$ è stata usata *solo* nel calcolo algebrico del coefficiente $2/r$ di $\bar{u}_r$ in (6.29): solo nel caso $n = 3$ il termine $\bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r}\bar{u}_r$ si scrive come una derivata perfetta.

Possiamo ora risolvere il problema (6.26) tramite la formula di Kirchhoff. L'idea del procedimento è la seguente. Allo scopo di trovare una soluzione u di (6.26), possiamo risolvere dapprima il problema misto (6.28); una volta trovata una soluzione $\tilde{u}$, dedurremo u da (4.23)₁:

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0+} \bar{u}(x; r, t) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\tilde{u}(x; r, t)}{r}. \quad (6.30)$$



Kirchhoff

Teorema 6.3.1 (Il caso $n = 3$ e la formula di Kirchhoff)

Siano $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Allora il problema (6.26) ha un'unica soluzione $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ data, per $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$, dalla formula di Kirchhoff

$$u(x, t) = \oint_{S(x, t)} (g(y) + Dg(y) \cdot (y - x) + th(y)) dS(y). \quad (6.31)$$

Osservazione 6.3.3 Si noti che la formula di Kirchhoff (6.31) è una formula di rappresentazione del valore $u(x, t)$ fatto tramite medie *su sfere* il cui raggio è il tempo t . In altre parole, il valore di u nel punto (x, t) dipende dai valori dei dati iniziali g e h *unicamente sulla sfera di centro x e raggio t* . Chiaramente

il valore di tale raggio è legato alla velocità di propagazione ± 1 dell'equazione (6.1); nel caso dell'equazione (6.3) la media sarà fatta sulla sfera di raggio ct .

Può sorprendere che la funzione h sia moltiplicata per t , mentre la g non lo è. Questo è corretto dal punto di vista dimensionale, in quanto g ha le dimensioni di una lunghezza mentre h quelle di una velocità; dunque th ha le dimensioni di una lunghezza. Lo stesso vale per il termine $Dg(y) \cdot (y - x)$.

Si noti infine la perdita di regolarità della soluzione: occorre g di classe C^3 e h di classe C^2 per avere u di classe C^2 (diversamente da quanto succede nel caso $n = 1$, in cui non c'è perdita di regolarità, si veda il Teorema 6.2.1). Questa questione sarà approfondita nell'Osservazione 6.3.9.

Dimostrazione del Teorema 6.3.1. Il problema misto (6.28) si risolve con il Corollario 6.2.1; verifichiamo pertanto se le condizioni di compatibilità (6.19) sono soddisfatte.

Dalla definizione (6.27) segue immediatamente che $\tilde{g}(0) = \tilde{h}(0) = 0$. Inoltre, come in (6.29), si ha

$$\tilde{g}_{rr} = r\bar{g}_{rr} + 2\bar{g}_r.$$

Da (4.23)₃ si ha che $\lim_{r \rightarrow 0+} \bar{g}_{rr} = \frac{1}{3}\Delta g$ mentre (4.23)₂ implica $\lim_{r \rightarrow 0+} \bar{g}_r = 0$. In conclusione, vale $\tilde{g}_{rr}(0) = 0$ e dunque le condizioni di compatibilità (6.19) sono soddisfatte.

Applichiamo la formula (6.20) al problema misto (6.28). Più precisamente, nel caso in cui $0 \leq r \leq t$ (si ricordi (6.30) e si veda la Figura 6.9) usiamo (6.20)₂ per dedurre

$$\tilde{u}(x; r, t) = \frac{1}{2} (\tilde{g}(r+t) - \tilde{g}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{h}(y) dy, \quad 0 \leq r \leq t.$$

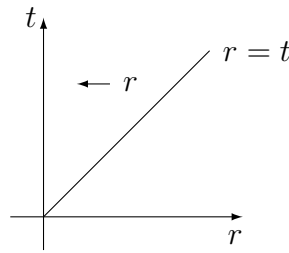


Figura 6.9: Per la dimostrazione della formula di Kirchhoff.

Pertanto da (6.30) abbiamo che, si veda l'Esercizio 6.3.1,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\tilde{g}(r+t) - \tilde{g}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{h}(y) dy \right\} = \tilde{g}_t(t) + \tilde{h}(t) = \partial_t (t\bar{g}(t)) + t\bar{h}(t) \\ &= \partial_t \left(t \oint_{S(x,t)} g(y) dS(y) \right) + t \oint_{S(x,t)} h(y) dS(y), \end{aligned} \quad (6.32)$$

che è la *formula di Kirchhoff in forma compatta*. Cerchiamo di rendere più esplicita questa formula. Da (6.32) e (4.21)₁ deduciamo

$$u(x, t) = \int_{S(x, t)} g(y) dS(y) + t \int_{S(x, t)} Dg(y) \cdot \frac{y - x}{t} dS(y) + t \int_{S(x, t)} h(y) dS(y),$$

da cui segue immediatamente (6.31). Infine, la regolarità richiesta sui dati iniziali ($g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$) per avere u di classe C^2 è conseguenza del Lemma 4.4.1: la regolarità delle media di una funzione è uguale a quella della funzione stessa. $\square$

Esercizio 6.3.1 Provare che se f è derivabile allora $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$.

Esercizio 6.3.2 [35, 36], [10, §2.5-20] Indichiamo al solito $r = |x|$. Supponiamo che esistano funzioni regolari, non identicamente nulle, $\alpha = \alpha(r)$ decrescente, detta qui *funzione di attenuazione*, e $\beta = \beta(r) \geq 0$ con $\beta(0) = 0$, detta *funzione ritardo*, tali che per ogni funzione $\phi = \phi(r) \in C^2(0, \infty)$ la funzione

$$u(x, t) = \alpha(r) \phi(t - \beta(r))$$

sia soluzione dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$. Mostrare che questo è possibile se e soltanto se $n = 1$ o $n = 3$; in tali casi calcolare esplicitamente la forma delle funzioni α e β .

Come abbiamo già notato nell'Osservazione 6.3.3, la semplice dimostrazione della riduzione dell'equazione di Eulero-Poisson-Darboux all'equazione delle onde funziona solo nel caso $n = 3$. Useremo allora il metodo di discesa di Hadamard, pensando al problema (6.24) quando $n = 2$ come ad un caso speciale del caso $n = 3$ in cui i dati non dipendono dalla variabile x_3 .



Hadamard

Teorema 6.3.2 (Il caso $n = 2$ e la formula di Poisson)

Siano $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Allora il problema (6.24) nel caso $n = 2$ ha un'unica soluzione $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ data, per $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, dalla formula di Poisson

$$u(x, t) = \frac{t}{2} \int_{B(x, t)} \frac{g(y) + Dg(y) \cdot (y - x) + th(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy. \quad (6.33)$$

Osservazione 6.3.4 Si noti che nella formula di Poisson il numeratore della funzione integranda è quello della formula di Kirchhoff. Si noti anche in questo caso la perdita di regolarità della soluzione: occorre g di classe C^3 e h di classe C^2 per avere u di classe C^2 . Si veda l'Osservazione 6.3.9.

Dimostrazione del Teorema 6.3.2. Supponiamo che $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ sia una soluzione di (6.24) nel caso $n = 2$ e “prolungiamola” ad una funzione di tre variabili spaziali in modo cilindrico, definendo

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t).$$

Chiaramente $\tilde{u}$ risolve il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \quad \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{su } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.34)$$

dove

$$\tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2), \quad \tilde{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2).$$

Per semplificare le notazioni, per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definiamo

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Con queste notazioni, dalla formula (6.32) di Kirchhoff in forma compatta abbiamo

$$u(x, t) = \tilde{u}(\tilde{x}, t) = \partial_t \left(t \oint_{\tilde{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} \right) + t \oint_{\tilde{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{h} d\tilde{S}, \quad (6.35)$$

dove $\tilde{S}(\tilde{x}, t)$ è la sfera in $\mathbb{R}^3$ di centro $\tilde{x}$ e raggio t e $d\tilde{S}$ è la misura superficiale su $\tilde{S}(\tilde{x}, t)$; si veda la Figura 6.10. Denotiamo

$$\tilde{S}^\pm(\tilde{x}, t) = \tilde{S}(\tilde{x}, t) \cap \{\pm y_3 > 0\}.$$

Le semisfere $\tilde{S}^\pm(\tilde{x}, t)$ sono chiaramente grafici delle funzioni

$$\gamma^\pm(y) = \pm \sqrt{t^2 - |y - x|^2}, \quad y \in B(x, t) \subset \mathbb{R}^2.$$

Consideriamo il primo integrale in (6.35); il secondo si tratta nello stesso modo. Incominciamo con l'osservare che

$$\oint_{\tilde{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\tilde{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} = \frac{1}{4\pi t^2} \left(\int_{\tilde{S}^+(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} + \int_{\tilde{S}^-(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} \right).$$

I due integrali a destra hanno lo stesso valore, in quanto $\tilde{g}$ non dipende da x_3 : $\tilde{g}(y, \gamma^\pm(y)) = g(y)$. Risolviamo gli integrali superficiali passando agli integrali in $\mathbb{R}^2$; si ha allora

$$\oint_{\tilde{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} = \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x, t)} g(y) \sqrt{1 + |D\gamma^+(y)|^2} dy.$$

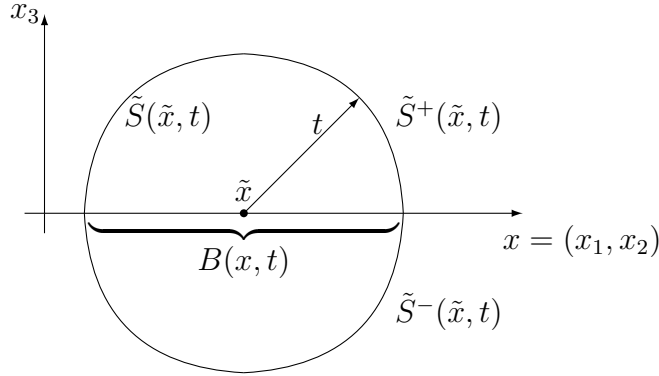


Figura 6.10: Per la dimostrazione del Teorema 6.3.2.

Poiché

$$D\gamma^+(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} (-2(y_1 - x_1), -2(y_2 - x_2)) = -\frac{1}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} (y - x),$$

$$|D\gamma^+(y)|^2 = \frac{|y - x|^2}{t^2 - |y - x|^2},$$

deduciamo

$$\sqrt{1 + |D\gamma^+(y)|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}.$$

Pertanto, ritornando agli integrali mediati,

$$\int_{\tilde{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{g} d\tilde{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy = \frac{t}{2} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy.$$

La formula (6.35) diventa allora, scritta in $\mathbb{R}^2$,

$$u(x, t) = \partial_t \left(\frac{t^2}{2} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy, \quad (6.36)$$

che è la *formula di Poisson in forma compatta*. Per rendere più esplicita la formula (6.36) dobbiamo semplificare il primo addendo. Facendo il cambiamento di variabili $y = x + tz$, dal Lemma 1.4.1 si ha

$$t^2 \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy = t^2 \int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{t^2 - t^2|z|^2}} dz = t \int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz.$$

Si ha allora, derivando, facendo il cambiamento di variabili inverso $z = \frac{y-x}{t}$, $dz = \frac{1}{t^2} dy$, e ricordando il Lemma 1.4.1,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy \right) &= \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}} dz + t \int_{B(0,1)} \frac{Dg(x+tz) \cdot z}{\sqrt{1-|z|^2}} dz \\ &= t \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy + t \int_{B(x,t)} \frac{Dg(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy. \end{aligned}$$

Da questa formula e da (6.36) segue allora la formula (6.33). $\square$

Osservazione 6.3.5 (Il principio di Huygens) Nella formula di Poisson la soluzione u è rappresentata tramite un'integrazione su un *palla*, invece che su una *sfera*, come invece era il caso della formula di Kirchhoff. Ciò vuol dire che il valore di u nel punto (x, t) dipende dai valori dei dati iniziali g e h su *tutta* la palla di centro x e raggio t . Questo rispecchia fisicamente il *principio di Huygens*, che si può enunciare come segue.

Principio di Huygens: sia c la velocità di propagazione dell'informazione in $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, e consideriamo un segnale che si propaga da un punto x ; al tempo t , in dimensione 3 esso è percepito *solo* nei punti a distanza ct da x , mentre in dimensione 2 esso continua ad essere percepito *in tutti i punti a distanza minore o uguale a* ct da x .

Ad esempio, un lampo di luce in una stanza buia viene percepito solo per una frazione di secondo, mentre le onde superficiali create da un sasso gettato in uno stagno continuano a muovere l'acqua anche dopo il loro primo arrivo.

Osservazione 6.3.6 Ricordando l'Osservazione 6.3.5 e il caso $n = 2$, è esperienza comune che le onde superficiali provocate da un sasso gettato in uno stagno tendono ad attenuarsi con l'andare del tempo. E' questo un fenomeno codificato nell'equazione delle onde (non smorzata)? Concentriamoci sul caso $h = 0$.

Se $g = 1$ allora chiaramente l'unica soluzione di (6.24) con $n = 2$ è $u = 1$, che certamente non viene attenuata.

Ma consideriamo invece un "segnale concentrato": sia g a supporto compatto K . Fissato $x \in \mathbb{R}^2$, allora anche $G(y) := g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)$ è a supporto compatto e (6.33) dà

$$u(x, t) = \frac{t}{2} \int_{B(x,t) \cap K} \frac{G(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x,t) \cap K} \frac{G(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy, \quad (6.37)$$

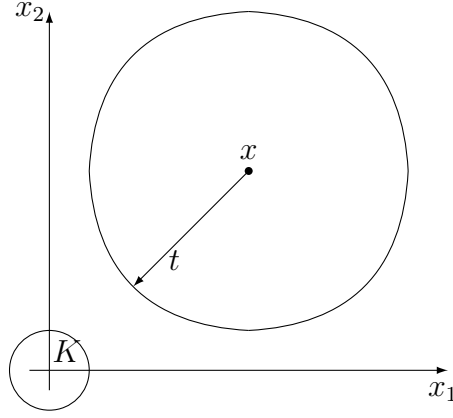


Figura 6.11: La regione di integrazione in (6.37).

si veda la Figura 6.11.

Per tempi piccoli l'intersezione può essere vuota: questo accade se $x \notin K$ e $t < d(x, K)$. In altre parole, il segnale non è ancora arrivato al punto x e $u(x, t) = 0$. Se invece $t \geq T$, con T tale che $K \subset B(x, T)$, allora l'integrale è fatto esattamente su K . Poiché siamo interessati a tempi lunghi, consideriamo questo caso e allora

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_K \frac{G(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy.$$

Poiché $|y - x| \leq T$ per ogni $y \in K$, se $t \geq \sqrt{2}T$ allora $(t^2 - |y - x|^2)^{1/2} \geq (2T^2 - T^2)^{1/2} = T$ e dunque

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi T t} \int_K |G(y)| dy.$$

L'integrale non dipende più da t e dunque u viene attenuata *in maniera (almeno) inversamente proporzionale al tempo* per tempi lunghi.

Per concludere, si consideri invece il caso $n = 3$. Dalla formula (6.31) di Kirchhoff segue che, con $x \in \mathbb{R}^3$ e le stesse notazioni di sopra (ora $K \subset \mathbb{R}^3$),

$$u(x, t) = \oint_{S(x, t)} G(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x, t) \cap K} G(y) dS(y).$$

Pertanto $u(x, t) = 0$ se $t \geq T$. Si noti nondimeno come, anche in questo caso, vi è una attenuazione del segnale per tempi grandi dovuta al termine t^2 a denominatore. Si confronti con l'Esercizio 6.3.2.

6.3.3 Il caso generale

In questa sezione diamo un breve cenno di come si tratta il caso generale $n \geq 4$. Come già specificato, si risolve prima il caso in cui n è dispari con un cambiamento di variabili (più complicato di (6.27)) che riconduce l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux all'equazione delle onde in un quadrante. Quindi si deduce il caso $n - 1$ pari come nella Sezione 6.3.2; tutto questo a prezzo di un po' di tecnica in più.

Ci accontentiamo di enunciare i due risultati seguenti; i dettagli della dimostrazione si trovano in [10]. Definiamo prima

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2) & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n-2) \cdot n & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Incominciamo col caso in cui n è dispari.

Teorema 6.3.3 (Soluzione dell'equazione delle onde, dimensione dispari)

Sia $n \geq 3$ un numero dispari e consideriamo delle funzioni $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ per $m = (n+1)/2$. Allora la funzione

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left\{ \partial_t (t \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{S(x,t)} g \, dS \right) + \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{S(x,t)} h \, dS \right) \right\} \quad (6.38)$$

soddisfa

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$;
- (ii) $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0)$ e $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(x, t) = h(x^0)$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Enunciamo ora il caso in cui n è pari.

Teorema 6.3.4 (Soluzione dell'equazione delle onde, dimensione pari)

Sia $n \geq 2$ un numero pari e consideriamo delle funzioni $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ per $m = (n+2)/2$. Allora la funzione

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \times \left\{ \partial_t (t \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} \, dy \right) + \left(\frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} \, dy \right) \right\} \quad (6.39)$$

soddisfa

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$;
- (ii) $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x,t) = g(x^0)$ e $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(x,t) = h(x^0)$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Le formule (6.38) e (6.39) fanno capire che la ricerca di soluzioni *esplicite* di una equazione alle derivate parziali è in generale senza speranza, diversamente da quello che spesso accade nell'ambito delle equazioni differenziali ordinarie. Si noti che sia (6.38) e (6.39) sono scritte in forma compatta, si veda (6.32) e (6.36) nei casi $n = 3$ e $n = 2$.

Osservazione 6.3.7 (Il principio di Huygens e il dominio di dipendenza)

Valgono i commenti già fatti nei casi $n = 3$ e $n = 2$. Vale in particolare l'estensione del principio di Huygens alle dimensioni maggiori di 3: in dimensioni dispari maggiori di 1 un segnale emanato da un punto x è percepito solo nei punti a distanza ct da x , mentre in dimensioni pari esso è percepito per tutti i tempi successivi al primo arrivo. Si noti che il caso $n = 1$ rappresenta un compromesso tra i due casi precedenti: il dato di posizione g influenza solo i punti a distanza ct da x (si comporta come nel caso n dispari) mentre il dato h influenza tutti i punti a distanza minore o uguale a ct da x (si comporta come nel caso n pari). Schematicamente, in riferimento alla soluzione del problema (6.24), abbiamo (usando la velocità di propagazione c per chiarire meglio la dimensionalità):

$$u(x,t) \text{ dipende da } \begin{cases} g \text{ in } S(x, ct) \text{ e } h \text{ in } B(x, ct) & \text{se } n = 1, \\ g \text{ e } h \text{ in } S(x, ct) & \text{se } n \geq 3 \text{ è dispari,} \\ g \text{ e } h \text{ in } B(x, ct) & \text{se } n \geq 2 \text{ è pari.} \end{cases}$$

Osservazione 6.3.8 Le formule (6.15), (6.38) e (6.39) possono essere dedotte utilizzando le funzioni di più variabili complesse, si veda [13, §5B] e [15]. In quest'ambito il principio di Huygens, in dimensione $n \geq 3$, è una conseguenza del fatto che la soluzione fondamentale del Laplaciano (parte spaziale dell'equazione delle onde) è una funzione analitica ad un valore in certe dimensioni e a due valori in altre. Nel caso $n = 1$ essa è a due valori, ma la sua derivata è a un valore, e questo spiega il diverso comportamento del caso $n = 1$ visto sopra.

Osservazione 6.3.9 (Regolarità e focalizzazione) Si noti come la dimensione influenza la regolarità della soluzione: più la dimensione è alta, più i dati iniziali devono essere regolari per garantire che la soluzione sia di classe C^2 . Questo è dovuto alla formazione di *caustiche*: in dimensione maggiore di

1, “irregolarità” (non necessariamente singolarità!) dei dati iniziali possono focalizzarsi (concentrarsi) in insiemi, di solito di dimensioni più basse, creando delle irregolarità maggiori per u . Questo non succede in dimensione 1: in poche parole, non c’è “abbastanza spazio”. Riassumendo:

in dimensione d , per avere $u \in C^2$ occorre $g \in C^k$, $h \in C^{k-1}$ con

$$k = \begin{cases} 2 & \text{se } d = 1, \\ 3 & \text{se } d = 2, 3, \\ 4 & \text{se } d = 4, 5, \\ \vdots & \vdots \\ \frac{n+3}{2} & \text{se } d = n-1, n, \text{ con } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

In altre parole, in dimensione 1 non c’è perdita di regolarità: u ha la stessa regolarità dei dati iniziali. In dimensione 2 o 3 si perde una derivata; in dimensione n dispari o $n-1$ pari se ne perdono $\frac{n+3}{2} - 2 = \frac{n-1}{2}$.

Osservazione 6.3.10 (Spazi di Sobolev) Il numero m che appare nei Teoremi 6.3.3 e 6.3.4 può essere scritto in funzione di n come

$$m = \left[\frac{n}{2} \right] + 1, \quad (6.40)$$

dove le parentesi quadre si riferiscono alla parte intera. Se infatti $n = 2k+1$, allora $\left[\frac{n}{2} \right] + 1 = k+1 = \frac{n+1}{2} = m$, mentre se $n = 2k$ allora $\left[\frac{n}{2} \right] + 1 = k+1 = \frac{n+2}{2} = m$.

Se n è dispari, tale numero m è precisamente il più piccolo numero intero per cui lo spazio di Sobolev H^s si immerge nello spazio delle funzioni continue: $H^{\left[\frac{n}{2} \right] + 1}(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$. Più in generale, $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ se $s > \frac{n}{2} + k$, si veda [13, §6, Theorem 6.9]. Questo fa capire che l’analisi della regolarità *puntuale* della soluzione (la sua appartenenza ad una classe C^k) è forse meno importante dell’analisi della regolarità *globale* (in termini di appartenenza a spazi di funzioni costruiti a partire da L^2 , come sono gli spazi di Sobolev).

Esercizio 6.3.3 A proposito della formula (6.39) si potrebbe essere preoccupati della presenza di un termine singolare sulla sfera $S(x, t)$ nel denominatore delle funzioni integrande. Convicersi che non è così dimostrando che è convergente l’integrale

$$\int_{B(x,t)} \frac{1}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy.$$

6.3.4 Il problema non omogeneo

In questa sezione studiamo il problema ai valori iniziali non omogeneo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, u_t = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (6.41)$$

Utilizziamo, come per l'equazione del calore nella Sezione 5.3.2, il principio di Duhamel. Fissiamo pertanto $s > 0$ e sia $u(x, t, s)$ la soluzione del problema ai valori iniziali al tempo s

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot, s) - \Delta u(\cdot, s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot, s) = 0, u_t(\cdot, s) = f(\cdot, s) & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases} \quad (6.42)$$

Si veda la Figura 6.12. L'esistenza di $u(x, t, s)$ è stata stabilita nelle sezioni precedenti, col metodo di discesa, se f è abbastanza regolare.

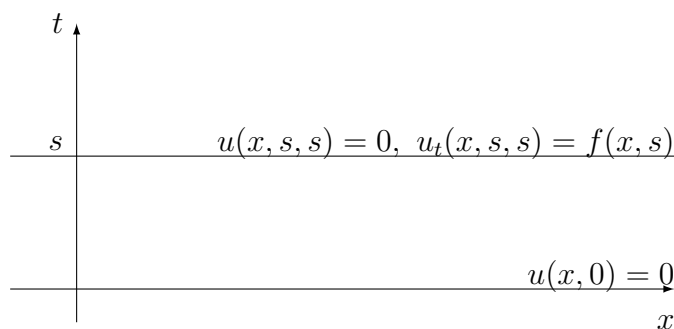


Figura 6.12: Il principio di Duhamel per l'equazione delle onde.

Per capire perché il termine f appare come dato iniziale per la velocità invece che per la posizione, come era il caso per l'equazione del calore, possiamo ragionare come nell'Osservazione 5.3.5; in effetti, è proprio questo che si fa nella dimostrazione. Definiamo invece

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t, s) ds, \quad (6.43)$$

come ci si aspetta, e vediamo se il problema (6.42) è corretto dimensionalmente. Se $u(x, t)$ ha le dimensioni di una lunghezza, allora f ha dimensione $[\text{ms}^{-2}]$, un'accelerazione. Affinché (6.43) sia corretta dimensionalmente, occorre che la funzione $u(x, t, s)$ abbia dimensione $[\text{ms}^{-1}]$. Pertanto non può essere $u(x, t, s)$ ad essere uguagliata a f , ma la sua derivata rispetto al tempo.

Teorema 6.3.5 (Soluzione dell'equazione delle onde non omogenea)

Sia $n \geq 1$ e consideriamo $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Allora la funzione u definita da (6.43) soddisfa

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$;
- (ii) $u_{tt} - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x,t) = 0$ e $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(x,t) = 0$ per ogni $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Proviamo dapprima la regolarità di u . Questo è ovvio se ricordiamo la definizione compatta di $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ data da (6.40) e il fatto che sia nel Teorema 6.3.3 che nel Teorema 6.3.4 si richiedeva $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$ per avere u di classe C^2 .

Proviamo ora che u soddisfa l'equazione delle onde non omogenea con termine di destra f . Si ha

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_t(x,t,t) + \int_0^t u_{tt}(x,t,s) ds = \int_0^t u_{tt}(x,t,s) ds, \\ u_{tt}(x,t) &= u_{tt}(x,t,t) + \int_0^t u_{ttt}(x,t,s) ds = f(x,t) + \int_0^t u_{ttt}(x,t,s) ds. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Dalla definizione (6.43) e da (6.44) abbiamo che

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \Delta u(x,t,s) ds = \int_0^t u_{tt}(x,t,s) ds = u_{tt}(x,t) - f(x,t)$$

e dunque u soddisfa l'equazione (6.41)₁. Infine, sempre dalla definizione (6.43) segue che $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$. $\square$

Come già precedentemente osservato, il caso in cui nel problema (6.41) i dati iniziali non sono identicamente nulli si deduce per linearità. Nei seguenti esempi consideriamo in dettaglio i casi $n = 1$ e $n = 3$.

Esempio 6.3.1 (Il caso $n = 1$) Risolviamo esplicitamente il problema non omogeneo (6.41) nel caso $n = 1$. Notiamo che se $v(x,t)$ soddisfa il problema (6.14), con dato iniziale al tempo 0, allora la funzione $v(x,t-s)$ soddisfa l'analogo problema ai valori iniziali al tempo s . Dalla formula di d'Alembert deduciamo allora che

$$u(x,t,s) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s) dy$$

e dunque

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s) dy \right) ds. \quad (6.45)$$

Si veda la Figura 6.13. Un'espressione diversa si trova col cambiamento di variabili $\sigma = t - s$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(y, t - \sigma) dy \right) d\sigma.$$

In conclusione, in notazioni più familiari si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-s}^{x+s} f(y, t - s) dy \right) ds.$$

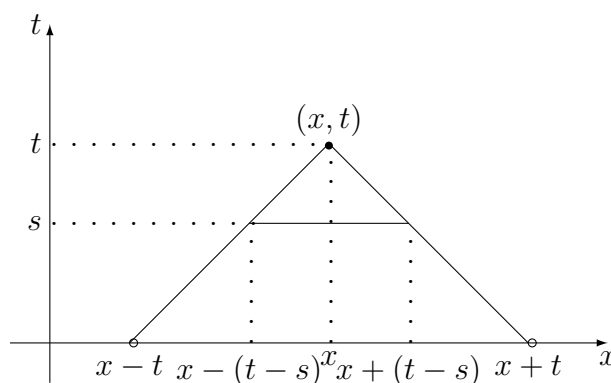


Figura 6.13: La soluzione (6.45) del problema non omogeneo (6.41) nel caso $n = 1$. Il dominio di integrazione è l'intero triangolo; al tempo s , l'integrazione in y avviene nel segmento in tratto continuo.

Esercizio 6.3.4 [10, §2.5-23] Sia S il quadrato in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ di vertici i punti $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$, $(-1, 2)$. Definiamo

$$f(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{se } (x, t) \in S \cap \{t > x + 2\}, \\ 1 & \text{se } (x, t) \in S \cap \{t < x + 2\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia u la soluzione del problema ai valori iniziali non omogeneo

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = 0, \quad u_t = 0 & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (6.46)$$

Dare una descrizione sommaria del modello fisico che si sta considerando. Descrivere la forma di u ai tempi $t > 3$.

Esempio 6.3.2 (Il caso $n = 3$: il potenziale ritardato) Nel caso $n = 3$, dalla formula (6.31) di Kirchhoff abbiamo che

$$u(x, t, s) = (t - s) \oint_{S(x, t-s)} f(y, s) dS(y).$$

Di conseguenza, col cambiamento di variabili $t - s = r$,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t (t - s) \left(\oint_{S(x, t-s)} f(y, s) dS(y) \right) ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left(\int_{S(x, t-s)} \frac{f(y, s)}{t - s} dS(y) \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left(\int_{S(x, r)} \frac{f(y, t - r)}{r} dS(y) \right) dr. \end{aligned}$$

Si noti la differenza tra questa formula, dove f viene integrata solo sulla sfera $S(x, t)$ e l'analoga formula (6.45) in dimensione 1, dove f viene integrata su tutto il segmento $[t - s, t + s]$. Si ricordi l'Osservazione 6.3.7. In conclusione

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, t - |y - x|)}{|y - x|} dy.$$

La funzione $\frac{f(y, t - |y - x|)}{|y - x|}$ è detta *potenziale ritardato* per l'equazione delle onde in dimensione 3. Il nome viene evidentemente dal termine $t - |y - x|$; l'interpretazione geometrica dell'integrazione è analoga a quella data nel caso $n = 1$ nella Figura 6.13. Si noti in particolare che, diversamente dalla dipendenza dei valori di u dai dati iniziali g e h , u dipende dai valori di f in *tutta* la palla $B(x, t)$.

Esercizio 6.3.5 Studiare esplicitamente il caso $n = 2$.

6.4 Metodi dell'energia

Questa sezione, analoga alle precedenti Sezioni 4.6 e 5.5, mostra un paio di semplici applicazioni dei metodi basati sullo studio dell'energia associata all'equazione delle onde. In particolare questi metodi mostrano che, sebbene le ipotesi necessarie sui dati iniziali per avere una soluzione regolare crescano all'aumentare della dimensione spaziale, gli integrali di energia non risentono di questo fenomeno.

Un primo risultato riguarda, come nelle sezioni precedenti, l'unicità delle soluzioni.

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe C^1 . Come già per l'equazione del calore definiamo per $T > 0$ gli insiemi

$$U_T = U \times (0, T], \quad \Gamma_T = \bar{U}_T \setminus U_T$$

e consideriamo il problema misto per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } U_T, \\ u = g, & \text{su } \Gamma_T, \\ u_t = h, & \text{su } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (6.47)$$

Teorema 6.4.1 (Unicità per l'equazione delle onde) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con bordo di classe C^1 . Esiste allora al più una soluzione $u \in C^2(\bar{U}_T)$ del problema misto (6.47).*

Dimostrazione. Come abbiamo già visto negli analoghi risultati precedenti, basta dimostrare che l'unica soluzione $w \in C^2(\bar{U}_T)$ del problema

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{in } U_T, \\ u = 0, & \text{su } \Gamma_T, \\ u_t = 0, & \text{su } U \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

è quella identicamente nulla. In questo caso, per $t \in [0, T]$ introduciamo l'energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U (w_t(x, t)^2 + |Dw(x, t)|^2) dx.$$

Dal Corollario 1.6.1 si ha allora, integrando per parti in x e sfruttando il fatto che $w = 0$ su $\partial U \times [0, T]$,

$$\dot{E}(t) = \int_U (w_t w_{tt} + Dw \cdot Dw_t) dx = \int_U w_t (w_{tt} - \Delta w) dx = 0.$$

Pertanto $E(t) = E(0) = 0$ per ogni $T \in [0, T]$ e di conseguenza è costante in U_T ; poiché $w = 0$ su $U \times \{t = 0\}$, si deduce che $w \equiv 0$. $\square$

Esercizio 6.4.1 (Equipartizione dell'energia) [10, §2.5-20] Supponiamo che u risolva il problema ai valori iniziali per l'equazione delle onde in una dimensione di spazio, cioè

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.48)$$

con g e h a supporto compatto. Definiamo

$$\begin{aligned} \text{l'energia cinetica} \quad k(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dx, \\ \text{l'energia potenziale} \quad p(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Provare allora che

- (i) $k(t) + p(t)$ è costante in t ;
- (ii) $k(t) = p(t)$ se $t \geq t_0$, per qualche $t_0 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.4.2 (L'equazione di Klein-Gordon) Si consideri in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ l'equazione di Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} = -u. \quad (6.49)$$

L'equazione di Klein-Gordon può essere interpretata come una versione relativistica dell'equazione di Schrödinger per rappresentare il moto di particelle a spin intero (bosoni); per maggior informazioni si veda [7].

- (i) Determinare tutte le soluzioni del tipo $u(x, t) = f(x \pm ct)$, dove $c \in \mathbb{R}$. Confrontare con l'equazione delle onde.
- (ii) Provare che se u_t e u_x tendono a 0 per x che tende a $\pm\infty$, per ogni $t \geq 0$, allora l'energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + u_x^2 + u^2) dx$$

è conservata.

Come seconda applicazione dei metodi dell'energia, consideriamo di nuovo il problema di stabilire il dominio di dipendenza di una soluzione dell'equazione delle onde. Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ una soluzione dell'equazione delle onde

$$u_{tt} - \Delta u = 0. \quad (6.50)$$

Fissiamo $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $t^0 > 0$ e sia

$$K(x^0, t^0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : 0 \leq t \leq t^0, |x - x^0| \leq t^0 - t\}$$

il cono di dipendenza di u . Si tratta chiaramente di un cono di vertice il punto (x^0, t^0) e base $B(x^0, t^0) \times \{t = 0\}$; si veda la Figura 6.14.

Teorema 6.4.2 (Velocità di propagazione finita) Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ una soluzione dell'equazione delle onde (6.50) in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Se $u = u_t = 0$ in $B(x^0, t^0) \times \{t = 0\}$, allora $u = 0$ nel cono $K(x^0, t^0)$.

Si noti che il risultato precedente è conseguenza delle formule di rappresentazione (6.15), (6.38) e (6.39). La dimostrazione seguente è molto più semplice in quanto non richiede la conoscenza di una formula di rappresentazione esplicita della soluzione. Nel caso n dispari il risultato di dipendenza fornito dalla formula (6.38) è però molto più preciso.

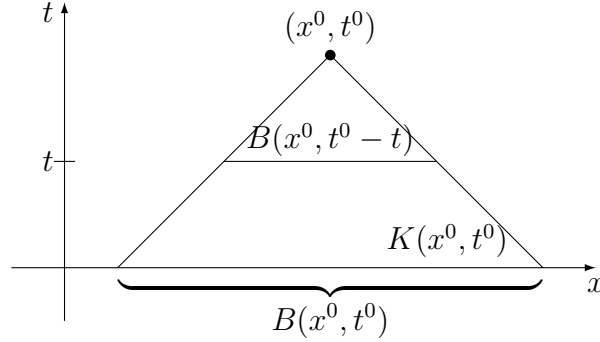


Figura 6.14: Il cono di dipendenza $K(x^0, t^0)$.

Dimostrazione del Teorema 6.4.1. Definiamo per $t \in [0, t^0]$ l'energia locale

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x^0, t^0-t)} (u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2) dx,$$

si veda la Figura 6.14. Si ha allora, dal Corollario 1.4.1 e integrando per parti,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(x^0, t^0-t)} (u_t u_{tt} + Du \cdot Du_t) dx - \frac{1}{2} \int_{S(x^0, t^0-t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS, \\ &= \int_{B(x^0, t^0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{S(x^0, t^0-t)} u_t \partial_\nu u dS - \frac{1}{2} \int_{S(x^0, t^0-t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\ &= \int_{S(x^0, t^0-t)} \left(u_t \partial_\nu u - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |Du|^2 \right) dS. \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|u_t \partial_\nu u| \leq |u_t| |Du| \leq \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{1}{2} |Du|^2.$$

Pertanto $\dot{e}(t) \leq 0$ e così $e(t) \leq e(0) = 0$ per ogni $t \in [0, t^0]$. Di conseguenza $u_t = 0$ e $Du = 0$ nel cono $K(x^0, t^0)$; poiché $u = 0$ su $B(x^0, t^0) \times \{t = 0\}$, ne segue che $u = 0$ in $K(x^0, t^0)$. $\square$

Capitolo 7

La teoria delle caratteristiche

7.1 Introduzione

In questo capitolo introdurremo la teoria delle caratteristiche per l'equazione alle derivate parziali

$$F(Du, u, x) = 0. \quad (7.1)$$

In (7.1) si ha che $x \in U$, dove $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto con bordo di classe C^1 , e la funzione incognita è

$$u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

che è supposta dipendere dalla variabile x . Supporremo inoltre che la funzione

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

sia una funzione di classe C^2 . Indicheremo con (p, z, x) l'argomento di F , ovvero

$$F(p, z, x) = F(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n), \quad (p, z, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U}, \quad (7.2)$$

e scriveremo

$$\begin{aligned} D_p F &= (F_{p_1}, \dots, F_{p_n}), \\ D_z F &= F_z, \\ D_x F &= (F_{x_1}, \dots, F_{x_n}). \end{aligned}$$

Come specificato nel Capitolo 1, useremo gli apici per indicare le componenti di una funzione vettoriale e i pedici per le componenti di un punto o di un vettore.

Ricordiamo che, nell'ambito delle equazioni differenziali ordinarie, si ricerca di solito una soluzione dell'equazione che soddisfa ulteriori condizioni;

esse possono essere, ad esempio, un dato iniziale o delle condizioni agli estremi di un intervallo. Lo scopo è di riuscire a determinare *univocamente* la soluzione che soddisfa sia l'equazione che tali condizioni. Lo stesso accade per le equazioni alle derivate parziali, ed è proprio a questo scopo che si considera $x \in \bar{U}$. Dato infatti un sottoinsieme $\Gamma \subset \partial U$ del bordo di U e una funzione $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, cercheremo delle soluzioni u di (7.1) che soddisfino le *condizioni al contorno*

$$u = g \quad \text{su } \Gamma. \quad (7.3)$$

Non si dia troppo peso al termine “contorno”: vedremo nel seguito che questa condizione comprende anche il caso in cui si assegna un dato iniziale.

La tecnica più semplice per cercare di risolvere il problema (7.1)-(7.3) consiste nel ridursi allo studio di un opportuno *sistema* di equazioni differenziali *ordinarie*. E' questa la teoria delle caratteristiche.

7.2 Le equazioni delle caratteristiche

L'idea della teoria delle caratteristiche per risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0, & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (7.4)$$

è la seguente. Fissiamo un punto $x^0 \in \Gamma$; cerchiamo una curva che parte da Γ e che entra in U , lungo la quale riusciamo a determinare la soluzione u . Questo potrebbe essere possibile poiché lungo tale curva l'equazione $F(Du, u, x) = 0$ dovrebbe semplificarsi, ed inoltre conosciamo u nel punto x^0 : infatti $u(x^0) = g(x^0)$. Se, al variare di x^0 in Γ , queste curve coprono tutto U , abbiamo così completamente determinato la soluzione u in U .

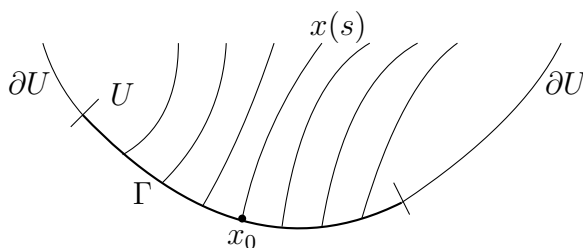


Figura 7.1: Gli insiemi U , Γ e la curva $x \mapsto x(s)$.

Come trovare tali curve? Ragioniamo in maniera euristica e supponiamo di aver già determinato una soluzione u di (7.4). Indichiamo con

$$x(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s)), \quad \text{per } s \in I, \quad (7.5)$$

l'espressione parametrica (incognita!) di tale curva, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e sost $(x(s)) \subset U$. Per evitare ogni ambiguità di notazione, indicheremo sempre con x la variabile indipendente e con $x(s)$ la curva parametrica in (7.5). Indichiamo inoltre con

$$z(s) := u(x(s)), \quad (7.6)$$

$$p(s) := Du(x(s)), \quad (7.7)$$

la restrizione di u e Du , rispettivamente, alla curva $x(s)$. Ovviamente $p(s) = (p^1(s), \dots, p^n(s))$, dove

$$p^i(s) = u_{x_i}(x(s)), \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \quad (7.8)$$

Benché u sia supposta nota, non è così per $x(s)$ e dunque anche le funzioni $z(s)$ e $p(s)$ non sono note: abbiamo pertanto $2n + 1$ funzioni incognite (le componenti di $p(s)$, $z(s)$ e $x(s)$) da determinare. Sappiamo però che deve valere

$$F(p(s), z(s), x(s)) = 0, \quad \text{per } s \in I, \quad (7.9)$$

poiché, fissato s , il punto $x(s)$ appartiene ad U e u è soluzione dell'equazione. Questa equazione scalare non è sufficiente per determinare le nostre $2n + 1$ incognite. L'idea consiste nel derivare le quantità in gioco per determinare un sistema di equazioni differenziali ordinarie per $(p(s), z(s), x(s))$.

Deriviamo pertanto $z(s)$ in (7.6) e $p^i(s)$ in (7.8) rispetto a s ; troviamo

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(x(s)) \dot{x}^j(s) = \sum_{j=1}^n p^j(s) \dot{x}^j(s), \quad (7.10)$$

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(x(s)) \dot{x}^j(s), \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \quad (7.11)$$

dove abbiamo indicato $\dot{} = \frac{d}{ds}$. Si noti che mentre (7.10) coinvolge solo le funzioni incognite $p(s)$, $z(s)$ e $x(s)$, non è questo il caso per (7.11), a causa dei termini $u_{x_i x_j}$. Come trattare tali termini? Notiamo che, poiché u soddisfa $F(Du, u, x) = 0$ ed è supposta di classe C^2 , necessariamente si ha anche $\partial_{x_i}(F(Du, u, x)) = 0$ per $i = 1, \dots, n$, cioè

$$\sum_{j=1}^n F_{p_j}(Du, u, x) u_{x_i x_j} + F_z(Du, u, x) u_{x_i} + F_{x_i}(Du, u, x) = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \quad (7.12)$$

Se calcoliamo in

$$\chi(s) := (p(s), z(s), x(s))$$

l'espressione (7.12) otteniamo

$$\sum_{j=1}^n F_{p_j}(\chi(s)) u_{x_i x_j}(x(s)) = -F_z(\chi(s)) p^i(s) - F_{x_i}(\chi(s)), \quad (7.13)$$

per $i = 1, \dots, n$. Si noti che mancano ancora le equazioni differenziali ordinarie per le $x^i(s)$. Confrontando (7.11) con (7.13) vediamo che se *imponiamo*

$$\dot{x}^j(s) = F_{p_j}(\chi(s)) \quad (7.14)$$

allora il secondo membro di (7.11) coincide con il primo membro di (7.13) e dunque

$$\dot{p}^i(s) = -F_z(\chi(s)) p^i(s) - F_{x_i}(\chi(s)). \quad (7.15)$$

Infine da (7.10) e (7.14) deduciamo

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n F_{p_j}(\chi(s)) p^j(s). \quad (7.16)$$

Le equazioni (7.14), (7.15) e (7.16) sono le *equazioni delle caratteristiche* dell'equazione (7.1) e si possono scrivere in forma compatta come

$$\begin{cases} \dot{p} = -D_z F p - D_x F, \\ \dot{z} = D_p F \cdot p, \\ \dot{x} = D_p F. \end{cases} \quad (7.17)$$

In questa scrittura l'argomento delle derivate di F è $\chi(s) = (p(s), z(s), x(s))$. Le curve $p(s)$, $z(s)$, $x(s)$ sono dette (*curve*) *caratteristiche* mentre la curva $x(s)$ è chiamata *caratteristica proiettata*; si veda la Figura 7.2.

Osservazione 7.2.1 Si noti che sia $x(s)$ che $p(s)$ sono intesi qui sopra come *vettori riga*: si veda (7.5) e il fatto che p coincide col gradiente di u . Naturalmente lo stesso vale per $\dot{x}(s)$ e $\dot{p}(s)$. Questo fa sì che le dimensioni in (7.17) siano corrette.

Non è difficile ricordare le equazioni (7.17): le equazioni per $\dot{z}$ e $\dot{x}$ usano solo $D_p F$ mentre quelle per $\dot{p}$ usano solo $-D_z F$ e $-D_x F$; un p viene poi aggiunto per bilanciare le dimensioni.

Possiamo riassumere quanto trovato in un unico enunciato.

Teorema 7.2.1 (Caratteristiche) *Sia $u \in C^2(U)$ una soluzione dell'equazione $F(Du, u, x) = 0$ in U . Sia $x(s)$, con $\text{sost}(x(s)) \subset U$ per $s \in I \subset \mathbb{R}$, una soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie*

$$\dot{x}(s) = D_p F(p(s), z(s), x(s)), \quad (7.18)$$

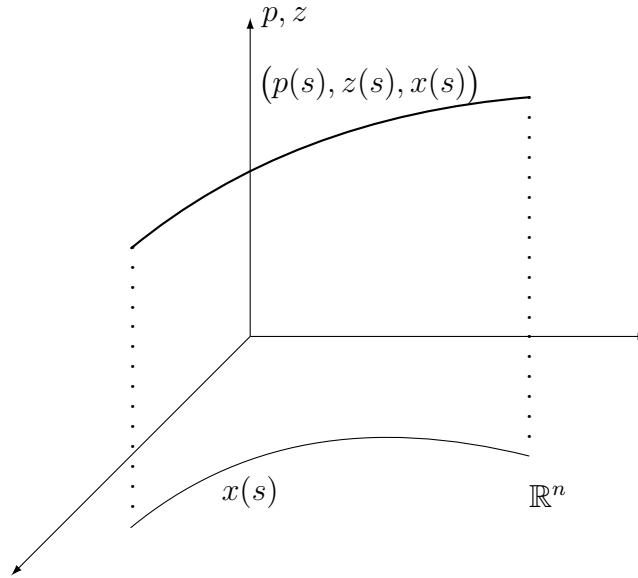


Figura 7.2: Le curve caratteristiche.

dove $p(s) = Du(x(s))$ e $z(s) = u(x(s))$. Allora le funzioni p e z soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dot{z}(s) = D_p F(\chi(s)) \cdot p(s), \\ \dot{p}(s) = -D_z F(\chi(s)) p(s) - D_x F(\chi(s)), \end{cases} \quad \text{per } \chi(s) = (p(s), z(s), x(s)).$$
(7.19)

Inoltre le funzioni $p(s)$, $z(s)$ e $x(s)$ sono di classe C^2 .

Dimostrazione. Rimane solo da dimostrare la regolarità delle caratteristiche, che segue dall'ipotesi che $F \in C^2$ e dal teorema di regolarità delle soluzioni di equazioni differenziali ordinarie. $\square$

Il teorema precedente merita varie osservazioni.

Osservazione 7.2.2 Si consideri il Teorema 7.2.1.

- (i) Il Teorema 7.2.1 non stabilisce l'esistenza delle caratteristiche, ma solo che se $x(s)$ esiste e $z(s)$, $p(s)$ sono definite conseguentemente, allora vale (7.19). L'esistenza delle caratteristiche per opportuni valori iniziali sarà dimostrata nel Lemma 7.4.1, vedi anche l'Osservazione 7.4.1. Si noti inoltre che non abbiamo dimostrato che vale (7.9) ma solo che $(DF)(p(s), z(s), x(s)) = 0$. Il fatto che (7.9) è soddisfatta sarà provato nella dimostrazione del Teorema 7.5.1, si veda (7.54).
- (ii) In generale, il sistema (7.18) è non lineare; pertanto l'esistenza di soluzioni $x(s)$ è garantita solo localmente dal teorema di esistenza (e unicità)

di soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Lo stesso vale anche per $z(s)$ e $p(s)$.

(iii) L'ipotesi $u \in C^2$ fatta nell'enunciato del Teorema 7.2.1 pare eccessiva, dal momento che l'equazione $F(Du, u, x)$ coinvolge solo le derivate prime di u ; si noti però che si è fatto uso di questa ipotesi nella derivazione delle equazioni delle caratteristiche. In questo breve corso introduttivo ci accontenteremo di questo risultato non ottimale.

(iv) Il sistema (7.17) delle caratteristiche è esatto, si veda [6].

(v) Data $u \in C^2(U)$ e $x(s)$ come nel Teorema 7.2.1, allora le funzioni $z(s)$ e $p(s)$ soddisfano il sistema (7.19). Poiché la funzione $z(s)$ dà la restrizione della soluzione u alla curva $x(s)$, il vero scopo del metodo delle caratteristiche è cercare $z(s)$ e $x(s)$; la funzione $p(s)$ entra in gioco solamente perché accoppiata alle $z(s)$ e $x(s)$ nel sistema (7.17). In realtà p servirà soltanto nel caso completamente non lineare.

La determinazione di una (unica) soluzione del sistema (7.17) richiede naturalmente un dato iniziale. Prima di affrontare questo problema mostriamo come in certi casi tale sistema si possa semplificare.

7.3 Esempi

In questa sezione vediamo come si può scrivere il sistema (7.17) in alcuni casi particolari.

7.3.1 Il caso lineare

Supponiamo dapprima che l'equazione $F(Du, u, x) = 0$ sia *lineare omogenea*; dunque

$$F(Du, u, x) = b(x) \cdot Du(x) + c(x)u(x) = 0, \quad (7.20)$$

per $x \in U$. Con le notazioni (7.2) abbiamo $F(p, z, x) = b(x) \cdot p + c(x)z$ e allora

$$D_p F = b(x).$$

Pertanto l'equazione $(7.17)_3$ è $\dot{x}(s) = b(x(s))$ mentre la $(7.17)_2$ diventa $\dot{z}(s) = b(x(s)) \cdot p(s)$. Dal momento che deve valere anche (7.20), ne segue che $b(x(s)) \cdot p(s) = -c(x(s))z(s)$ e allora $\dot{z}(s) = -c(x(s))z(s)$. Pertanto il sistema (7.17) si disaccoppia nel sottosistema

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s)), \\ \dot{z}(s) = -c(x(s))z(s), \end{cases} \quad (7.21)$$

relativo alle sole componenti $x(s)$ e $z(s)$, e in un sistema relativo a $p(s)$. Tuttavia, come notato nell'Osservazione 7.2.2, per quanto riguarda la determinazione della soluzione u il solo sistema (7.21) è sufficiente e non serve ricavare la $p(s)$. Si noti inoltre che anche il sistema (7.21) è disaccoppiato: si determina prima la $x(s)$ e quindi da questa la $z(s)$. Si noti infine che l'equazione $(7.21)_2$ è lineare.

Esercizio 7.3.1 Scrivere l'equazione caratteristica di p nel caso dell'equazione (7.21).

Esempio 7.3.1 Risolviamo il problema

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \Gamma. \end{cases} \quad (7.22)$$

dove

$$U = \{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 > 0\}, \quad \Gamma = \{(x_1, 0): x_1 > 0\},$$

si veda la Figura 7.3. Si osservi che l'equazione in (7.22) si può scrivere come $x \times Du = 0$, dove $\times$ indica il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^2$ (ottenuto estendendo i vettori in $\mathbb{R}^3$ con terza componente zero e poi facendo l'usuale prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$).

Si tratta di un'equazione lineare omogenea della forma (7.20), dove

$$b(x) = (-x_2, x_1), \quad c(x) = -1.$$

Le equazioni (7.21) diventano

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = -x^2, \\ \dot{x}^2 = x^1, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$

Derivando la prima equazione deduciamo $\ddot{x}^1 + x^1 = 0$ dalla seconda e dunque $x^1(s) = C_1 \cos s + C_2 \sin s$, per $s \in \mathbb{R}$. Perciò $x^2(s) = -\dot{x}^1(s) = C_1 \sin s - C_2 \cos s$. Fissiamo poi un punto $(x^0, 0) \in \Gamma$ e imponiamo che $x(0) = (x^0, 0)$; deduciamo

$$x(s) = (x^1(s), x^2(s)) = x^0 (\cos s, \sin s) \quad \text{per } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

La richiesta $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ è necessaria affinché il sostegno di $x(s)$ sia contenuto in U : le caratteristiche proiettate sono dei quarti di circonferenza percorsi in senso antiorario.

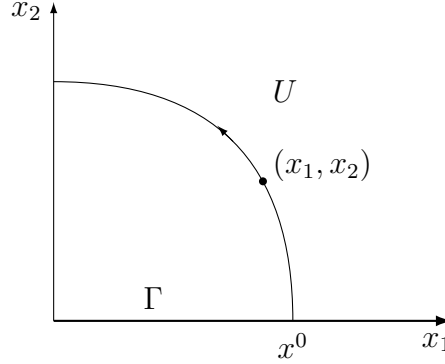


Figura 7.3: La curva caratteristica proiettata passante per $(x^0, 0)$.

L'equazione per z dà $z(s) = Ce^s$; inoltre $z(0) = u(x(0)) = u(x^0, 0) = g(x^0)$ e dunque

$$z(s) = g(x^0)e^s \quad \text{per } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ricordiamo che $z(s)$ è la restrizione di u alla caratteristica proiettata $x(s)$ passante per $(x^0, 0)$. Come determinare u ? Fissato $(x_1, x_2) \in U$ vorremmo determinare $u(x_1, x_2)$. Dobbiamo dunque passare dai parametri (x^0, s) alle variabili (x_1, x_2) . Questo non è difficile, in virtù del fatto che le caratteristiche proiettate, al variare di x^0 , coprono univocamente tutto l'insieme U (ogni punto di U si trova su una caratteristica proiettata passante per un certo x^0 , e su una sola). Infatti, dato $(x_1, x_2) \in U$ cerchiamo $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $x^0 > 0$ tali che

$$(x_1, x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = x^0 (\cos s, \sin s).$$

Occorre che $x^0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\frac{x_2}{x_1} = \tan s$, cioè $s = \arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ (si noti che essenzialmente siamo passati da coordinate polari a coordinate cartesiane in U). Usiamo allora questi valori per determinare u :

$$u(x_1, x_2) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = g(x^0)e^s = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) e^{\arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}. \quad (7.23)$$

Si veda la Figura 7.4 per il grafico della soluzione u . Si osservi bene la formula qui sopra, che mostra (come del resto tutte quelle analoghe che vedremo nel seguito) come il dato al bordo si “propaga” all'interno di U tramite le caratteristiche.

Esercizio 7.3.2 Verificare direttamente che (7.23) risolve (7.22).

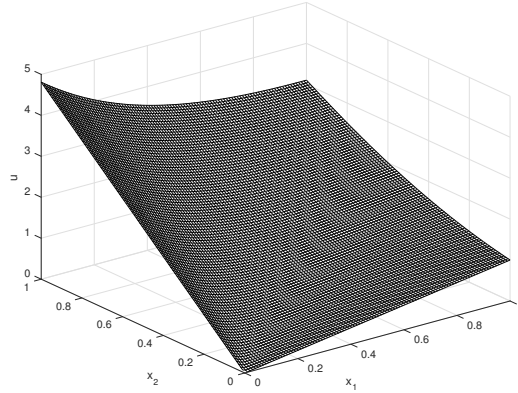


Figura 7.4: Grafico della soluzione u nel caso $g(x_1) = x_1$.

Osservazione 7.3.1 Si noti bene quello che si è fatto nell'ultima parte dell'Esempio 7.3.1: abbiamo invertito l'applicazione

$$T : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & U \\ (x^0, s) & \mapsto & (x_1, x_2) = (x^0 \cos s, x^0 \sin s), \end{array}$$

dove U e V sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Si noti che questo era a priori possibile perché $\det DT = x^0 \neq 0$. Lo stesso procedimento sarà adoperato nei prossimi esempi.

Esercizio 7.3.3 Disegnare con MATLAB il grafico della funzione u , soluzione di (7.22), per alcune funzioni g .

Osservazione 7.3.2 (Il caso lineare non omogeneo) Il caso lineare non omogeneo

$$F(Du, u, x) = b(x) \cdot Du(x) + c(x)u(x) - f(x) = 0,$$

non presenta ulteriori difficoltà. Si ha di nuovo $\dot{x}(s) = b(x(s))$ e $\dot{z}(s) = b(x(s)) \cdot p(s)$. Questa volta però si ha, dall'equazione, $b(x(s)) \cdot p(s) = -c(x(s))z(s) + f(x)$ e allora $\dot{z}(s) = -c(x(s))z(s) - f(x)$. Pertanto il sistema (7.17) si riduce al sottosistema

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s)), \\ \dot{z}(s) = -c(x(s))z(s) - f(x(s)). \end{cases}$$

L'equazione per z è ancora lineare.

Esercizio 7.3.4 [10, §3.5-5] Risolvere i seguenti problemi usando le caratteristiche. Per ognuno di essi disegnare le caratteristiche proiettate. Verificare esplicitamente che la soluzione trovata soddisfa il problema relativo (facoltativo); disegnare il grafico della soluzione con MATLAB nel caso (a), nel caso (b) le curve di livello, per alcune semplici funzioni g .

(a) $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = 2u$ in $x_2 > 1$, $u(x_1, 1) = g(x_1)$;

(b) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u$ in $x_3 > 0$, $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$.

7.3.2 Il caso semilineare

Il caso semilineare

$$F(Du, u, x) = b(x) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0, \quad (7.24)$$

si tratta come quello lineare. Si ha $F(p, z, x) = b(x) \cdot p + c(x, z)$ e il sistema (7.17) si riduce al sottosistema

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s)), \\ \dot{z}(s) = -c(x(s), z(s)). \end{cases} \quad (7.25)$$

Si noti che l'equazione per z non è più (in generale) lineare.

Esempio 7.3.2 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (7.26)$$

dove, si veda la Figura 7.5,

$$U = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}, \quad \Gamma = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \partial U.$$

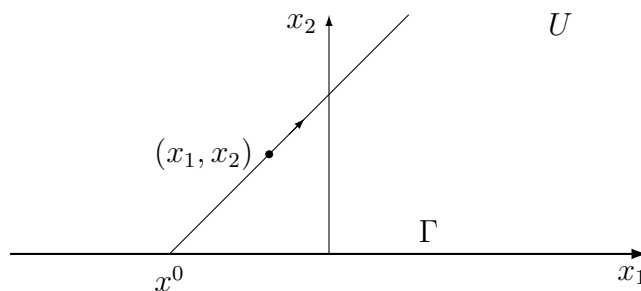


Figura 7.5: La curva caratteristica proiettata passante per $(x^0, 0)$.

In questo caso $b = (1, 1)$ e $c = -z^2$; pertanto (7.25) si scrive

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^2 = 1, \\ \dot{z} = z^2. \end{cases}$$

Fissiamo un punto $(x^0, 0) \in \Gamma$ e imponiamo che $x(0) = (x^0, 0)$. Si ha allora

$$x(s) = (x^0 + s, s), \quad \text{per } s \geq 0.$$

Le caratteristiche sono rette di coefficiente angolare 1. Si ricordi che la richiesta $s \geq 0$ è dovuta al fatto che vogliamo che la caratteristica entri dentro U ; al variare di x^0 in $\mathbb{R}$ le caratteristiche ricoprono U in maniera univoca.

L'equazione per z è a variabili separabili e il suo dato iniziale è $z(0) = u(x(0)) = u(x^0, 0) = g(x^0)$. Se $g(x^0) = 0$ allora la soluzione è $z(s) \equiv 0$; se $g(x^0) \neq 0$, allora la soluzione del problema relativo non è mai nulla (Teorema di unicità per equazioni differenziali ordinarie) e possiamo dividere l'equazione per z^2 . Integrando $\frac{\dot{z}}{z^2} = 1$ otteniamo $-\frac{1}{z} = s + C$ da cui, imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - g(x^0)s}.$$

Si noti che questa espressione comprende anche il caso $g(x^0) = 0$. Essendo l'equazione per z non lineare, l'intervallo di esistenza di $z(s)$ non coincide di norma con l'intervallo di esistenza dei coefficienti dell'equazione (in questo caso l'equazione è definita ovviamente per ogni $s \in \mathbb{R}$). Inoltre noi richiediamo che $s \geq 0$; pertanto $z(s)$ è definita solo in $I(x^0)$, dove (inglobando anche il caso $g(x^0) = 0$)

$$I(x^0) = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{g(x^0)}\right) & \text{se } g(x^0) > 0, \\ [0, \infty) & \text{se } g(x^0) \leq 0. \end{cases}$$

Fissiamo ora (x_1, x_2) ; avremo $(x_1, x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = (x^0 + s, s)$ se $s = x_2$ e $x^0 = x_1 - x_2$. Pertanto

$$u(x_1, x_2) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - g(x^0)s} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - g(x_1 - x_2)x_2}.$$

L'intervallo di esistenza di $z(s)$ si riflette sul campo di esistenza di u . Infatti la condizione necessaria

$$1 - x_2 g(x_1 - x_2) \neq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (7.27)$$

divide normalmente il piano $\mathbb{R}^2$ in due parti: la soluzione u sarà definita in quella parte che interseca U e contiene Γ . Ad esempio, se $g(x_1) = 1$ allora (7.27) diventa $x_2 \neq 1$ e u è definita in $\mathbb{R} \times [0, 1)$, si veda la Figura 7.6; se $g(x_1) = -x_1^2$, allora (7.27) è sempre soddisfatta e u è definita in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Se invece $g(x_1) = x_1$, allora (7.27) diventa $x_2^2 + x_1x_2 - 1 \neq 0$.

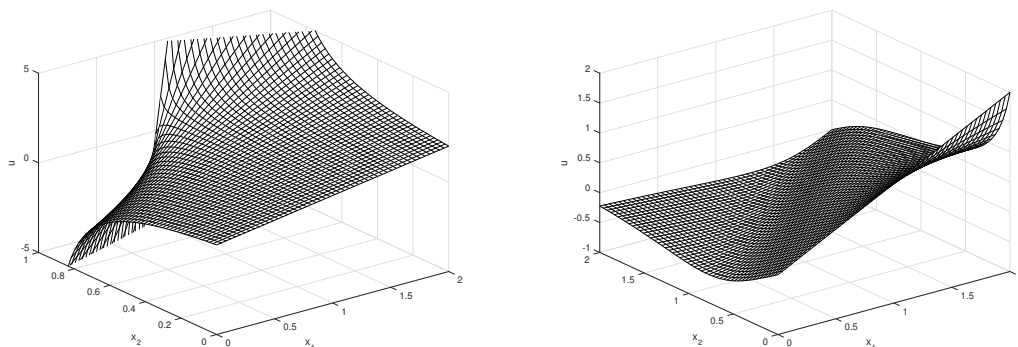


Figura 7.6: La soluzione del problema (7.26) nel caso $g(x_1) = 1$ (a sinistra) e $g(x_1) = -x_1^2$ (a destra).

Esercizio 7.3.5 Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} + x_2 u_{x_1} = u^2 & \text{in } x_2 > 0, \\ u = g & \text{su } x_2 = 0. \end{cases}$$

7.3.3 Il caso quasilineare

Nel caso quasilineare l'equazione $F(Du, u, x) = 0$ si scrive

$$F(Du, u, x) = b(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0. \quad (7.28)$$

Si ha $D_p F = b(x, z)$ da cui, ragionando come sopra, si deduce che il sistema (7.17) si riduce al sottosistema

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) = -c(x(s), z(s)). \end{cases}$$

Di nuovo, la determinazione di p non serve per determinare la soluzione u . Diversamente dai casi precedenti, il sistema è ora *completamente accoppiato*: non possiamo determinare prima $x(s)$ e quindi inserirlo nella seconda equazione per determinare $z(s)$. Nella Tabella 7.1 riassumiamo quanto finora visto per le equazioni delle caratteristiche nei casi lineare, semilineare, quasilineare. Vedremo che il caso completamente non lineare sarà molto diverso.

Equazione	Espressione	Equazioni caratteristiche
lineare	$b(x) \cdot Du + c(x)u = f(x)$	equazioni per $\dot{x}$ e $\dot{z}$ disaccoppiate, equazione per $\dot{z}$ lineare;
semilineare	$b(x) \cdot Du + c(x, u) = 0$	equazioni per $\dot{x}$ e $\dot{z}$ disaccoppiate, equazione per $\dot{z}$ non lineare;
quasilineare	$b(x, u) \cdot Du + c(x, u) = 0$	equazioni per $\dot{x}$ e $\dot{z}$ accoppiate.

Tabella 7.1: Riassunto delle equazioni e delle relative caratteristiche.

Osservazione 7.3.3 In questo caso, così come nei precedenti, può essere utile scrivere l'equazione in modo leggermente diverso per ricordare meglio le equazioni delle caratteristiche. Se infatti consideriamo l'equazione

$$b(x, u) \cdot Du = f(x, u),$$

allora le equazioni delle caratteristiche sono semplicemente

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x, z), \\ \dot{z} = f(x, z). \end{cases} \quad (7.29)$$

In altre parole, $\dot{x}$ è uguagliato al coefficiente di Du , mentre $\dot{z}$ è uguagliato al secondo membro. Non sarà più così nel caso completamente non lineare.

Esempio 7.3.3 (Equazioni di evoluzione) In molte equazioni importanti nelle applicazioni le variabili naturali sono x e t , dove di solito x rappresenta una grandezza spaziale e t un tempo; si veda ad esempio il Capitolo 9. In tal caso, molto spesso il problema associato a queste equazioni è il *problema ai valori iniziali*. Nel caso quasilineare questo porta a considerare il problema

$$\begin{cases} u_t + b(x, t, u) \cdot Du = f(x, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (7.30)$$

Qui $b = b(x, t, u)$ è una funzione regolare a valori vettoriali (un *campo vettoriale*), $f = f(x, t, u)$ e $g = g(x)$ sono funzioni regolari e $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ indica il gradiente di u rispetto alle sole variabili spaziali. Per semplicità di notazioni abbiamo ambientato il problema in tutto $\mathbb{R}^n$ e per $t \in [0, \infty)$; in realtà, l'esistenza globale in tempo di soluzioni viene in generale a mancare. Si veda anche il Capitolo 3 per una classe particolare di equazioni di evoluzione, dette equazioni del trasporto, e l'Esempio 7.6.3.

L'equazione in (7.30) è quasilineare. Per ricadere nelle notazioni generali che abbiamo introdotto sopra, denotiamo $y = (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ e $q = (p, p_{n+1})$, dove p_{n+1} gioca il ruolo di u_t . Allora il problema (7.30) si può scrivere come

$$\begin{cases} B(y, u) \cdot D_y u = f(y, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } y_{n+1} = 0, \end{cases}$$

dove $B = (b, 1)$. In tal caso $F(q, z, y) = B(y, z) \cdot q - f(y, z)$. Le equazioni delle caratteristiche e i relativi dati iniziali sono allora, ricordando (7.29),

$$\begin{cases} \dot{y} = B(y, z), \\ \dot{z} = f(y, z), \\ y(0) = (x^0, 0), \quad z(0) = g(x^0), \end{cases}$$

che, più esplicitamente, diventano

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x, t, z), \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{z} = f(x, t, z), \\ x(0) = x^0, \quad t(0) = 0, \quad z(0) = g(x^0). \end{cases}$$

Si deduce subito che $t(s) = s$ e il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x, s, z), \\ \dot{z} = f(x, s, z), \\ x(0) = x^0, \quad z(0) = g(x^0). \end{cases} \quad (7.31)$$

Esempio 7.3.4 Risolviamo il problema $u_t + uu_x = 0$ con dato $u = x$ a $t = 0$. Da (7.31) deduciamo le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{z} = 0, \\ x(0) = x^0, \quad z(0) = x^0. \end{cases}$$

Pertanto $z(s) = g(x^0)$, $x(s) = x^0 + x^0 s$. Fissato (x, t) abbiamo $(x, t) = (x^0 + x^0 s, s)$ se e solo se $t = s$ e $x = x^0 + g(x^0)t$. Pertanto $u(x, t) = \frac{x}{1+t}$, definita in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Esercizio 7.3.6 (Equazione con campo vettoriale costante) [10, §3.5-4] Sia $b \in \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale costante. Risolvere il problema ai valori iniziali per l'equazione del trasporto

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (7.32)$$

dove $f = f(x, t)$ e $g = g(x)$ sono funzioni regolari date, definite in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ e in $\mathbb{R}^n$, rispettivamente. Verificare che la soluzione coincide con quella data in (3.7).

Esercizio 7.3.7 (Equazione con campo vettoriale variabile) [10, §3.5-6] Sia $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione regolare della variabile x ; vogliamo risolvere l'equazione del trasporto con campo vettoriale variabile

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(ub) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.33)$$

Si noti che u è una funzione scalare (la divergenza è una quantità scalare!) e $bu = {}^T(b^1u, \dots, b^nu)$; se b è costante ritroviamo (7.32) nel caso $f = 0$. Fissiamo un punto $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e indichiamo con $\chi(s; x, t)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x), \\ x(t) = x, \end{cases} \quad (7.34)$$

per $s \in I$, dove I è un intervallo contenente t ; poiché il problema è, in generale, non lineare, la soluzione esisterà solo localmente. Per semplicità supporremo anche $0 \in I$. Pertanto $\chi(t; x, t) = x$: quando il valore del parametro s vale t , la curva $s \mapsto \chi(s; x, t)$ passa per il punto x al tempo t , si veda la Figura 7.7.

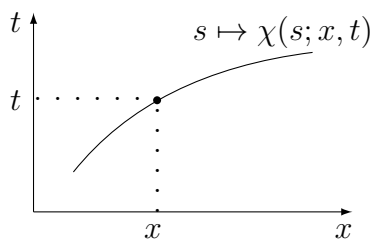


Figura 7.7: La curva $s \mapsto \chi(s; x, t)$.

(a) Posto $J(s; x, t) = \det D_x \chi(s; x, t)$, dedurre la *formula di Eulero*

$$J_s = \operatorname{div} b(\chi) J. \quad (7.35)$$

(b) Provare che se u risolve l'equazione $u_t + \operatorname{div}(ub) = 0$, allora $u(x, t) := g(\chi(0; x, t)) J(0; x, t)$.

7.3.4 Il caso completamente non lineare

Questo è il caso in cui il sistema (7.17) non si semplifica e, in generale, tutte le equazioni sono accoppiate tra loro. Si tratta di un caso piuttosto diverso dai tre casi (lineare, semilineare, quasilineare) che abbiamo esaminato finora.

Facciamo vedere subito, infatti, che non potremo più usare l'equazione per eliminare p nella equazione di z , come abbiamo fatto finora: si vedano ad esempio i calcoli che hanno portato a (7.21). Consideriamo l'equazione $F(Du, x) = 0$ e supponiamo che F non sia lineare in p ; le equazioni delle caratteristiche sono allora

$$\begin{cases} \dot{p} = -D_x F(p, x), \\ \dot{z} = D_p F(p, x) \cdot p, \\ \dot{x} = D_p F(p, x). \end{cases}$$

Le equazioni per x e p sono accoppiate, ma a proposito dell'equazione per z abbiamo che

$$\dot{z} = D_p F \cdot p \neq F(p, x) = 0.$$

Infatti si ha l'uguaglianza solo se F è lineare in p .

Esempio 7.3.5 Consideriamo il problema al contorno

$$\begin{cases} u_{x_1} u_{x_2} = u & \text{in } U, \\ u = x_2^2 & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (7.36)$$

dove, si veda la Figura 7.8,

$$U = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0\}, \quad \Gamma = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} = \partial U.$$

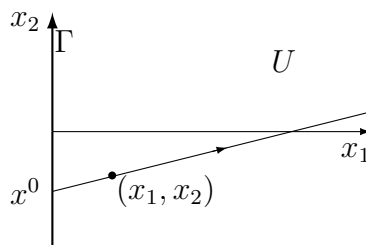


Figura 7.8: La curva caratteristica proiettata passante per $(0, x^0)$.

Abbiamo $F(p, z, x) = p_1 p_2 - z$, da cui $D_p F = (p_2, p_1)$, $D_z F = -1$, $D_x F = (0, 0)$. Perciò il sistema (7.17) si scrive

$$\begin{cases} \dot{p}^1 = p^1, \\ \dot{p}^2 = p^2, \\ \dot{z} = 2p^1 p^2, \\ \dot{x}^1 = p^2, \\ \dot{x}^2 = p^1. \end{cases}$$

In questo caso particolarmente semplice le equazioni per p sono disaccoppiate dalle altre. Pertanto si determinano prima le caratteristiche p , quindi le z e le x . Sia $(0, x^0) \in \Gamma$, $x^0 \in \mathbb{R}$.

Si trova subito

$$p^1(s) = p_1^0 e^s, \quad p^2(s) = p_2^0 e^s,$$

dove p_1^0 e p_2^0 sono due costanti arbitrarie. Pertanto, sfruttando il dato iniziale $x(0) = (0, x^0)$, si ha

$$x^1(s) = p_2^0(e^s - 1), \quad x^2(s) = x^0 + p_1^0(e^s - 1).$$

Infine $\dot{z} = 2p_1^0 p_2^0 e^{2s}$; come notato sopra, non possiamo utilizzare l'equazione per eliminare i termini contenenti p . Integrando quest'ultima equazione troviamo $z(s) = z^0 + p_1^0 p_2^0(e^{2s} - 1)$, dove z^0 è una costante. Ma $z^0 = z(0) = u(0, x^0) = (x^0)^2$ e quindi

$$z(s) = (x^0)^2 + p_1^0 p_2^0(e^{2s} - 1).$$

Rimane il problema di determinare la coppia di dati iniziali (p_1^0, p_2^0) ; questa è una nuova difficoltà, ma possiamo ragionare come segue. Poiché $u(0, x_2) = x_2^2$ su Γ , cioè per ogni $x_2 \in \mathbb{R}$, possiamo derivare questa espressione rispetto a x_2 e dedurre $u_{x_2}(0, x_2) = 2x_2$. Pertanto

$$p_2^0 = u_{x_2}(0, x^0) = 2x^0. \quad (7.37)$$

Non possiamo usare lo stesso procedimento per determinare p_1^0 : infatti possiamo derivare rispetto a x_2 *lungo* Γ la relazione $u(0, x_2) = x_2^2$, ma *non* rispetto a x_1 : per definizione di derivata, in tal caso avremmo bisogno dei valori di u nei punti interni di U , proprio quello che non abbiamo. Ma possiamo usare l'equazione in (7.36) (ecco dove si usa l'equazione!): se la calcoliamo in $(0, x^0)$ troviamo $p_1^0 p_2^0 = z^0 = (x^0)^2$, da cui, per (7.37),

$$p_1^0 = \frac{(x^0)^2}{p_2^0} = \frac{x^0}{2}.$$

Si noti che questo passaggio è corretto se $x^0 \neq 0$. Ma poiché stiamo cercando soluzioni di classe C^1 , per la continuità delle derivate prime abbiamo che $p_1^0 = 0$ se $x^0 = 0$, e dunque la formula di sopra vale per ogni $x^0 \in \mathbb{R}$. Deduciamo allora

$$\begin{cases} p^1(s) = \frac{x^0}{2}e^s, \\ p^2(s) = 2x^0e^s, \\ z(s) = (x^0)^2e^{2s}, \\ x^1(s) = 2x^0(e^s - 1), \\ x^2(s) = \frac{x^0}{2}(e^s + 1). \end{cases} \quad \text{per } s \geq 0.$$

La richiesta $s \geq 0$ è necessaria per far sì che la caratteristica proiettata entri in U , e dunque soddisfi $x_1 \geq 0$. In effetti la curva parametrica $x(s)$ che rappresenta la caratteristica proiettata si può facilmente scrivere in forma cartesiana esplicitando e^s dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda. Si trova così la forma cartesiana $x_2 = \frac{x_1}{4} + x^0$ della caratteristica proiettata. Si noti come, al variare di x^0 in $\mathbb{R}$, le caratteristiche proiettate coprono in maniera univoca tutto U , si veda la Figura 7.8.

Resta da determinare esplicitamente la soluzione. Come al solito, fissiamo $(x_1, x_2) \in U$; allora

$$(x_1, x_2) = (x^1(s), x^2(s)) = \left(2x^0(e^s - 1), \frac{x^0}{2}(e^s + 1) \right).$$

Per eliminare e^s consideriamo $x_1 - 4x_2 = 2x^0(e^s - 1) - 2x^0(e^s + 1) = -4x^0$, da cui $x^0 = -\frac{x_1 - 4x_2}{4}$. Dalla prima componente risulta allora $x_1 = -\frac{x_1 - 4x_2}{2}(e^s - 1)$, da cui $e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1}$. Inserendo tali valori in $z(s)$ si trova

$$u(x_1, x_2) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = \left(\frac{x_1 - 4x_2}{4} \right)^2 \left(\frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1} - 1 \right) = \frac{1}{16}(x_1 + 4x_2)^2.$$

Si veda la Figura 7.9 per il grafico della funzione u .

7.4 Le condizioni al bordo

Nella Sezione 7.2 abbiamo dedotto le equazioni delle caratteristiche per un'equazione alle derivate parziali del primo ordine. Il nostro scopo è di utilizzare questo metodo generale per dedurre un risultato di esistenza locale di soluzioni per il problema (7.4); in via preparatoria, in questa sezione ci concentriamo sulle condizioni al bordo.

Sicuramente i nostri calcoli sarebbero semplificati se l'ipersuperficie Γ fosse (localmente) parte di un iperpiano di $\mathbb{R}^n$. In realtà possiamo ridurci a

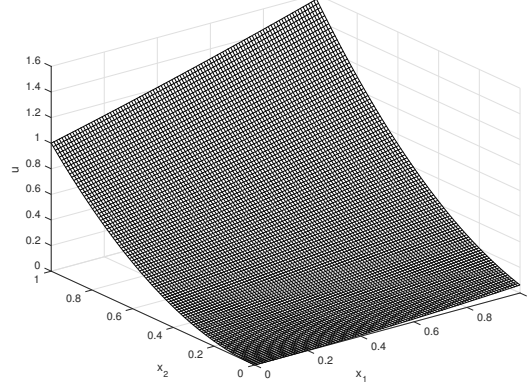


Figura 7.9: La soluzione del problema (7.36).

questo caso tramite un cambiamento di variabili. A questo proposito ricordiamo la Definizione 1.6.1 e supponiamo che il bordo ∂U di U sia di classe C^1 . Fissiamo $x^0 \in \partial U$ e siano r, γ e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ come nella Definizione 1.6.1. Definiamo allora

$$\begin{aligned} \Phi : B(x^0, r) &\longrightarrow \Phi(B(x^0, r)) \\ x &\longmapsto (x', x_n - \gamma(x')). \end{aligned}$$

In altre parole, facciamo il cambiamento di variabili $y = \Phi(x)$. Si noti che $y' = x'$, mentre il luogo $x_n = \gamma(x')$ in $\mathbb{R}_x^n$ corrisponde localmente a $y_n = 0$ in $\mathbb{R}_y^n$; si veda la Figura 7.10. La funzione inversa di Φ è

$$\Psi(y) = (y', y_n + \gamma(y')).$$

Chiaramente si ha

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-1} & 0 \\ -D_{x'}\gamma & 1 \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

e dunque $\det D\Phi = \det D\Psi = 1$.

Non ci resta che fare il cambiamento di variabili $y = \Phi(x)$ nell'equazione $F(Du, u, x) = 0$. Per semplicità, nel seguito scriveremo semplicemente U invece di $U \cap B(x^0, r)$, ricordandoci però che il cambiamento di variabili è locale in x^0 . Con questa convenzione, sia $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione di classe C^1 del problema (7.4), indichiamo $V = \Phi(U)$ e definiamo

$$v(y) = u(\Psi(y)), \quad y \in V,$$

ovvero $u(x) = v(\Phi(x))$ per $x \in U$. Tramite quest'ultima espressione cerchiamo l'equazione alle derivate parziali che v deve soddisfare: derivando si

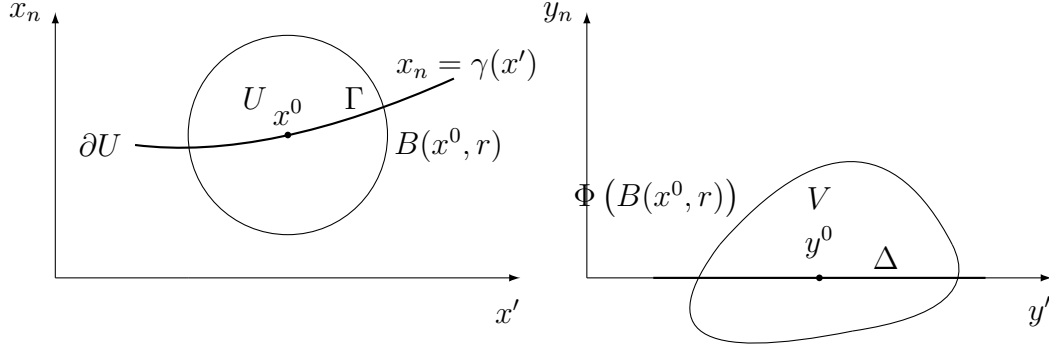


Figura 7.10: Raddrizzamento del bordo di U ; qui $y^0 = \Phi(x^0) = ((x^0)', 0)$.

ha

$$u_{x_i}(x) = \sum_{k=1}^n v_{y_k}(\Phi(x)) \Phi_{x_i}^k(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

ovvero $Du(x) = Dv(\Phi(x)) D\Phi(x)$, si ricordi anche (1.10). Pertanto

$$0 = F(Du, u, x) = F\left(Dv(y) D\Phi(\Psi(y)), v(y), \Psi(y)\right) = G(Dv(y), v(y), y),$$

dove

$$G(q, z, y) := F\left(q D\Phi(\Psi(y)), z, \Psi(y)\right). \quad (7.39)$$

Infine, se poniamo $\Delta := \Phi(\Gamma)$ e $h(y) = g(\Psi(y))$ per $y \in \Delta$, vediamo che v soddisfa il problema

$$\begin{cases} G(Dv, v, y) = 0, & \text{in } V, \\ v = h & \text{su } \Delta. \end{cases} \quad (7.40)$$

La conclusione è che il cambiamento di variabili $y = \Phi(x)$ trasforma il problema (7.4) in uno assolutamente analogo, dove però il bordo è parte di un iperpiano. Risolto dunque il problema (7.40), un semplice cambiamento di variabili ci dà la soluzione del problema (7.4). Per evitare di cambiare le notazioni, supporremo che già il problema (7.4) sia relativo ad un contorno Γ giacente nell'iperpiano $x_n = 0$, si veda la Figura 7.11.

Poiché vogliamo risolvere il problema (7.4) con le caratteristiche (p, z, x) , ritorniamo ora brevemente sulle condizioni iniziali per queste curve. Consideriamo dapprima il caso del valore iniziale (p^0, z^0, x^0) . Chiaramente occorre che

$$z^0 = g(x^0). \quad (7.41)$$

Resta da determinare p^0 , e a questo proposito ricordiamo come facemmo nell'Esempio 7.3.5.

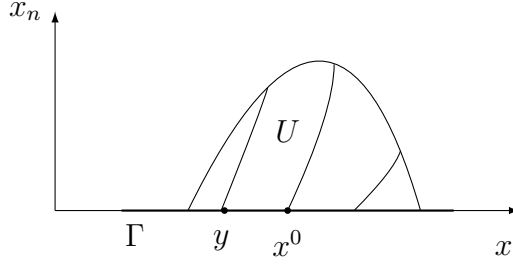


Figura 7.11: Il problema con il bordo raddrizzato.

Poiché $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1})$, se g è di classe C^1 possiamo derivare questa espressione *rispetto* a x_i per $i = 1, \dots, n-1$ e dedurre $p_i^0 = u_{x_i}(x^0) = g_{x_i}(x^0)$ per $i = 1, \dots, n-1$. L'ultima componente p_n^0 è allora determinata dall'equazione (come nell'Esempio 7.3.5) richiedendo $F(p^0, z^0, x^0) = 0$. In conclusione, p^0 è determinato dal sistema

$$\begin{cases} p_i^0 = g_{x_i}(x^0), & i = 1, \dots, n-1, \\ F(p^0, z^0, x^0) = 0. \end{cases} \quad (7.42)$$

In altri termini, mentre x^0 è arbitrario, la scelta di z^0 è p^0 non lo è e dipende da x^0 . Per questa ragione le condizioni (7.41) e (7.42) sono *condizioni di compatibilità*.

Definizione 7.4.1 Una terna (p^0, z^0, x^0) è detta ammissibile se soddisfa (7.41) e (7.42).

Si noti tuttavia la differenza tra i dati iniziali x^0 e z^0 da un lato, determinati sempre univocamente, e p^0 : infatti p_n^0 potrebbe non esistere o non essere unico. Non solo: ricordando gli esempi della Sezione 7.3, per risolvere il problema (7.4) dobbiamo poter risolvere il sistema differenziale delle caratteristiche *per ogni dato iniziale* di Γ , sperando in questo modo di coprire tutto U ; si vedano le Figure 7.1 e 7.11. Indicato con $y = (y', 0)$ un generico punto di Γ , dobbiamo poter trovare una funzione $q = q(y)$, definita per ogni $y \in \Gamma$ vicino a x^0 , soddisfacente

$$q(x^0) = p^0 \quad (7.43)$$

e tale che

$$(p(0), z(0), x(0)) = (q(y), g(y), y). \quad (7.44)$$

Questo vuol dire che q deve soddisfare il sistema

$$\begin{cases} q^i(y) = g_{x_i}(y), & i = 1, \dots, n-1, \\ F(q(y), g(y), y) = 0. \end{cases} \quad (7.45)$$

Lemma 7.4.1 (Condizioni al bordo non caratteristiche) Sia $g \in C^1(\Gamma)$. Supponiamo che $F(p^0, z^0, x^0) = 0$ e

$$F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0. \quad (7.46)$$

Esiste allora una univoca funzione $q = q(y)$, definita per $y \in \Gamma \cap B(x^0, r)$ per qualche $r > 0$, che soddisfi (7.43) e (7.45).

Dimostrazione. Dobbiamo cercare $q^n = q^n(y)$ tale che

$$F(D_x g(y), q^n(y), g(y), y) = 0.$$

Le ipotesi fatte sono quelle che permettono di applicare il Teorema della funzione implicita. $\square$

Definizione 7.4.2 Una terna ammissibile (p^0, z^0, x^0) è non caratteristica se $F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$.

Osservazione 7.4.1 Il Lemma 7.4.1 ci procura le condizioni iniziali (7.44) per risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie (7.17), per y in un intorno di x^0 . Il Teorema di esistenza e unicità di soluzioni di equazione differenziali ordinarie ci garantisce che tali caratteristiche esistono localmente, sono uniche e di classe C^2 .

Osservazione 7.4.2 Nel caso generale in cui Γ non giace sull'iperpiano $x_n = 0$, la condizione che una terna sia non caratteristica diventa

$$D_p F(p^0, z^0, x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0, \quad (7.47)$$

dove $\nu(x^0)$ è la normale esterna a Γ nel punto x^0 . Chiaramente nel caso raddrizzato abbiamo $\nu(x^0) = (0, \dots, 0, 1)$ e pertanto (7.47) equivale a $D_{p_n} F(p^0, z^0, x^0) \neq 0$.

Esercizio 7.4.1 Provare l'Osservazione 7.4.2.

Esercizio 7.4.2 [10, §3.5-5] Risolvere il problema $uu_{x_1} + u_{x_2} = 1$, $u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1$, disegnare le caratteristiche, disegnare il grafico della soluzione con MATLAB. Prestare attenzioni ad eventuali punti in cui il problema diventa caratteristico. Qual è il campo di esistenza di u ?

7.5 Esistenza locale di una soluzione

In questa sezione dimostriamo l'esistenza e l'unicità della soluzione al problema (7.4) nel caso non caratteristico; sfrutteremo per questo la teoria della caratteristiche introdotta nelle sezioni precedenti. Il risultato che dimostreremo non sarà ottimale, cioè quello con le ipotesi più deboli possibili, ma nondimeno si applicherà a un grande numero di casi. Così come per le equazioni differenziali ordinarie, i risultati di esistenza (e unicità) sono in generale difficili da dimostrare; ecco perché, in questo corso introduttivo, ci limitiamo ad un risultato non ottimale; la sua dimostrazione, però, ha il pregio di essere *costruttiva*, e ha il pregio di chiarire ancora meglio, da un punto di vista teorico, quanto abbiamo fatto nelle sezioni precedenti.

Ricordando il Lemma 7.4.1, dobbiamo risolvere il sistema (7.17) nel caso in cui Γ giaccia sull'iperpiano $x_n = 0$ nell'intorno di $x^0 \in \Gamma$, con le condizioni iniziali (7.44). Questo vuol dire che ogni caratteristica (che esiste per l'Osservazione 7.4.1) dipenderà anche dal punto iniziale y ; introduciamo allora le notazioni

$$p(s) = p(y, s), \quad z(s) = z(y, s), \quad x(s) = x(y, s), \quad \text{per } y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0). \quad (7.48)$$

Con queste notazioni la condizione (7.44) si scrive

$$(p(y, 0), z(y, 0), x(y, 0)) = (q(y), g(y), y). \quad (7.49)$$

Il seguente lemma rende conto in maniera rigorosa dell'Osservazione 7.3.1.

Lemma 7.5.1 (Invertibilità locale) *Sia (p^0, z^0, x^0) una terna ammissibile non caratteristica. Esistono allora un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ contenente lo 0, un intorno $W \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di x^0 e un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di x^0 tali che per ogni $x \in V$ esistono unici $(y, s) \in W \times I$ tali che*

$$x = x(y, s). \quad (7.50)$$

Questo definisce delle funzioni $y = y(x)$ e $s = s(x)$ che risultano essere di classe C^2 .

La scrittura $x = x(y, s)$ è ambigua perché la lettera x rappresenta a sinistra un punto di $\mathbb{R}^n$ e a destra la caratteristica passante per y . Non dovrebbe però sorgere confusione perché specificheremo sempre, come abbiamo fatto precedentemente, l'argomento della funzione $x(y, s)$. Il lemma dimostra quanto abbiamo calcolato caso per caso negli esempi precedenti: ovvero che fissato un punto x riusciamo sempre (localmente) a trovare una e una sola caratteristica uscente da Γ (da un certo $y = y(x)$) che passa per x (per un certo $s = s(x)$); si veda la Figura 7.12.

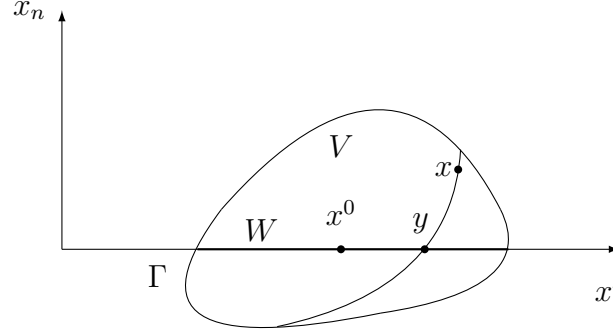


Figura 7.12: Invertibilità locale.

Dimostrazione del Lemma 7.5.1. Indichiamo $x^0 = (y^0, 0)$; si ha allora $x(y^0, 0) = x^0$. Per l'Osservazione 7.4.1, la funzione $x(y, s)$ è definita per $y \in \Gamma$ e s in un intorno di 0, a valori in un intorno di x^0 . Per dimostrare il lemma dobbiamo poter applicare a $x(y, s)$ il Teorema della funzione inversa; dobbiamo perciò dimostrare che

$$\det Dx(y^0, 0) \neq 0,$$

dove $D = (D_y, D_s)$. Sappiamo che $x(y, 0) = (y, 0)$ per ogni $y \in \Gamma$; pertanto, derivando le componenti $x^j(y, 0) = y_j$ di questa espressione rispetto a y_i , per $i = 1, \dots, n-1$, otteniamo

$$x_{y_i}^j(y, 0) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{se } j = 1, \dots, n-1, \\ 0 & \text{se } j = n. \end{cases}$$

Inoltre, dall'equazione della caratteristica, abbiamo che

$$x_s^j(y^0, 0) = F_{p_j}(p^0, z^0, x^0).$$

Pertanto

$$D_{y,s}x(y^0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & F_{p_1}(p^0, z^0, x^0) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & F_{p_{n-1}}(p^0, z^0, x^0) \\ 0 & \dots & 0 & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix}$$

e dunque $\det Dx(y^0, 0) = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ per l'ipotesi di non caratteristicità. La regolarità delle funzioni inverse $y = y(x)$ e $s = s(x)$ segue dall'enunciato del Teorema della funzione inversa: poiché F è di classe C^2 , allora anche le funzioni $s \mapsto x(y, s)$ sono di classe C^2 per il Teorema 7.2.1 mentre l'analoga regolarità rispetto a y segue dal Teorema di dipendenza continua delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie da un parametro. $\square$

Dal Lemma 7.5.1 e (7.48) deduciamo immediatamente, con un leggero abuso di notazione, che

$$u(x) = z(y(x), s(x)), \quad (7.51)$$

$$p(x) = p(y(x), s(x)), \quad (7.52)$$

per $x \in V$. Siamo pronti per dimostrare che la funzione u definita qui sopra è effettivamente soluzione del problema (7.4): avremo così dimostrato rigorosamente il procedimento che avevamo impiegato negli esempi precedenti.

Teorema 7.5.1 (Esistenza locale) *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con $\partial U = \Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di classe C^1 ; sia inoltre $F \in C^2(U)$ e $g \in C^1(\Gamma)$. Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} F(Du, u, x) = 0 & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \Gamma. \end{cases} \quad (7.53)$$

Sia $x^0 \in \Gamma$ e supponiamo che (p^0, z^0, x^0) sia ammissibile e non caratteristico. Allora la funzione u definita in (7.51) risolve (7.53) in un intorno di x^0 .

Dimostrazione. Dal Lemma 7.4.1 e dall'Osservazione 7.4.1 sappiamo che per ogni $y \in W$ esiste localmente (ed è unica) la caratteristica uscente da y . Restano pertanto definite le funzioni $p(y, s)$, $z(y, s)$, $x(y, s)$ per $s \in I$ e, per il Lemma 7.5.1, anche u per $x \in V$ da (7.51).

Incominciamo col dimostrare che

$$F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0, \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (7.54)$$

Indichiamo con $f(y, s)$ il termine di sinistra di (7.54); da (7.49) si ha

$$f(y, 0) = F(q(y), g(y), y) = 0$$

a causa di (7.45)₂. Inoltre da (7.17) deduciamo

$$\begin{aligned} f_s(y, s) &= \sum_{j=1}^n F_{p_j} \dot{p}^j + F_z \dot{z} + \sum_{j=1}^n F_{x_j} \dot{x}^j \\ &= \sum_{j=1}^n F_{p_j} \left(-F_x p^j - F_{x_j} \right) + F_z \sum_{j=1}^n F_{p_j} p^j + \sum_{j=1}^n F_{x_j} F_{p_j} = 0. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Pertanto $f(y, s)$ è costante in s ; poiché $f(y, 0) = 0$, ne segue che $f(y, s) = 0$ e quindi (7.54).

Dal Lemma 7.5.1 deduciamo da (7.54) deduciamo

$$F(p(y(x), s(x)), z(y(x), s(x)), x(y(x), s(x))) = 0, \quad \text{per ogni } x \in V,$$

e dunque, ricordando (7.50) e le notazioni (7.51), (7.52), otteniamo

$$F(p(x), u(x), x) = 0, \quad \text{per ogni } x \in V.$$

Resta solo da dimostrare che $p(x) = Du(x)$. Questo non è difficile ma un po' tecnico: omettiamo la dimostrazione, per la quale si può vedere [10]. $\square$

Osservazione 7.5.1 Si noti che il calcolo che ci ha portato all'espressione (7.55) è analogo a quello impiegato per definire le caratteristiche, si veda l'inizio della Sezione 7.2, ma parte dalla richiesta (7.54).

Il Teorema 7.5.1 stabilisce l'esistenza di soluzioni al problema (7.4), non l'unicità. Dal Lemma 7.4.1 sappiamo che q è unico e dunque, si ricordi l'Osservazione 7.4.1, anche le caratteristiche lo sono. Ci potrebbero essere delle soluzioni diverse dalla (7.51)? No.

Esercizio 7.5.1 Dare un esempio il più semplice possibile di problema caratteristico; dimostrare a risolvere e discutere i problemi che emergono.

Esercizio 7.5.2 Provare che un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale soddisfa sempre la condizione non caratteristica.

7.6 Applicazioni

In questa sezione consideriamo di nuovo alcuni esempi, concentrandoci in particolare sulla condizione di non caratteristicità.

7.6.1 Il caso lineare

Nel caso lineare l'equazione $F(Du, u, x) = 0$ si scrive come in (7.20), cioè

$$F(Du, u, x) = b(x) \cdot Du + c(x)u = 0.$$

Sia Γ una ipersuperficie sulla quale diamo le condizioni al contorno $u = g$. Poiché $D_p F(p, z, x) = b(x)$, la condizione di non caratteristicità (7.47) è

$$b(x^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0, \tag{7.56}$$

e coinvolge *solo* il punto x^0 . Geometricamente, questo vuol dire che il vettore $b(x^0)$ non deve essere perpendicolare a Γ nel punto x^0 , si veda la Figura 7.13.

Se questa condizione è soddisfatta, allora il Lemma 7.4.1 ci assicura l'esistenza (e l'unicità) del dato iniziale $q(y)$ per $p(y, s)$ e l'Osservazione 7.4.1

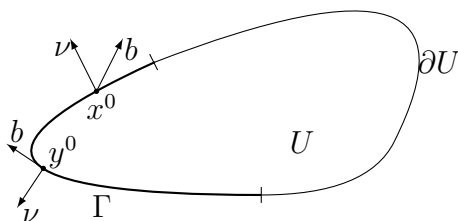


Figura 7.13: Il punto y^0 è caratteristico, il punto x^0 è non caratteristico.

ci garantisce che le caratteristiche esistono. Ricordiamo dalla Sezione 7.3.1 che in questo caso il sistema ridotto (7.21) è sufficiente per determinare la soluzione. Notiamo anche che l'equazione $(7.21)_1$, ovvero

$$\dot{x}(s) = b(x(s)), \quad (7.57)$$

coinvolge solo $x(s)$; pertanto in questo caso *due caratteristiche proiettate $x(y, s)$ uscenti da punti y diversi non si incontrano*. Si noti che lo stesso accade nel caso semilineare.

Esempio 7.6.1 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} b(x) \cdot Du = 0 & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \Gamma, \end{cases} \quad (7.58)$$

L'equazione per le caratteristiche proiettate è (7.57) e supponiamo che esse si concentrino in un unico punto x^0 , si veda la Figura 7.14, dove $b \cdot \nu < 0$ su Γ . Questa focalizzazione accade se $b(x^0) = 0$, cioè le caratteristiche, se esistono per ogni $s > 0$, tendono a 0 per $s \rightarrow \infty$: due caratteristiche non possono intersecarsi.

Un esempio esplicito è $b(x) = -x$, dove $x^0 = 0$; in questo caso le caratteristiche proiettate sono $x(s) = ye^{-s}$, per $y \in \Gamma$ e $s \geq 0$: sono rette e $x(y, s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$.

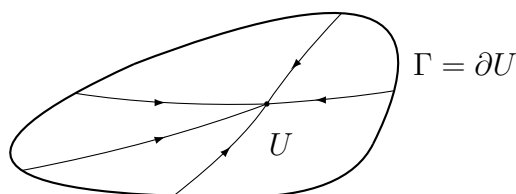


Figura 7.14: Caratteristiche che si concentrano in un punto.

In ogni caso, il Teorema 7.5.1 assicura che esiste una soluzione localmente attorno a Γ ; inoltre la caratteristica per $y \in \Gamma$ relativa a z ha equazione

$\dot{z} = 0$; pertanto z è costante e $z(s) = g(y)$. Quindi $u(x(y, s)) = g(y)$, cioè u è costante lungo ogni caratteristica. La soluzione u non può essere prolungata a x^0 (anche ammettendo che le caratteristiche esistano per ogni $s > 0$), a meno che g non sia costante (in tal caso anche u è costante).

Esercizio 7.6.1 [24, Esempio 2, §1.6] Consideriamo per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il problema al contorno per l'equazione di Eulero

$$\begin{cases} x \cdot Du = \alpha u & \text{in } U, \\ u = g & \text{su } \Gamma. \end{cases} \quad (7.59)$$

- (a) E' soddisfatta la condizione non caratteristica se $U = \{x_n > 0\}$ e $\Gamma = \{x_n = 0\}$?
- (b) Risolvere (7.59) nel caso $U = \{x_n > 1\}$ e $\Gamma = \{x_n = 1\}$, disegnare le caratteristiche, dimostrare che la soluzione u è omogenea di grado α , studiare u lungo le caratteristiche nei casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.
- (c) Dedurre che per $\alpha < 0$ l'equazione $x \cdot Du = \alpha u$ ha, in un intorno dello 0, l'unica soluzione $u = 0$.

Esempio 7.6.2 Consideriamo di nuovo il problema (7.58) ma supponiamo che le caratteristiche (7.57) si comportino come in Figura 7.15(a).

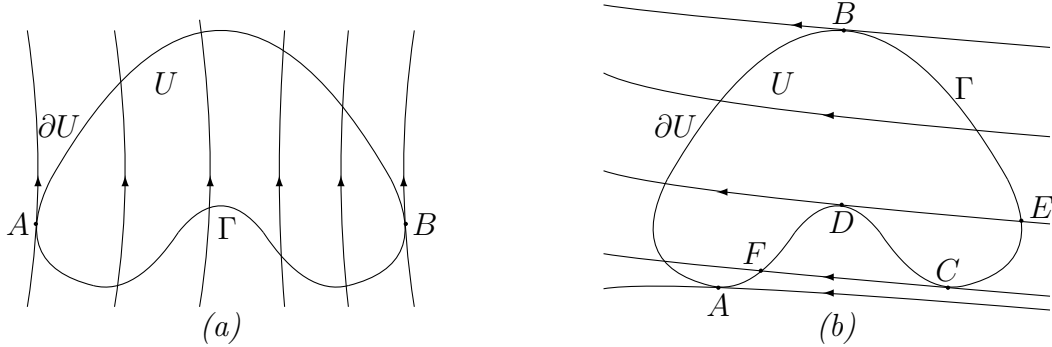


Figura 7.15: Caratteristiche attraverso U .

In questo caso ogni caratteristica uscente da $\Gamma = \{x \in \partial U : b(x) \cdot \nu(x) < 0\}$ entra in U e poi ne esce definitivamente. I punti A e B sono punti caratteristici. In questo caso la soluzione è definita in tutto U : essa è costante lungo ogni caratteristica $x(y, s)$, $y \in \Gamma$, su cui assume il valore $u(x(y, s)) = g(y)$.

Supponiamo invece che le caratteristiche si comportino come in Figura 7.15(b). Anche in questo caso i punti A e B sono caratteristici; lo è anche il punto D . Discutiamo alcune situazioni.

- (i) Se prendiamo come Γ la parte a destra di ∂U compresa tra B e E , allora riusciamo a determinare una soluzione solo in quella parte di U che giace strettamente sopra la caratteristica per E .
- (ii) Se prendiamo come Γ la parte a destra di ∂U compresa tra B e C , allora vi sono caratteristiche (quelle che partono da punti di Γ compresi tra C e E) che entrano ed escono da U . Anche in questo caso, però, riusciamo a determinare la soluzione solo nella parte di U che sta sopra la caratteristica per C .
- (iii) Se prendiamo come Γ la parte a destra di ∂U compresa tra B e A , allora abbiamo due punti caratteristici C e D che rendono inapplicabile il Teorema 7.5.1. Inoltre, dal momento che la soluzione è costante lungo le caratteristiche, occorre che $g(E) = g(D)$, altrimenti la soluzione diventa discontinua.

Osservazione 7.6.1 Il caso semilineare (7.24), ovvero

$$F(Du, u, x) = b(x) \cdot Du(x) + c(x, u) = 0,$$

si tratta nello stesso modo. Si noti che la condizione di non caratteristicità (7.47) è ancora (7.56) e dunque dipende solo da x^0 .

7.6.2 Il caso quasilineare

Nel caso quasilineare l'equazione $F(Du, u, x) = 0$ si scrive come in (7.28), cioè

$$F(Du, u, x) = b(x, u) \cdot Du + c(x, u) = 0.$$

Sia di nuovo Γ una ipersuperficie sulla quale diamo le condizioni al contorno $u = g$. Poiché $D_p F(p, z, x) = b(x, z)$, la condizione di non caratteristicità (7.47) diventa

$$b(x^0, z^0) \cdot \nu(x^0) \neq 0.$$

Si noti che questa condizione dipende sia da x^0 che da $z^0 = g(x^0)$: il *dato al bordo* entra in gioco nella condizione caratteristica. Non era così nei casi lineare e semilineare. Se essa è soddisfatta, allora il Teorema 7.5.1 ci assicura dell'esistenza locale di soluzioni. Inoltre, questa soluzione è determinata solo dalle caratteristiche $x(y, s)$, $z(y, s)$: il calcolo di $p(s, y)$ non serve.

Esempio 7.6.3 (La legge di conservazione) Consideriamo il problema ai valori iniziali per la *legge di conservazione*

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(u) = 0, & \text{in } U = \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (7.60)$$

Il nome di “legge di conservazione” sarà chiarito nel Capitolo 8; si tratta di una equazione molto importante che interviene in numerosissimi modelli fisici, biologici e ingegneristici. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f^1, \dots, f^n)$ è supposta regolare. Con il simbolo “div” intendiamo la divergenza rispetto alle sole variabili spaziali $x_1, \dots, x_n$; nel caso dell’equazione in (7.60) la divergenza si applica alla funzione composta $x \mapsto f(u(x, t))$. In altri termini l’equazione (7.60) si scrive esplicitamente come

$$u_t + \sum_{i=1}^n (f^i)'(u) u_{x_i} = u_t + f'(u) \cdot Du = 0.$$

Si ricordino gli Esempi 7.3.3, 7.3.4 e gli Esercizi 7.3.6, 7.3.7. Usando la notazione $y = (x, t)$, $q = (p, p_{n+1}) = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$, dove p_{n+1} gioca il ruolo di u_t , l’equazione in (7.60) si scrive sotto la forma usuale $F(Du, u_t, u, x, t) = 0$ per

$$F(q, z, y) = p_{n+1} + f'(u) \cdot p.$$

Poiché

$$D_q F(q, z, y) = (f'(u), 1),$$

la condizione non caratteristica (7.47) (o, più esplicitamente, (7.46)) diventa $D_{p_{n+1}} F = 1 \neq 0$, che è sempre soddisfatta in tutti i punti $y^0 = (x^0, 0)$ di Γ . Le equazioni e i dati iniziali delle caratteristiche $x(s)$ e $z(s)$ (omettiamo per brevità di scrivere la dipendenza delle caratteristiche dal punto di passaggio) sono allora

$$\begin{cases} \dot{x}^i(s) = (f^i)'(z(s)), & i = 1, \dots, n, \\ \dot{t}(s) = 1, \\ \dot{z} = 0, \\ x(0) = x^0, \quad t(0) = 0, \quad z(0) = g(x^0). \end{cases}$$

Deduciamo che $t(s) = s$, $z(s) = g(x^0)$ e dunque $x(s) = x^0 + f'(g(x^0)) s$; qui $s \geq 0$ in modo che la caratteristica proiettata entri in U . Pertanto le caratteristiche proiettate $y(s) = (x(s), t(s))$ sono rette, lungo le quali u è costante. Notare che la loro pendenza dipende da f e dal dato iniziale. Si noti una volta di più come il valore iniziale g sia “propagato” alla regione $t > 0$ dalle caratteristiche.

C'è però una differenza sostanziale con i casi lineare e semilineare. In quei casi, infatti, il sistema ridotto delle caratteristiche proiettate *non dipendeva da z* ; tale sistema si riduceva a $\dot{x}(s) = b(x(s))$ (nelle notazioni di (7.20) e (7.24)) e dunque le caratteristiche proiettate non si incontravano mai (potendo naturalmente essere definite soltanto localmente), per il teorema di unicità di soluzione per le equazioni differenziali ordinarie. Nel caso quasilineare, invece, il sistema per le caratteristiche $x(s)$ e $z(s)$ non si disaccoppia: pertanto, mentre di nuovo le curve $(x(s), z(s))$ non si incontrano, *può accadere che le caratteristiche proiettate si intersechino per qualche $s^0 = t^0 > 0$* . Le caratteristiche $(x(s), z(s))$ per i punti $(x^0, g(x^0))$ e $(y^0, g(y^0))$ sono

$$\left(x^0 + f'(g(x^0)) s, s, g(x^0) \right), \quad \left(y^0 + f'(g(y^0)) s, s, g(y^0) \right). \quad (7.61)$$

Se $x^0 \neq y^0$ e $g(x^0) \neq g(y^0)$, allora le due curve in (7.61) non si intersecano: infatti le componenti z sono diverse perché giacciono sui due piani distinti $z = g(x^0)$ e $z = g(y^0)$ nello spazio $\mathbb{R}_{x,t,z}^{n+2}$. Poiché la soluzione è costante lungo le caratteristiche, questo implica che, in generale, *la soluzione non esisterà come funzione C^2 oltre il tempo t^0* . Questo argomento è di fondamentale importanza nelle applicazioni e verrà affrontato nel Capitolo 9.

Prima di considerare in dettaglio il caso scalare, premettiamo una definizione.

Definizione 7.6.1 *Sia $U \subset \mathbb{R}$ un aperto. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 è detta uniformemente convessa se $f''(x) \geq C > 0$ per ogni $x \in U$ e per qualche costante C . Analogamente f è detta uniformemente concava se $f''(x) \leq C < 0$.*

Se f è uniformemente convessa (concava) allora f' è strettamente crescente (decrescente), in particolare invertibile. La funzione $u^2/2$ che interviene nell'equazione di Burgers è uniformemente convessa.

Esempio 7.6.4 (La legge di conservazione, caso scalare) Per capire meglio il problema dell'intersezione delle caratteristiche proiettate, si consideri il caso $n = 1$ e la Figura 7.16, dove per semplicità è raffigurato solo il piano $\mathbb{R}_{x,t}^2$. In tal caso, affinché le due caratteristiche possano intersecarsi, occorre che

$$\frac{1}{f'(g(x^0))} > \frac{1}{f'(g(y^0))},$$

ovvero $f'(g(x^0)) > f'(g(y^0))$ e dunque, in generale, che

$$f'(g(y)) < f'(g(x)), \quad \text{se } x < y. \quad (7.62)$$

Supponiamo f uniformemente convessa. In tal caso f' è strettamente crescente e la condizione (7.62) di intersezione è soddisfatta se g è *strettamente decrescente*; se invece g è strettamente crescente allora (7.62) non è mai soddisfatta e le caratteristiche non si intersecano: si “aprono” invece di “chiudersi”.

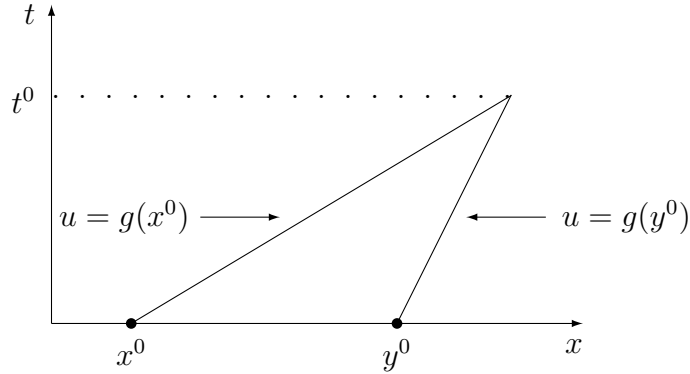


Figura 7.16: Incontro di caratteristiche proiettate nel caso quasilineare; qui $n = 1$. La caratteristica per x^0 ha pendenza $\frac{1}{f'(g(x^0))}$, quella per y^0 ha pendenza $\frac{1}{f'(g(y^0))}$.

Ritornando al caso generale in cui $x \in \mathbb{R}^n$, una semplice formula di rappresentazione *implicita* per la soluzione u di (7.60) può essere ottenuta come segue; essa è interessante perché dà informazioni sul tempo di esistenza di u . Procediamo come al solito: fissato (x, t) con $t > 0$, avremo $(x, t) = (x^0 + f'(g(x^0))s, s)$ se e soltanto se $t = s$ e allora $x = x^0 + f'(g(x^0))t = x^0 + f'(u)t$, in quanto sulla caratteristica vale $u(x, t) = g(x^0)$. Pertanto $x^0 = x - f'(u)t$ e

$$u(x, t) = g(x^0) = g(x - f'(u)t). \quad (7.63)$$

Si noti che se f è lineare, allora $f(u) = bu$ e (7.63) diventa la formula esplicita $u(x, t) = g(x - bt)$, si veda (3.5). E' facile verificare che la formula (7.63) dà effettivamente una soluzione sotto la condizione

$$1 + tDg(x - tf'(u)) \cdot f''(u) \neq 0, \quad (7.64)$$

si veda l'Esercizio 7.6.2. Nel caso $n = 1$ tale formula si riduce a

$$1 + tg'(x - tf'(u)) f''(u) \neq 0.$$

Ritroviamo che se f è uniformemente convessa e g strettamente decrescente allora tale formula non potrà essere valida per tutti i $t > 0$, come avevamo capito geometricamente qui sopra.

Esercizio 7.6.2 Provare che la formula implicita (7.63) fornisce una soluzione al problema (7.60) sotto la condizione (7.64).

7.6.3 Il caso completamente non lineare

Una delle equazioni più importanti del caso completamente non lineare è l'equazione di Hamilton-Jacobi. Invece di analizzare il caso generale ci concentriamo su questo esempio.

Esempio 7.6.5 (Caratteristiche per l'equazione di Hamilton-Jacobi)

Consideriamo ora l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(Du, x) = 0. \quad (7.65)$$

Come nell'Esempio 7.6.3, anche qui Du indica il gradiente di u rispetto alle sole variabili spaziali; la funzione $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ è supposta regolare. L'equazione (7.65) è di importanza fondamentale in Meccanica Analitica; in quel contesto la funzione H è detta *funzione Hamiltoniana*. Più precisamente, le equazioni di Hamilton (che vedremo qui sotto) possono essere interpretate come una possibile riformulazione delle equazioni di Lagrange, a cui esse sono equivalenti. Omettendo il rapporto tra Lagrangiana e Hamiltoniana, ecco alcuni esempi di funzioni di Hamilton nel caso di qualche esempio fisico.

- Un punto materiale di massa m su una retta, soggetto a potenziale posizionale V :

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

In questo caso $p = m\dot{x}$ è il momento lineare. Per $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ si ha l'oscillatore armonico lineare di pulsazione ω .

- Il pendolo: se θ è la coordinata angolare e l la lunghezza del pendolo,

$$H(p, \theta) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta.$$

Qui $p = ml^2\dot{\theta}$ è il momento angolare.

- Una carica elettrica e in un campo elettromagnetico assegnato: in questo caso $x \in \mathbb{R}^3$. Se $\phi(x, t)$ e $A(x, t) = (A^1(x, t), A^2(x, t), A^3(x, t))$ sono i potenziali scalare e vettore, allora

$$H(p, x) = \frac{(p - eA)^2}{2m} + e\phi.$$

In questo caso $p = m\dot{x} + eA$, con $p \neq 0$ per $\dot{q} = 0$.

Usando le stesse notazioni dell'Esempio 7.6.3 vediamo che l'equazione (7.65) può essere scritta nella forma $F(D_y u, u, y) = 0$ per

$$F(q, z, y) = p_{n+1} + H(p, x).$$

Si ha

$$D_q G = (D_p H, 1), \quad D_z G = 0, \quad D_y G = (DH, 0).$$

Pertanto le equazioni delle caratteristiche proiettate (7.17)₁ si scrivono

$$\begin{cases} \dot{x}^i(s) = H_{p_i}(p(s), x(s)), & i = 1, \dots, n, \\ \dot{x}^{n+1}(s) = 1. \end{cases}$$

Come nell'Esempio 7.6.3 possiamo dunque usare t come parametro invece di s . Le equazioni per le caratteristiche p sono

$$\begin{cases} \dot{p}^i(s) = -H_{x_i}(p(s), x(s)), & i = 1, \dots, n, \\ \dot{p}^{n+1}(s) = 0. \end{cases}$$

Infine, per quanto riguarda $z(s)$,

$$\dot{z} = D_p H(p(s), x(s)) \cdot p(s) + p^{n+1} = D_p H(p(s), x(s)) \cdot p(s) - H(p(s), x(s)),$$

usando l'equazione (7.65). In forma compatta le caratteristiche si scrivono dunque, tralasciando le equazioni banali per x^{n+1} e per p^{n+1} ,

$$\begin{cases} \dot{p} = -D_x H(p, x), \\ \dot{z} = D_p H(p, x) \cdot p + H(p, x), \\ \dot{x} = D_p H(p, x). \end{cases}$$

Il primo e il terzo blocco di equazioni, cioè

$$\begin{cases} \dot{p} = -D_x H(p, x), \\ \dot{x} = D_p H(p, x), \end{cases}$$

sono anche dette *equazioni di Hamilton*; si noti l'aspetto antisimmetrico di questo sistema. Si noti inoltre che la determinazione di $x(s)$ e $p(s)$ non dipende da $z(s)$, la quale, invece, è determinata a posteriori dalla conoscenza delle prime due per semplice integrazione.

Naturalmente, come per nel caso delle leggi di conservazione, anche nel caso delle equazioni di Hamilton-Jacobi una soluzione non è definita, in generale, per ogni $t > 0$.

Esercizio 7.6.3 Scrivere le equazioni di Hamilton per le funzioni Hamiltoniane riportate sopra.



Hamilton



Jacobi

Capitolo 8

La legge di conservazione scalare

"Ogni legge fisica, come del resto ogni sviluppo matematico, definisce una relazione di invarianza; le proposizioni più fondamentali formulate dalla scienza sono postulati universali di conservazione"

(J. Monod)

8.1 Introduzione

In questo capitolo affrontiamo lo studio delle soluzioni di una legge di conservazione *scalare* in *una* variabile spaziale; nel capitolo seguente vedremo come quasi tutte le idee introdotte qui possono essere estese al caso di sistemi di leggi di conservazione, sempre nel caso di una variabile spaziale. Ci occuperemo dunque del problema ai valori iniziali



Riemann

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (8.1)$$

dove $x \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \infty)$, $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f sarà sempre supposta regolare quanto serve, ad esempio $f \in C^2(U)$, mentre la regolarità di g sarà discussa caso per caso. Ci concentreremo in particolare sul *problema di Riemann* [39], cioè il problema ai valori iniziali (8.1) in cui g è costante a tratti con un unico punto di salto a $x = 0$:

$$g(x) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < 0, \\ u_r & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (8.2)$$

dove $u_l, u_r \in \mathbb{R}$. Visto che la funzione g ha un punto di salto in $x = 0$, il suo valore in tale punto non è importante e, a seconda dei casi, sarà u_l o u_r ;

per semplicità, ometteremo spesso di specificare il valore sia di g che di u nei punti di discontinuità..

Prima di iniziare, premettiamo alcune considerazioni di carattere generale sull'equazione

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (8.3)$$

(i) Nel presente caso *scalare*, ogni equazione quasilineare

$$u_t + a(u)u_x = 0,$$

dove a è continua, può essere scritta sotto questa forma: basta scegliere $f(u) = \int a(v) dv$. Infatti ogni funzione continua ammette primitive, che risultano di classe C^1 .

(ii) Dagli Esempi 7.6.3 e 7.6.4 sappiamo che ogni funzione costante $u(x, t) = C$ è soluzione di (8.3). Inoltre, sostituendo alla funzione f una funzione $g(u) = f(u) + C$, dove C è una costante, l'equazione non cambia. Possiamo pertanto assumere senza perdere di generalità che

$$f(0) = 0. \quad (8.4)$$

Ogni soluzione u è costante lungo le caratteristiche proiettate (rette)

$$y(s, x^0) = (x^0 + f'(g(x^0))s, s), \quad x^0 \in \mathbb{R}, \quad (8.5)$$

e vale $u(y(s, x^0)) = g(x^0)$.

(iii) Diamo ora una spiegazione formale del nome dato a queste equazioni: *cosa si conserva?* Sia u una soluzione di classe C^1 di questa equazione tale che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$; questa ipotesi di annullamento all'infinito è soddisfatta in moltissimi casi reali. Se integriamo (8.3) rispetto a x in tutto $\mathbb{R}$ troviamo, usando (8.4),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(u(x, t))_x dx = - \left[f(u(x, t)) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} f(u(x, t)) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f(u(x, t)) = 0. \end{aligned}$$

Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale (ad esempio, se sia $u(x, t)$ che $u_t(x, t)$ sono sommabili in x per ogni t), si deduce che

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Questo vuol dire che se $u = g$ su $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, \quad (8.6)$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \text{ è conservato.}$$

Esempio 8.1.1 (Equazione di Burgers) L'esempio più semplice di una legge di conservazione quasilineare è l'equazione di Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0. \quad (8.7)$$

Essa può essere interpretata come un modello estremamente semplificato per la velocità in un flusso fluido, si veda l'Esempio 9.3.2 e [4].

Esempio 8.1.2 (L'equazione LWR del traffico stradale) Consideriamo una strada, che supponiamo dritta e ad un unico senso di marcia, e un flusso di veicoli su di essa; assumiamo inoltre che non vi siano né ingressi né uscite e che non avvengano incidenti. Invece di modellizzare i singoli veicoli (necessariamente tramite equazioni differenziali ordinarie), pensiamo di modellizzare tale flusso come un flusso fluido. Indichiamo allora con $\rho(x, t)$ la densità di veicoli nel punto x della strada e al tempo t ; avremo che $0 \leq \rho(x, t) \leq \rho_{\max}$, dove $\rho_{\max}$ è la densità massima di veicoli che si può avere lungo la strada. Supponiamo che la velocità v sia unicamente funzione della densità, e dunque $v = v(\rho)$. Tipicamente v è una funzione decrescente di ρ , dove $v(0) = v_{\max}$ è la velocità massima prescritta e $v(\rho_{\max}) = 0$.

Il flusso è allora regolato dalla legge di conservazione di Lighthill-Whitham-Richards [31, 38], in breve LWR,

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = 0.$$

In questo caso ciò che si conserva è $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx$, ovvero la quantità totale di auto al tempo t .

8.2 Una motivazione alla formazione delle discontinuità

In questa breve sezione cerchiamo di dare una semplice motivazione geometrica della formazione o meno di discontinuità in una soluzione di una equazione quasilineare.

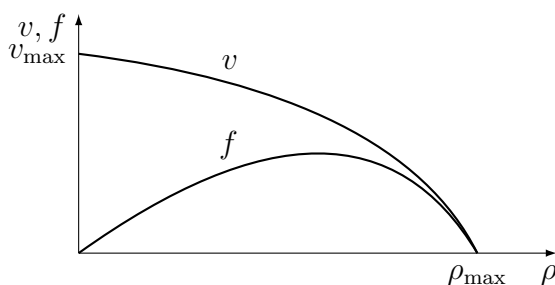


Figura 8.1: Velocità v e flusso $f(\rho) = \rho v(\rho)$ per l'equazione LWR.

Consideriamo l'equazione *lineare*

$$u_t + au_x = 0,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Una semplice analisi dimensionale dimostra che a ha le dimensioni fisiche di una velocità, qualunque sia la dimensione fisica di u . Velocità di cosa? Riferendoci all'espressione (8.3) abbiamo $f(u) = au$, $f' = a$, $y(s, x^0) = (x^0 + as, s)$. Le caratteristiche sono rette parallele di pendenza a e la soluzione è

$$u(x, t) = g(x - at).$$

Pertanto a rappresenta la velocità alla quale il dato iniziale è trasportato senza deformazione, si veda la Figura 8.2.

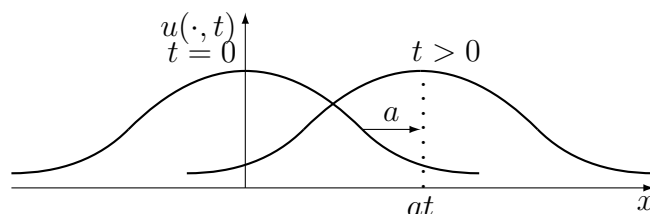


Figura 8.2: La soluzione nel caso lineare.

Nel caso quasilineare potremmo allora interpretare il termine $f'(u)$ che compare in $u_t + f'(u)u_x = 0$ come la velocità alla quale il dato g è trasportato. In questo caso, però, tale velocità dipende dal valore di u ; ad esempio, nel caso dell'equazione di Burgers

$$u_t + uu_x = 0,$$

quanto più grande è il valore di u , tanto maggiore sarà la velocità del trasporto. Questo vuol dire che il grafico iniziale di g non è trasportato in maniera rigida, come nel caso lineare, ma viene deformato, si veda la Figura 8.3. Si capisce bene come ad un certo istante di tempo il grafico diventi verticale: da quell'istante in poi la soluzione è discontinua.

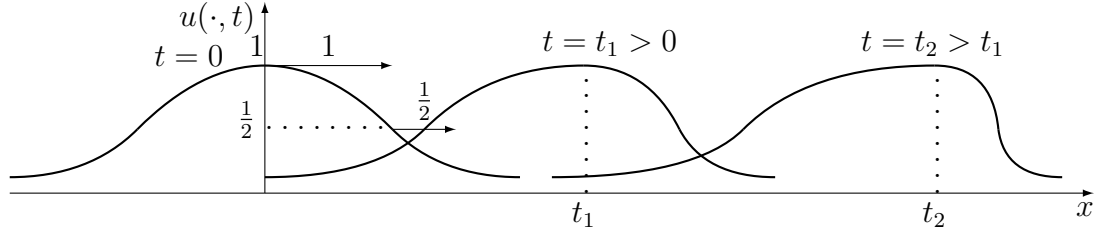


Figura 8.3: La soluzione nel caso quasilineare dell'equazione di Burgers.

Esercizio 8.2.1 Si consideri l'equazione LWR nel caso $\rho_{\max} = 1$ e $v(\rho) = 1 - \rho$, cioè $\rho_t + (1 - 2\rho)\rho_x$. Discutere graficamente l'evoluzione di un dato iniziale analogo a quello considerato sopra e darne un'interpretazione in termini di traffico stradale.

8.3 Soluzioni integrali

Abbiamo visto nel Capitolo 7 e nella Sezione 8.2 che anche nel caso in cui g sia regolare non possiamo aspettarci, in generale, l'esistenza di soluzioni di classe C^1 per ogni $t > 0$: le caratteristiche (proiettate) si possono incontrare, si veda l'Esempio 7.6.3. E' possibile indebolire il concetto di soluzione in modo da poter definire "soluzioni" anche dopo l'intersezione delle caratteristiche?

Sia u una soluzione di classe C^1 di (8.1) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, detta *funzione test*. Se moltiplichiamo (8.3) per ϕ e integriamo in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) \phi \, dx \, dt \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\infty u_t \phi \, dt \right) dx + \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(u)_x \phi \, dx \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \left([u\phi]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty u \phi_t \, dt \right) dx + \int_0^\infty \left([f(u)\phi]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^\infty f(u) \phi_x \, dx \right) dt \\
 &= - \int_{-\infty}^\infty g(x) \phi(x, 0) \, dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u \phi_t + f(u) \phi_x) \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

Nella seconda riga, l'uso del Teorema di Fubini sull'inversione dell'ordine di derivazione è giustificato in quanto l'insieme di integrazione è compatto e le funzioni sono regolari. Nella terza riga abbiamo integrato per parti, sfruttando la forma conservativa dell'equazione; si ha $[u\phi]_{t=0}^{t=\infty} = g(x)\phi(x, 0)$

e $[f(u)\phi]_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0$ poiché ϕ è a supporto compatto. Concludendo,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt + \int_{-\infty}^\infty g\phi|_{t=0} dx = 0. \quad (8.8)$$

Sebbene questa espressione sia stata dedotta assumendo u di classe C^1 , essa non coinvolge le derivate di u ; affinché (8.8) abbia senso è sufficiente che u sia limitata, cioè $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Questo motiva la seguente definizione.

Definizione 8.3.1 Una funzione $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ è detta soluzione integrale o debole del problema (8.1) se vale (8.8) per ogni $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Una funzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ è detta soluzione classica o forte del problema (8.1) se soddisfa puntualmente (8.1).

Si noti bene che nella Definizione 8.3.1 si richiede soltanto che u sia limitata; in particolare u potrebbe essere *discontinua*, dunque *non derivabile*.

Nel caso in cui si sia interessati a soluzioni dell'equazione (8.3) in un aperto $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$, allora ci si limita a funzioni test $\phi \in C_c^\infty(U)$; in tal caso l'ultimo addendo di (8.8) è nullo e una funzione $u \in L^\infty(U)$ è soluzione integrale in U dell'equazione (8.3) se vale

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt = 0 \quad (8.9)$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Esercizio 8.3.1 Se u è soluzione integrale del problema (8.1) (con un po' di regolarità in più) allora vale ancora (8.6); più precisamente dimostrare quanto segue, [3, §7, Pr. (3)]. Sia u una soluzione continua dell'equazione $u_t + f(u)_x = 0$. Per ogni $a < b$ e $0 \leq \tau_0 < \tau$ si ha allora che

$$\int_a^b u(x, \tau) dx - \int_a^b u(x, \tau_0) dx = \int_{\tau_0}^\tau (f(u(a, t)) - f(u(b, t))) dt.$$

Una estensione ulteriore al caso in cui u è discontinua si trova in [3, §7, Pr. (3)].

Suggerimento: sia $\delta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funzione di classe C^∞ a supporto in $[-1, 1]$ tale che $\int_{-\infty}^\infty \delta(z) dz = 1$. Definiamo allora $\delta_h(z) = h\delta(hz)$, $\alpha_h(z) = \int_{-\infty}^z \delta_h(s) ds$. Scegliamo allora $\phi^h(x, t) = (\alpha_h(x - a) - \alpha_h(x - b)) \cdot (\alpha_h(t - \tau_0) - \alpha_h(t - \tau))$ come funzione test nella definizione di soluzione integrale. Si passi poi al limite per $h \rightarrow \infty$.

Lemma 8.3.1 Sia u una soluzione integrale in $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ dell'equazione (8.3). Se u è di classe C^1 allora u è soluzione classica.

Dimostrazione. Integrando per parti si ha, per ogni $\phi \in C_c^\infty(U)$ si ha

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) \phi dxdt.$$

Poiché questa identità vale per ogni $\phi \in C_c^\infty(U)$, ne segue che $u_t + f(u)_x = 0$ in U , si veda l'Esercizio 8.3.2. $\square$

Esercizio 8.3.2 Provare che se $U \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e $f \in C^0(U)$ soddisfa $\int_U f(x, t)\phi(x, t) dxdt$ per ogni $\phi \in C_c^\infty(U)$, allora $f = 0$.

La domanda che ci poniamo ora è la seguente: *cosa implica su u la condizione (8.9) nel caso in cui u non sia di classe C^1 ?* Per rispondere a questa domanda consideriamo un caso semplice ma importante.

Sia $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ un aperto e $x = s(t)$, $t \in I$, una curva il cui sostegno γ sia contenuto in U ; sia inoltre u una soluzione integrale di (8.3) in U che sia discontinua lungo γ ma regolare altrove. Denotiamo, si veda la Figura 8.4,

$$U_l = \{(x, t) \in U : x < s(t)\}, \quad U_r = \{(x, t) \in U : x > s(t)\}.$$

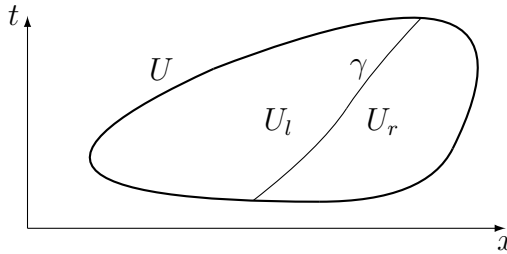


Figura 8.4: L'insieme U e i sottoinsiemi U_l , U_r e γ .

Supponiamo anche che per ogni $t \in I$ esistano finite le tracce

$$u_l(t) = \lim_{\substack{x \rightarrow s(t)^- \\ x \in U_l}} u(x, t), \quad u_r(t) = \lim_{\substack{x \rightarrow s(t)^+ \\ x \in U_r}} u(x, t), \quad (8.10)$$

e indichiamo il salto di u e di $f(u)$ attraverso γ con

$$[u] = u_l - u_r, \quad [f(u)] = f(u_l) - f(u_r),$$

per ogni $t \in I$.

Esercizio 8.3.3 Provare che se u , u_t e u_x sono uniformemente continue in U_l e in U_r , allora le tracce u_l e u_r (si veda (8.10)) sono ben definite.

Lemma 8.3.2 (Condizione di Rankine-Hugoniot) *Sia $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ un aperto e $x = s(t)$, $t \in I$, una curva di classe C^1 il cui sostegno γ sia contenuto in U . Sia u una soluzione integrale di (8.3) in U che sia discontinua lungo γ , di classe C^1 in $U \setminus \gamma$, e che sia prolungabile in modo C^1 a $U_l \cup \gamma$ e $U_r \cup \gamma$. Allora u è soluzione classica in $U_l \cup U_r$ mentre lungo γ si ha, per ogni $t \in I$,*

$$\dot{s}[u] = [f(u)]. \quad (8.11)$$

Dimostrazione. Per ipotesi vale la (8.9) per ogni $\phi \in C_c^\infty(U)$. In particolare essa vale per ogni ϕ con $\text{spt } \phi \subset U_l$ o $\text{spt } \phi \subset U_r$, e dunque dal Lemma 8.3.1 la funzione u è soluzione classica in U_l e in U_r .

Consideriamo il caso in cui $\text{spt } \phi \cap \gamma \neq \emptyset$. Da (8.9) si ha

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt = \iint_{U_l} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt + \iint_{U_r} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt. \quad (8.12)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \iint_{U_l} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt &= \iint_{U_l} (u\phi)_t + (f(u)\phi)_x - (u_t + f(u)_x)\phi dxdt \\ &= \iint_{U_l} (u\phi)_t + (f(u)\phi)_x dxdt \end{aligned}$$

in quanto u è soluzione classica in U_l . La funzione integranda nell'ultimo integrale è la divergenza (in (x, t)) del campo vettoriale $(f(u)\phi, u\phi)$; applicando il Teorema della divergenza si deduce

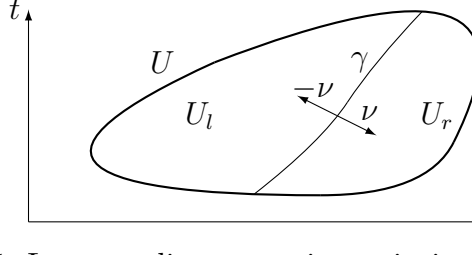
$$\iint_{U_l} (u\phi)_t + (f(u)\phi)_x dxdt = \int_{\partial U_l} (f(u)\phi, u\phi) \cdot \nu d\sigma = \int_\gamma (f(u)\phi, u\phi) \cdot \nu d\sigma,$$

dove $\nu = (\nu^1, \nu^2)$ è il versore normale esterno a ∂U_l , che esiste poiché γ è di classe C^1 , si veda la Figura 8.5. Qui si è usato il fatto che ϕ è nulla su ∂U . In conclusione si ha che

$$\iint_{U_l} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt = \int_\gamma (f(u)\phi, u\phi) \cdot \nu d\sigma. \quad (8.13)$$

Un risultato analogo vale per l'integrale doppio su U_r ma, se vogliamo continuare ad indicare con ν il versore normale esterno a ∂U_l , appare un segno negativo, si veda la Figura 8.5. Pertanto,

$$\iint_{U_r} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt = - \int_\gamma (f(u)\phi, u\phi) \cdot \nu d\sigma. \quad (8.14)$$

Figura 8.5: Le normali esterne ai sottoinsiemi U_l , U_r .

Sommando (8.13) e (8.14), da (8.12) deduciamo, per ogni $\phi \in C_c^\infty(U)$,

$$0 = \int_{\gamma} \left((u_l - u_r) \nu^2 + (f(u_l) - f(u_r)) \nu^1 \right) \phi d\sigma.$$

Ragionando come nell'Esercizio 8.3.2 abbiamo che, per la continuità delle tracce,

$$(u_l - u_r) \nu^2 + (f(u_l) - f(u_r)) \nu^1 = 0 \quad \text{su } \gamma. \quad (8.15)$$

Poiché

$$\nu = \frac{(1, -\dot{s})}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}},$$

la condizione (8.11) segue. $\square$

Osservazione 8.3.1 La condizione (8.11) è detta *condizione di Rankine-Hugoniot* e, come abbiamo visto, è implicata dalla definizione di soluzione integrale. In altre parole, potremo considerare soluzioni discontinue di (8.3), ma i salti della soluzione u e di $f(u)$ dovranno essere legati alla velocità di propagazione $\dot{s}$ della discontinuità dalla condizione di Rankine-Hugoniot. In altri termini ancora, le variazioni di $f(u)$ e u attraverso γ devono essere proporzionali tramite il fattore di proporzionalità $\dot{s}$.

La condizione di Rankine-Hugoniot ha una semplice interpretazione geometrica: nel piano (u, f) , il coefficiente angolare della retta congiungente i due punti $(u_l, f(u_l))$ e $(u_r, f(u_r))$ è precisamente $\dot{s}$, si veda la Figura 8.6. Si noti infine come la condizione di Rankine-Hugoniot sia molto simile al Teorema del valor medio di Lagrange, che asserisce che, nelle notazioni di sopra, esiste u_0 tra u_l e u_r tale che

$$f(u_l) - f(u_r) = f'(u_0)(u_l - u_r),$$

ovvero, $\dot{s} = f'(u_0)$. Si noti che la formula di Taylor all'ordine 0 con resto in forma di Lagrange dà

$$f(u_l) - f(u_r) = \int_0^1 f'(u_r + t(u_l - u_r)) dt (u_l - u_r),$$

che fornisce un valore esplicito della velocità di propagazione, si veda (9.50). Se in particolare f è uniformemente convessa o concava, allora tale valore è unico.

Infine, si veda [30, pag. 32–34] per una derivazione più “fisica” di questa condizione.

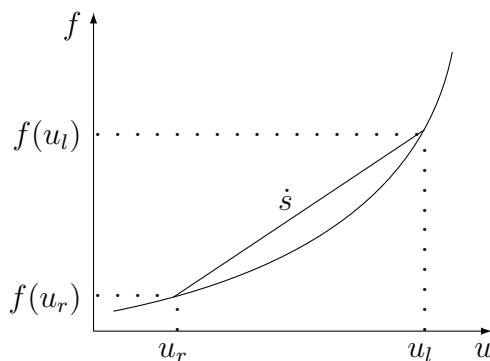


Figura 8.6: Interpretazione geometrica della condizione di Rankine-Hugoniot.

Esercizio 8.3.4 Nel dedurre la condizione di Rankine-Hugoniot abbiamo supposto che la curva γ non fosse orizzontale, ovvero che fosse una funzione della variabile t . Cosa si può dire nel caso in cui γ è orizzontale?

8.4 Esempi

Facciamo vedere nei seguenti due importanti esempi le conseguenze della condizione di Rankine-Hugoniot.

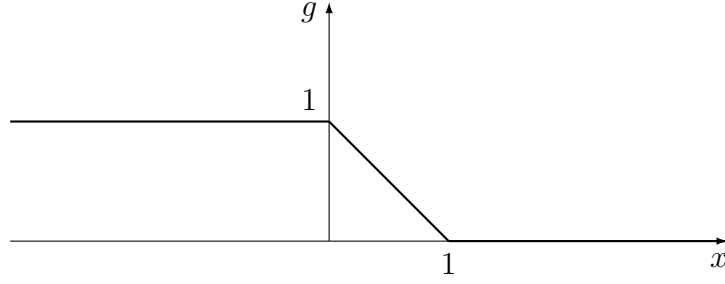
Esempio 8.4.1 (Formazione di onde d’urto) Consideriamo il problema ai valori iniziali per l’equazione di Burgers

$$\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (8.16)$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{se } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Sebbene g non sia di classe C^1 , la teoria delle caratteristiche si applica ugualmente. Infatti g non è di classe C^1 in 0 e in 1, ma in questi punti esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata; la teoria generale si

Figura 8.7: La funzione g .

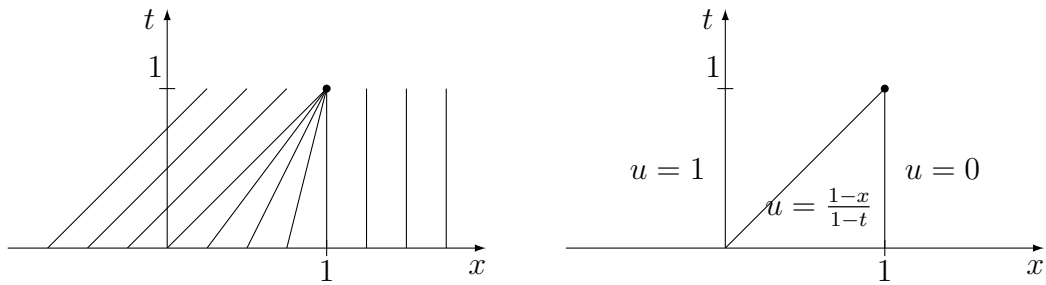
applica dunque agli intervalli in cui g si prolunga come funzione C^1 . Si noti che $f(u) = u^2/2$ è convessa mentre g è decrescente: si ricordi l'Esempio 7.6.4. Dividiamo questo esempio in due parti.

(a) Le caratteristiche proiettate sono, si veda (8.5),

$$y(s, x^0) = (x^0 + g(x^0)s, s), \quad x^0 \in \mathbb{R}, \quad (8.17)$$

e una soluzione soddisfa $u(y(s, x^0)) = g(x^0)$. Abbiamo i seguenti casi, si veda la Figura 8.8.

- (i) Se $x^0 \leq 0$, allora $g(x^0) = 1$, $y(s, x^0) = (x^0 + s, s)$ e $u(y(s, x^0)) = 1$.
- (ii) Se $x^0 \in (0, 1)$, allora $g(x^0) = 1 - x^0$, $y(s, x^0) = (x^0 + (1 - x^0)s, s)$. Tutte le caratteristiche si intersecano quando $s = 1$ nel punto $(1, 1)$. Invertendo, si ha $(x^0 + (1 - x^0)s, s) = (x, t)$ se $s = t$ e $x^0 = \frac{x-t}{1-t}$ per $t < 1$. In questo caso $u(x, t) = 1 - x^0 = \frac{1-x}{1-t}$.
- (iii) Se $x^0 \geq 1$, allora $g(x^0) = 0$, $y(s, x^0) = (x^0, s)$ e $u(y(s, x^0)) = 0$.

Figura 8.8: Caratteristiche per l'equazione di Burgers e valori della soluzione u per $t < 1$.

Concludendo, per $t < 1$ si ha, si vedano le Figure 8.8 e 8.9,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq t, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t < x < 1, \\ 0 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

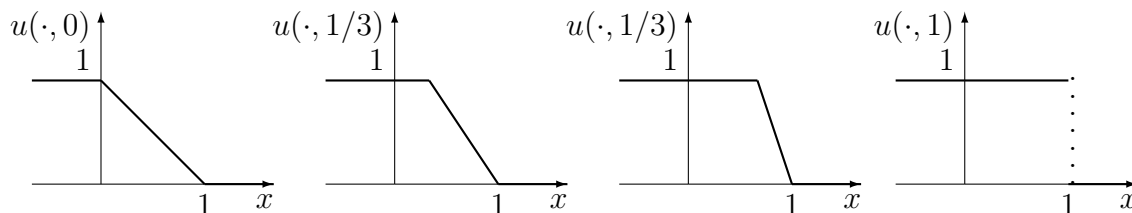


Figura 8.9: Grafici della soluzione $u(\cdot, t)$ per alcuni $t \leq 1$.

- (b) Come definire u per $t \geq 1$? Qui ci viene in aiuto la nozione di soluzione integrale, perché al tempo $t = 1$ si è formata una discontinuità nella soluzione u ; dunque deve valere la condizione di Rankine-Hugoniot. Poiché $u_l = 1$, $u_r = 0$, cerchiamo una curva $x = s(t)$, $t \geq 1$, che parta dal punto $(1, 1)$ nel piano (x, t) tale che

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < s(t), \\ 0 & \text{se } x > s(t), \end{cases} \quad t \geq 1. \quad (8.18)$$

Una tale soluzione è detta *onda d'urto*; approfondiremo la conoscenza di queste soluzioni nelle prossime pagine. La condizione di Rankine-Hugoniot prescrive $\dot{s}(u_l - u_r) = \frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}$, dunque $\dot{s} = \frac{1}{2}$. Perciò $s(t) = \frac{t}{2} + C$ e richiedendo che $s(1) = 1$ si deduce

$$s(t) = \frac{1+t}{2}. \quad (8.19)$$

Pertanto se $t \geq 1$ la soluzione è definita da (8.18) con s dato da (8.19), si vedano le Figure 8.10 e 8.11.

Esempio 8.4.2 (Onde d'urto non fisiche e onde di rarefazione) Consideriamo di nuovo il problema ai valori iniziali per l'equazione di Burgers

$$\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (8.20)$$

con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Si ricordi che $f(u) = u^2/2$ è convessa mentre g è crescente, si veda l'Esempio 7.6.4. Le caratteristiche sono date da (8.17). Dividiamo la discussione dell'esempio in tre parti.

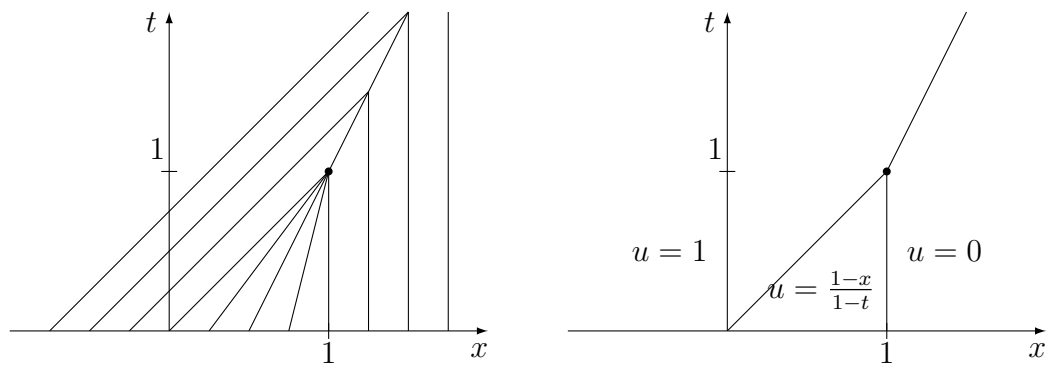


Figura 8.10: Caratteristiche per l'equazione di Burgers e valori della soluzione u per $t \geq 0$.

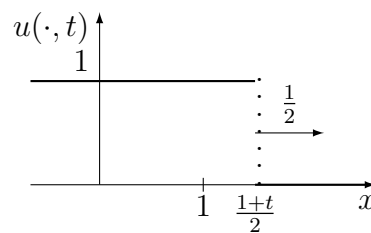


Figura 8.11: Grafico della soluzione $u(\cdot, t)$ per $t \geq 1$.

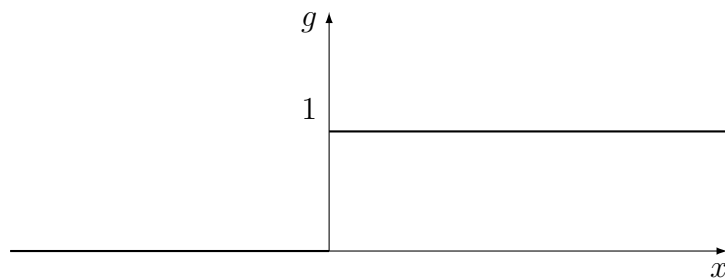


Figura 8.12: La funzione g .

(a) Ragionando come nell'Esempio 8.4.1 deduciamo quanto segue, si veda la Figura 8.13.

- (i) Se $x^0 < 0$, allora $g(x^0) = 0$, $y(s, x^0) = (x^0, s)$ e $u(y(s, x^0)) = 0$.
- (ii) Se $x^0 \geq 0$, allora $g(x^0) = 1$, $y(s, x^0) = (x^0 + s, s)$ e $u(y(s, x^0)) = 1$.

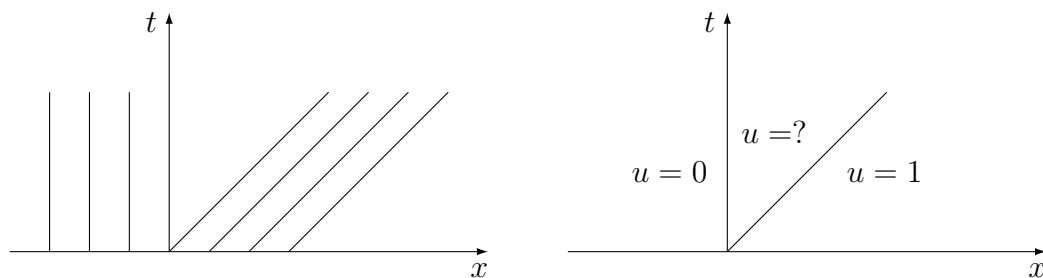


Figura 8.13: Caratteristiche per l'equazione di Burgers e valori della soluzione u .

Le caratteristiche non coprono la porzione $0 < x \leq t$ del semipiano $t \geq 0$. Questo è dovuto al fatto che il dato iniziale g è discontinuo. Non abbiamo dunque speranze di risolvere il problema (8.20) usando solo le caratteristiche.

(b) Proviamo invece a risolvere (8.20) usando un'onda d'urto, come nella seconda parte dell'Esempio 8.4.1. Cerchiamo pertanto una curva $x = s(t)$, $t \geq 0$, tale che $s(0) = 0$ e

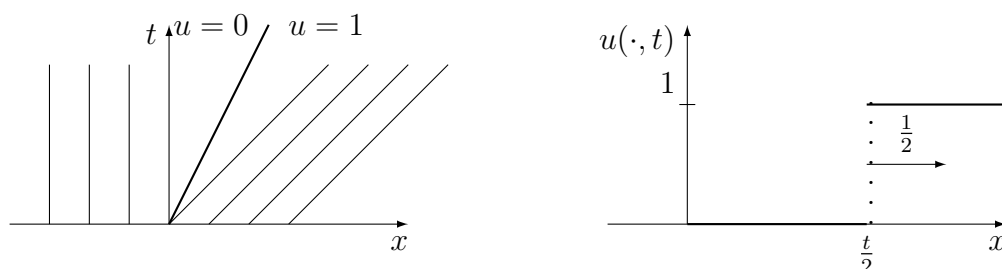
$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < s(t), \\ 1 & \text{se } x > s(t), \end{cases} \quad t \geq 0. \quad (8.21)$$

In questo caso la condizione di Rankine-Hugoniot $\dot{s}(u_l - u_r) = \frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}$ diventa $\dot{s} = \frac{1}{2}$. Perciò $s(t) = \frac{t}{2} + C$ e richiedendo che $s(0) = 0$ si deduce

$$s(t) = \frac{t}{2}. \quad (8.22)$$

Pertanto la funzione u definita in (8.21) con s dato da (8.22) è una soluzione integrale del problema (8.20), si veda la Figura 8.14.

Anche questa soluzione dovrebbe essere chiamata onda d'urto, ma appare molto diversa da quella considerata in (8.18), si veda la Figura 8.10: mentre infatti in quel caso le caratteristiche “portavano” l'informazione fornita dal dato iniziale fino alla retta $x = s(t)$ (e la intersecavano), qui le caratteristiche non arrivano neanche vicino alla retta $x = s(t)$ e non

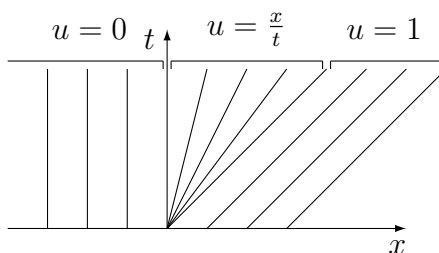
Figura 8.14: La soluzione u in (8.21).

la intersecano. Sembra cioè contraddetto un *principio di causalità*: la soluzione dovrebbe, se possibile, ricevere tutte le informazioni dal dato iniziale g . Potremmo chiamare questa soluzione un'onda d'urto "non fisica".

- (c) Per ovviare alle perplessità incontrate nella soluzione precedente, cerchiamo di "raccordare" in modo continuo gli stati 0 e 1 nel modo seguente. Definiamo

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x < t, \\ 1 & \text{se } x \geq t, \end{cases} \quad t > 0, \quad (8.23)$$

si vedano le Figure 8.15 e 8.16.

Figura 8.15: Caratteristiche e la soluzione u in (8.23).

La funzione u è discontinua a $t = 0$ e di classe C^1 per $t > 0$ tranne che lungo le rette $x = 0$ e $x = t$. Si verifica subito che u risolve il problema (8.20). Infatti ciò è ovvio se $x < 0$ o se $x > t$; se $0 < x < t$ si ha

$$u_t = -\frac{x}{t^2}, \quad u_x = \frac{1}{t}$$

e dunque u è soluzione classica in $0 < x < t$. La funzione u non è soluzione classica in un intorno delle rette $x = 0$ e $x = t$ ma, ragionando

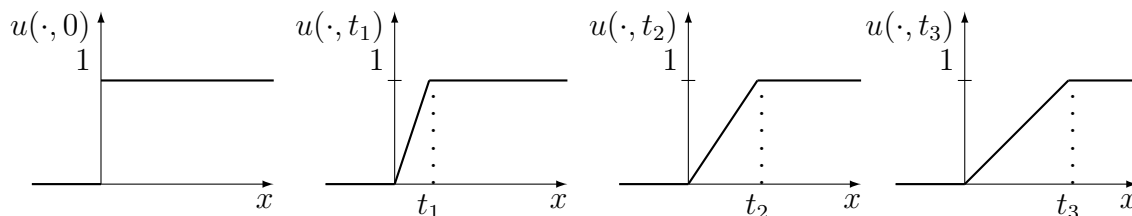


Figura 8.16: Grafici della soluzione $u(\cdot, t)$ in (8.23) per $0 < t_1 < t_2 < t_3$.

come nella dimostrazione del Lemma 8.3.2, si vede subito che è soluzione integrale (la funzione u è continua).

Questo tipo di soluzione, che pare più soddisfacente di quella presentata nel punto precedente, viene detta *onda di rarefazione*. La spiegazione del nome è la seguente: se interpretiamo u come la densità di massa di un fluido, allora, fissato $x > 0$, vediamo che la funzione $t \mapsto u(x, t)$ è decrescente: la densità sta diminuendo, cioè il fluido si sta rarefacendo. Si noti che, benché il dato iniziale fosse discontinuo, la soluzione (8.23) è continua (anzi, C^1 a tratti) per $t > 0$.

Esercizio 8.4.1 Far vedere che nella seconda parte dell'Esempio 8.4.1 non era possibile costruire una soluzione di tipo rarefazione.

Una conseguenza interessante dell'Esempio 8.4.2 è che *per soluzioni integrali non si ha più unicità di soluzioni*: sia l'onda d'urto nel punto (b) che la rarefazione nel caso (c) sono soluzioni. Esiste un criterio per escludere soluzioni “non fisiche”?

8.5 Onde d'urto e onde di rarefazione

In questa sezione definiamo con precisione le onde d'urto e di rarefazione incontrate nella sezione precedente.

Sappiamo che una soluzione classica u del problema (8.1) può non esistere per ogni $t > 0$ anche se sia f che g sono regolari: le caratteristiche proiettate possono intersecarsi ad un certo tempo $t_1 > 0$, creando in questo modo una discontinuità nella soluzione. In tal caso u è una soluzione integrale (non classica) e l'unicità è persa (dall'istante di tempo t_1 in poi) se non imponiamo altre condizioni.

Una proprietà desiderabile di una soluzione potrebbe essere la seguente *condizione di causalità*: fissato un qualunque punto (x^0, t^0) con $t^0 > 0$, le caratteristiche (proiettate) per (x^0, t^0) sono definite localmente per $t < t^0$

e non si incontrano. In altre parole, ad ogni punto x^0 dello spazio e ad ogni istante di tempo t^0 , la soluzione è determinata dalla sua storia passata, propagata attraverso le caratteristiche (non necessariamente uscenti da $t = 0$). Se la soluzione è classica in un intorno di t^0 , allora di tali caratteristiche ce ne sarà solo una; altrimenti ce ne possono essere più di una.

Per chiarire questa condizione, sia u una soluzione soddisfacente le ipotesi del Lemma 8.3.2; sia inoltre (x^0, t^0) un punto su γ e $u_l(t^0)$, $u_r(t^0)$ le tracce sinistre e destre di u nel punto (x^0, t^0) , si veda la Figura 8.17. Supponiamo inoltre che u soddisfi il principio di causalità; poiché u è costante lungo le caratteristiche, lungo la caratteristica che arriva a (x^0, t^0) da sinistra abbiamo $u = u_l(t^0)$, lungo quella che arriva da destra abbiamo $u = u_r(t^0)$. Ricordando le equazioni (8.5) delle caratteristiche, deduciamo che la pendenza della caratteristica a sinistra è $f'(u_l(t^0))$, quella a destra è $f'(u_r(t^0))$. La condizione di causalità nel punto (x^0, t^0) si traduce allora nella formula

$$f'(u_l(t^0)) > \dot{s}(t^0) > f'(u_r(t^0)).$$

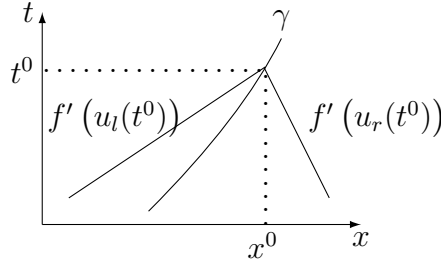


Figura 8.17: Il principio di causalità e le pendenze delle caratteristiche per (x^0, t^0) .

Definizione 8.5.1 Sia $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ un aperto e $x = s(t)$, $t \in I$, una curva di classe C^1 il cui sostegno γ sia contenuto in U . Sia u una soluzione integrale di (8.3) in U che sia discontinua lungo γ , di classe C^1 in $U \setminus \gamma$, e che abbia tracce continue da entrambe le parti di γ . La soluzione u è detta soddisfare la condizione di entropia se vale

$$f'(u_l(t)) > \dot{s}(t) > f'(u_r(t)), \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (8.24)$$

La soluzione u è detta onda d'urto o shock wave se soddisfa sia la condizione di Rankine-Hugoniot (8.11) che la condizione di entropia (8.24).

Il nome di *condizione di entropia* sarà parzialmente chiarito nel seguito, si veda l'Osservazione 8.6.1; le disuguaglianze (8.24) sono anche dette *disuguaglianze di Lax* in quanto il loro ruolo fondamentale fu messo in rilievo nel

famoso lavoro [29]. Talvolta il nome di onda d'urto è riservato alla sola curva γ .

Consideriamo ora il caso particolare di un problema di Riemann.

Lemma 8.5.1 *Consideriamo il problema di Riemann (8.1)-(8.2). Supponiamo che f sia uniformemente convessa e $u_l > u_r$ o che f sia uniformemente concava e $u_l < u_r$. Allora la funzione*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < \sigma t, \\ u_r & \text{se } x > \sigma t, \end{cases} \quad (8.25)$$

dove

$$\sigma = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}, \quad (8.26)$$

è una soluzione onda d'urto del problema (8.1)-(8.2).

Dimostrazione. Supponiamo che f sia uniformemente convessa e $u_l > u_r$; l'altro caso è analogo. La funzione definita in (8.25) con σ dato da (8.26) è chiaramente una soluzione integrale, in quanto gli stati u_l, u_r sono costanti e la condizione di Rankine-Hugoniot è soddisfatta (qui $s(t) = \sigma t$). Si ha inoltre

$$f'(u_r) < f'(v) < f'(u_l) \quad v \in (u_r, u_l), \quad (8.27)$$

in quanto f' è strettamente crescente. Per dimostrare completamente la condizione di entropia basta infine osservare che da (8.27) si ha

$$f'(u_r) < \sigma = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{1}{u_l - u_r} \int_{u_r}^{u_l} f'(v) dv < f'(u_l).$$

□

Si veda la Figura 8.18 per le caratteristiche e la soluzione u definita in (8.25).

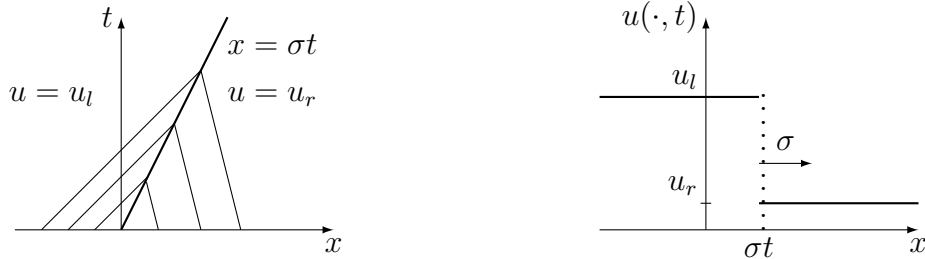


Figura 8.18: Un'onda d'urto soluzione di un problema di Riemann.

Esempio 8.5.1 La soluzione discontinua costruita nell'Esempio 8.4.1(b) è un'onda d'urto. La soluzione costruita nell'Esempio 8.4.2(b) non lo è: non soddisfa le disuguaglianze di Lax; in questo caso la soluzione corretta sembra essere l'onda di rarefazione.

Esempio 8.5.2 Supponiamo che f sia uniformemente convessa; allora f' è strettamente crescente. Sia u un'onda d'urto. Fissiamo $t > 0$ e omettiamo per semplicità la dipendenza da t : dalle disuguaglianze di Lax deduciamo $f'(u_l) > f'(u_r)$, dunque $u_l > u_r$, si veda la Figura 8.19. Chiaramente, se f è uniformemente concava allora $u_l < u_r$.

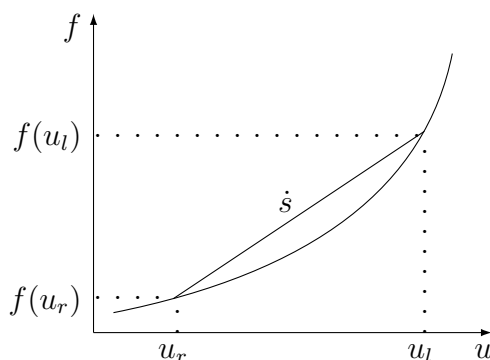


Figura 8.19: La condizione di Rankine-Hugoniot nel caso di una funzione f uniformemente convessa: $u_l > u_r$.

Esercizio 8.5.1 Nel caso dell'equazione LWR, si veda l'Esempio 8.1.2, trovare condizioni su v affinché $f(\rho) = \rho v(\rho)$ sia (strettamente) concava. Discutere il caso $v(\rho) = 1 - \rho$.

Passiamo ora alle onde di rarefazione. Come sarà fatto, in generale, il “raccordo” visto nell'Esempio 8.4.2(b)? Si noti che la soluzione relativa è una funzione che dipende da (x, t) solo tramite il quoziente $\frac{x}{t}$.

Lemma 8.5.2 Sia f uniformemente convessa o concava e $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Allora la funzione

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$$

è soluzione classica dell'equazione (8.3) se

$$v'(\xi) = (f')^{-1}(\xi). \quad (8.28)$$

Dimostrazione. Si ha

$$0 = u_t + f(u)_x = u_t + f'(u)u_x = -v' \left(\frac{x}{t} \right) \frac{x}{t^2} + f'(v)v' \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} = v' \left(\frac{x}{t} \right) \frac{1}{t} \left(f'(v) - \frac{x}{t} \right).$$

Pertanto, indicato $\xi = \frac{x}{t}$, abbiamo $v'(\xi) (f'(v(\xi)) - \xi) = 0$. Se fosse $v' \equiv 0$, allora v sarebbe costante e così pure u ; è un caso banale e non potremmo certamente “raccordare” due stati u_l, u_r diversi. Allora deve essere

$$f'(v(\xi)) - \xi = 0. \quad (8.29)$$

Si noti che derivando (8.29) si ha $f''(v(\xi)) v'(\xi) = 1$ e dunque v' non può annullarsi mai se vale (8.29). Poiché f è uniformemente convessa o concava, allora f' è strettamente monotona, dunque invertibile; da (8.29) deduciamo allora (8.28). $\square$

Pertanto $u(x, t) = (f')^{-1} \left(\frac{x}{t} \right)$ risolve l'equazione (8.3). Supponiamo f uniformemente convessa; il caso in cui f è uniformemente concava è del tutto analogo. Siano $u_l, u_r \in \mathbb{R}$, con $u_l < u_r$, si ricordi l'Esempio 8.5.2 e definiamo la funzione

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{se } \frac{x}{t} < f'(u_l), \\ (f')^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) & \text{se } f'(u_l) < \frac{x}{t} < f'(u_r), \\ u_r & \text{se } \frac{x}{t} > f'(u_r). \end{cases} \quad (8.30)$$

La funzione u dipende da (x, t) solo mediante il quoziente $\frac{x}{t}$; in particolare il suo valore è costante lungo ogni retta del piano (x, t) uscente dall'origine. La definizione (8.30) di u ha senso poiché $u_l < u_r$ implica $f'(u_l) < f'(u_r)$ a causa della convessità di f . Per il Lemma 8.5.2 la funzione u è una soluzione integrale (C^1 a tratti) dell'equazione (8.3).

Definizione 8.5.2 *Sia f uniformemente convessa (concava) e $u_l < u_r$ (rispettivamente $u_l > u_r$). La soluzione integrale (8.30) di (8.3) è detta onda di rarefazione.*

Nel caso particolare del problema di Riemann (8.1)-(8.2), in cui u_l e u_r , $u_l \neq u_r$, sono costanti e assegnati, si veda la Figura 8.20 per le caratteristiche e la soluzione u .

8.6 Il problema di Riemann

Siamo ora in grado di dimostrare l'esistenza di soluzioni al problema di Riemann (8.1)-(8.2), riassumendo in un unico enunciato quanto già visto.

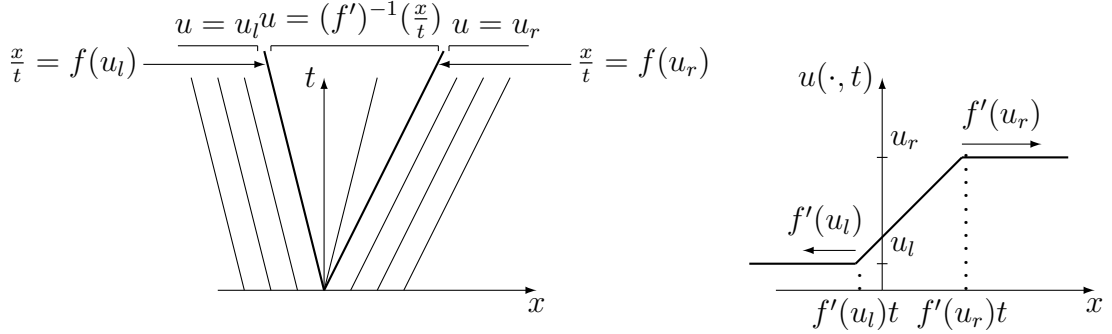


Figura 8.20: Una rarefazione soluzione di un problema di Riemann nel caso f convessa; in questo caso $f'(u_l) < 0 < f'(u_r)$.

Teorema 8.6.1 (Soluzione del problema di Riemann) *Sia f uniformemente convessa, siano $u_l, u_r \in \mathbb{R}$, $u_l \neq u_r$ e consideriamo il problema di Riemann (8.1)–(8.2).*

- (i) *Se $u_l > u_r$, la soluzione è l'onda d'urto (8.25) con σ dato da (8.26).*
- (ii) *Se $u_l < u_r$, la soluzione è l'onda di rarefazione (8.30).*

Tale soluzione è unica nella classe delle soluzioni costituite da onde d'urto o rarefazioni.

Nel caso f sia uniformemente concava, il risultato è analogo: se $u_l > u_r$ si ha una rarefazione, se $u_l < u_r$ si ha un'onda d'urto.

Dimostrazione. Se $u_l > u_r$ siamo nel caso del Lemma 8.5.1; se $u_l < u_r$, basta considerare il Lemma 8.5.2 e quanto ne segue. Infine, l'unicità della soluzione nella classe specificata nell'enunciato segue dal fatto che se $u_l < u_r$ un'onda d'urto non può essere entropica, mentre se $u_l > u_r$, la definizione stessa di onda di rarefazione non ha senso. $\square$

Osservazione 8.6.1 L'enunciato del Teorema 8.6.1 è insoddisfacente perché non chiarisce se possono esistere altre soluzioni diverse da onde d'urto e rarefazioni del problema di Riemann (8.1), (8.2). In effetti si può dimostrare che la soluzione fornita nel teorema è l'unica che soddisfa un criterio generale, detta *condizione di Lax-Oleinik*, che si applica a soluzioni generali che non si scrivono semplicemente come onde d'urto o rarefazioni. In effetti si può dimostrare anche di più: è possibile infatti introdurre una *nozione di entropia*, che generalizza la nozione fisica di entropia, e mostrare che la soluzione del Teorema 8.6.1 dissipa correttamente questa entropia. Per questi argomenti rinviamo a [3, 10, 45].

Terminiamo questa sezione con un esempio più articolato in cui sono presenti sia onde d'urto che di rarefazione.

Esempio 8.6.1 Si consideri di nuovo il problema ai valori iniziali per l'equazione di Burgers con dato iniziale

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Da uno sguardo alle caratteristiche troviamo quanto riportato in Figura 8.21.

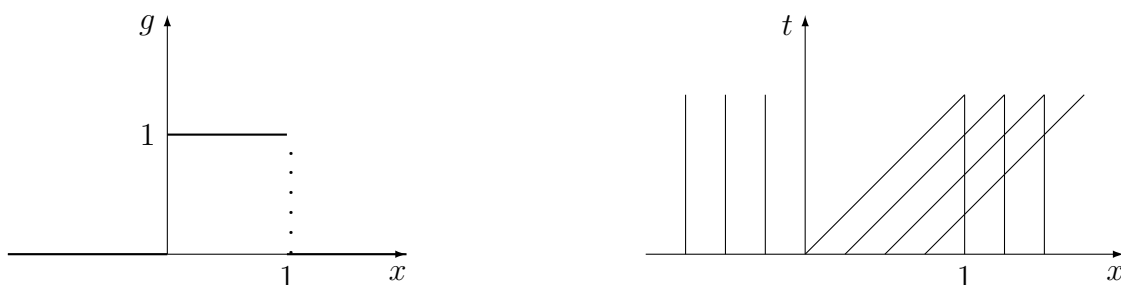


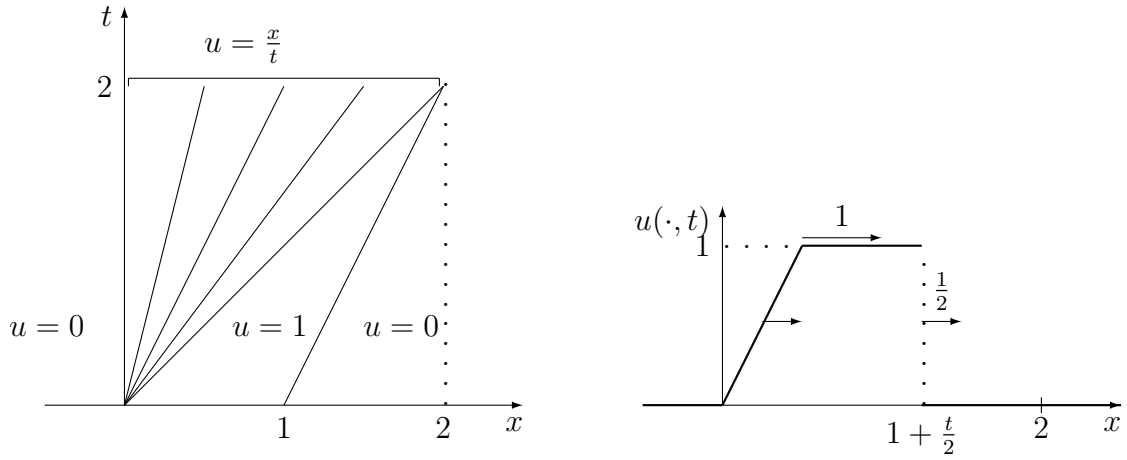
Figura 8.21: La funzione g e le caratteristiche.

Ricordando quanto visto negli esempi precedenti, avremo $u = 0$ se $x < 0$ e ogni $t > 0$; avremo inoltre una rarefazione nella regione $0 < x < t$, almeno per t sufficientemente piccoli. Se invece $x > 1$, le caratteristiche si incontrano per ogni $t > 0$ e ci aspettiamo un'onda d'urto $x = s(t)$ definita per $t > 0$, $s(0) = 1$. In questo caso $u_l = 1$, $u_r = 0$; da $\dot{s} = \frac{1}{2}$ e $s(0) = 1$ si deduce $s(t) = 1 + \frac{t}{2}$. In conclusione,

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{se } t \leq x \leq \frac{t}{2} + 1, \\ 0 & \text{se } x > \frac{t}{2} + 1, \end{cases} \quad 0 < t \leq 2, \quad (8.31)$$

si veda la Figura 8.22. Si noti la rarefazione che si sta propagando verso destra: il fronte della rarefazione si sta propagando con velocità 1, mentre la coda è ferma a $x = 0$. Contemporaneamente l'onda d'urto si sta propagando con velocità $\frac{1}{2}$; al tempo $t = 2$ e nel punto $x = 2$ il fronte della rarefazione raggiungerà l'onda d'urto. Ecco perché l'espressione (8.31) ha senso solo per $t \leq 2$.

Per $t \geq 2$ ci aspettiamo una nuova onda d'urto che si propaga dal punto $x = 2$ verso destra, dovuta all'interazione della rarefazione con la precedente

Figura 8.22: La soluzione u per $t \leq 2$.

onda d'urto. Infatti in questo caso le rette uscenti da $(0, 0)$ giocano il ruolo di caratteristiche (si noti che u è costante lungo ognuna di queste rette) e intersecano le caratteristiche verticali che escono dai punti dell'asse x con $x > 2$. Cerchiamo allora una curva $x = s(t)$, $s(2) = 2$; poiché

$$u_l = \frac{x}{t} \Big|_{x=s(t)} = \frac{s(t)}{t}$$

e $u_r = 0$, la condizione di entropia è certamente soddisfatta (si ricordi l'Esempio 8.5.2) e la condizione di Rankine-Hugoniot diventa

$$\dot{s} \frac{s}{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} \right)^2.$$

Dobbiamo perciò risolvere il problema

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{s}{2t}, \\ s(2) = 2. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili (è anche lineare), la cui soluzione è $s(t) = \sqrt{2t}$. Si noti che $\dot{s} = \frac{1}{\sqrt{2t}}$ per $t \geq 2$. Al tempo $t = 2$ la velocità dell'onda d'urto prodotta dall'interazione coincide con la velocità dell'onda d'urto precedente; nei tempi successivi la velocità decresce fino a tendere a 0 per $t \rightarrow \infty$, si veda la Figura 8.23: la rarefazione “rallenta” l'onda d'urto. Per $t \geq 2$ si ha dunque

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq \sqrt{2t}, \\ 0 & \text{se } x > \sqrt{2t}, \end{cases} \quad 0 < t \leq 2, \quad (8.32)$$

Al fronte della rarefazione la soluzione vale dunque $u(s(t), t) = \frac{\sqrt{2t}}{t} = \sqrt{\frac{2}{t}}$.

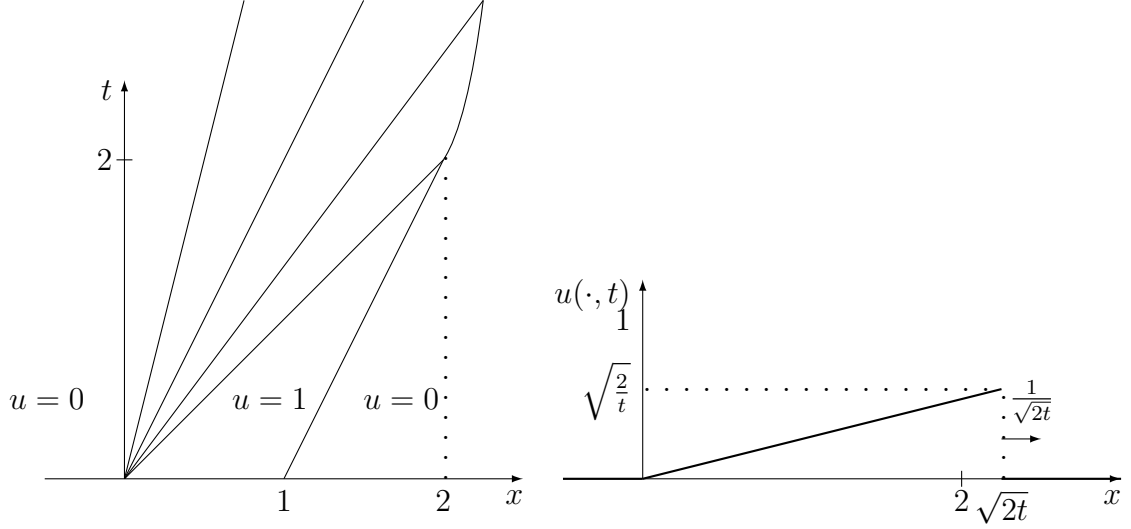


Figura 8.23: La soluzione u per $t \geq 2$ dell'Esempio 8.6.1.

D'ora in poi, nel caso di soluzioni discontinue, non preciseremo più quale sia il valore assunto dalla soluzione u o dal dato iniziale g nei punti di discontinuità: questa informazione è inessenziale dal momento che le funzioni hanno un salto in quel punto mentre complica le disuguaglianze in gioco (per esempio, $\leq$ invece di $<$). Per semplicità di scrittura, pertanto, considereremo nel seguito solo disuguaglianze strette.

Esercizio 8.6.1 [10, Esercizio 20, §3.5] Risolvere il problema ai valori iniziali per l'equazione di Burgers con dato iniziale

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x < 0, \\ 2 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Esercizio 8.6.2 Si consideri l'equazione LWR del traffico

$$\rho_t + (\rho(1 - \rho))_x = 0,$$

dove $\rho_{\max} = 1$ e $v(\rho) = 1 - \rho$, con dato iniziale g . Risolvere esplicitamente il problema ai valori iniziali nei casi seguenti; per ognuno di essi, disegnare il dato iniziale, le caratteristiche e la soluzione a diversi intervalli di tempo.

Cercare inoltre di dare un'interpretazione in termini di traffico stradale della soluzione.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0; \end{cases} & (ii) \quad g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 1-x & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x > 1; \end{cases} \\
 (iii) \quad g(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1, \\ 1 & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0; \end{cases} & (iv) \quad g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x < -2, \\ x+2 & \text{se } -2 < x < -1, \\ 1 & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si noti cosa modellizzano i precedenti dati iniziali: (i) rappresenta un semaforo rosso con coda lunga che diventa verde a $t = 0$, (ii) un semaforo rosso con coda corta che diventa verde a $t = 0$, (iii) un semaforo rosso con coda corta e auto che rallentano che diventa verde a $t = 0$, (iv) una coda in via di smaltimento.

Capitolo 9

Sistemi di leggi di conservazione

"Theories come and go, but examples stay forever"

(I. M. Gelfand)

9.1 Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo della teoria elementare dei *sistemi di leggi di conservazione*, cioè di sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine, in una variabile di spazio, in cui ogni equazione si scrive sotto forma di divergenza.

Un sistema di leggi di conservazione in $\mathbb{R}^n$ è un sistema del tipo

$$u_t + \operatorname{div} f(u) = 0. \quad (9.1)$$

In (9.1) abbiamo $x \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ e $t \in (0, \infty)$. La funzione incognita u è definita in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ (o, più in generale, in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$) ed è a valori in $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, t) &\mapsto (u^1(x, t), \dots, u^m(x, t))^T = \begin{pmatrix} u^1(x, t) \\ \vdots \\ u^m(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La funzione f è supposta nota e regolare (tipicamente di classe C^1 o C^2); essa è definita in $U \subset \mathbb{R}^m$ ed è a valori nello spazio delle funzioni a valori matrici $m \times n$:

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{M}^{m \times n}(U) \\ u &\mapsto \begin{pmatrix} f_1^1(u) & \dots & f_n^1(u) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^m(u) & \dots & f_n^m(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Come al solito, l'operatore di divergenza è pensato agire solo sulle variabili di spazio e allora (9.1) si scrive per esteso come

$$\begin{cases} u_t^1 + \sum_{i=1}^n f_i^1(u)_{x_i} &= 0, \\ \vdots & \vdots \\ u_t^m + \sum_{i=1}^n f_i^m(u)_{x_i} &= 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

Osservazione 9.1.1 La particolare forma del sistema (9.1) discende da considerazioni di ordine fisico. Supponiamo infatti che u sia regolare e che le varie componenti u^i di u , $i = 1, \dots, n$, rappresentino delle *densità* di certe quantità che vengono conservate (ad esempio, la densità di massa, di momento, di energia) nel processo fisico di cui (9.1) è un modello. In tal caso, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un arbitrario insieme limitato e con frontiera regolare, l'integrale vettoriale

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx$$

rappresenta l'ammontare totale delle quantità u^i , $i = 1, \dots, n$, al tempo t . L'ipotesi che tale quantità sia conservata implica che la sua variazione temporale in Ω sia governata da una funzione flusso f che controlla la variazione di u attraverso il bordo $\partial\Omega$ di Ω (ad esempio, se la massa totale è aumentata, vuole dire che c'è stato in ingresso di massa dal bordo). Questo si traduce nella formula

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^i(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} f^i(u) \nu dS, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove ν è al solito il versore normale esterno a $\partial\Omega$. Intuitivamente: se $f^i(u)\nu$ è positivo, ciò vuole dire che abbiamo un flusso totale positivo verso l'esterno, dunque l'ammontare totale di u in Ω deve diminuire, e ciò spiega il segno $-$. Dal Teorema della divergenza (qui serve che il bordo di Ω sia regolare) si deduce allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} f(u) dx$$

e poiché questo deve valere per ogni Ω , ne segue (9.1).

Chiaramente, se $m = n = 1$ allora (9.1) è una legge di conservazione scalare in una dimensione di spazio; se $m = 1$ e $n > 2$ abbiamo una legge di conservazione in più dimensioni spaziali. Nel seguito ci limiteremo allo studio dei sistemi ($m > 1$) di leggi di conservazione *in una variabile di spazio* ($n = 1$). In tal caso, il sistema (9.1) diventa

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (9.3)$$

o, per esteso,

$$\begin{cases} u_t^1 + f^1(u^1, \dots, u^m)_x = 0, \\ \vdots \\ u_t^m + f^m(u^1, \dots, u^m)_x = 0, \end{cases} \quad (9.4)$$

e il problema ai valori iniziali si scrive

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (9.5)$$

dove $x \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \infty)$, $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si noti che mentre una equazione scalare quasilineare può sempre essere scritta in forma conservativa, non è così per i sistemi.

Esercizio 9.1.1 Dare un semplice esempio di una matrice $A = A(u)$, $u \in \mathbb{R}^2$, per la quale non esiste $f = f(u)$ tale che $A(u) = Df(u)$.

Nei seguenti esempi abbandoneremo spesso la notazione vettoriale $u = (u^1, \dots, u^m)$ dando invece alle componenti di u il simbolo fisico che usualmente hanno. Qualche ambiguità di notazione sarà inevitabile ma facilmente comprensibile. In particolare useremo u come variabile indipendente della funzione f e facendo così, scriveremo $u = (u_1, \dots, u_m)$; quando invece intenderemo u come funzione, scriveremo $u = (u^1, \dots, u^m)$. Se non ci sarà ambiguità, per semplicità preferiremo usare la prima notazione anche quando dovremmo usare la seconda.

Esempio 9.1.1 (Il p -sistema) Il p -sistema (p per pressione) è il sistema di due leggi di conservazione

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p(v)_x = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Il sistema (9.6) modella il flusso di un gas comprimibile barotropico (energia interna costante) in coordinate Lagrangiane: $v > 0$ rappresenta il volume specifico del gas e u la velocità. La funzione $p = p(v)$, supposta nota, rappresenta la pressione e si assume che

$$p'(v) < 0.$$

E' un'ipotesi fisicamente ragionevole: la pressione aumenta all'aumentare della densità. Tipicamente si ha

$$p(v) = \frac{k}{v^\gamma},$$

dove $k > 0$ è una costante e $\gamma \geq 1$ un'altra costante, detta esponente adiabatico. Il caso $\gamma = 1$ modella un flusso isoterma, il caso $\gamma > 1$ un flusso isentropico; nel caso di un gas monoatomico si ha $\gamma = \frac{5}{3}$, biatomico $\gamma = \frac{5}{3}$, poliatomico $\gamma = \frac{9}{7}$. Da un punto di vista fisico, la prima equazione in (9.6) stabilisce la conservazione della massa, la seconda è la legge di Newton. Riferendoci alla forma (9.3) si trova

$$f = f(v, u) = \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix}.$$

Il sistema (9.6) può essere dedotto anche dall'equazione quasilineare delle onde:

$$w_{tt} + (p(w_x))_x = 0 \quad (9.7)$$

ponendo $v = w_x$ e $w_t = u$. In questo caso, la prima equazione in (9.6) non è altro che la compatibilità richiesta dal Teorema di inversione dell'ordine di derivazione di Schwarz. Notare che (9.7) è proprio un'equazione delle onde in quanto $p' < 0$.

In coordinate Euleriane il sistema (9.6) si scrive

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

In questo caso ρ rappresenta la densità di massa e p la pressione espressa tramite la densità di massa; la prima equazione stabilisce chiaramente la conservazione della massa mentre la seconda impone la conservazione della quantità di moto (del momento).

Un sistema analogo appare anche come modello elementare per l'elasticità:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - \sigma(v)_x = 0. \end{cases} \quad (9.9)$$

In questo caso v è il gradiente di deformazione (o *strain*, la variabile w che appare nella equazione delle onde associata $w_{tt} - (\sigma(w_x))_x = 0$ rappresenta la deformazione) e $\sigma(v)$ la densità di energia (o *stress*).

Esercizio 9.1.2 Dedurre (9.6) da (9.8), passando da coordinate Euleriane a coordinate Lagrangiane.

Esempio 9.1.2 (Il sistema della dinamica dei gas o di Eulero) Nel caso in cui il flusso di gas non sia isentropico, alle equazioni (9.8) dobbiamo

aggiungere la legge di conservazione dell'energia. Il sistema che otteniamo è allora

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \\ (\rho E)_t + (\rho E u + p u)_x = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

In questo caso E rappresenta la densità di energia (per unità di massa) e si ha

$$E = e + \frac{u^2}{2},$$

dove e rappresenta la densità di energia interna (per unità di massa). La pressione p è ora funzione (nota) anche di e :

$$p = p(\rho, e).$$

Notiamo che le variabili conservate sono la densità di massa $\rho = u_1$, il momento $q := \rho u = u_2$ e l'energia $\mathcal{E} = \rho E = u_3$. Il sistema può essere scritto sotto la forma (9.1) con f data da

$$f(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + p \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} + \frac{u_2}{u_1} p \end{pmatrix}, \quad p = p\left(u_1, \frac{u_3}{u_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\right), \quad (9.11)$$

o, in maniera più significativa,

$$f(\rho, q, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} + p \\ \frac{q\mathcal{E}}{\rho} + \frac{q}{\rho} p \end{pmatrix}, \quad p = p\left(\rho, \frac{\mathcal{E}}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\rho}\right)^2\right).$$

Si noti che f è definita solo per $u_1 > 0$ (la densità di massa deve essere positiva).

Esercizio 9.1.3 Dedurre (9.11).

Esempio 9.1.3 (L'equazione delle acque basse) Consideriamo un modello semplificato per lo studio di onde d'acqua nel caso in cui la lunghezza del tratto in cui si esamina il flusso sia molto maggiore della profondità (un oceano andrebbe bene!). Si tratta del sistema

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right)_x = 0. \end{cases} \quad (9.12)$$

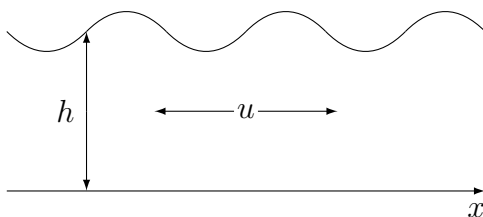


Figura 9.1: Il modello per il flusso di acque basse.

Qui $h > 0$ rappresenta l'altezza della colonna d'acqua, u la velocità orizzontale (la stessa per tutta la colonna d'acqua, è un modello di acque basse!) e g è l'accelerazione di gravità.

La prima equazione rappresenta la conservazione della massa, la seconda la conservazione del momento. Utilizzando le notazioni $h = u_1$, $q := hu = u_2$, il sistema (9.12) si scrive

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right)_x = 0, \end{cases} \quad (9.13)$$

da cui

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{gu_1^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad f(h, q) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Esercizio 9.1.4 Verificare che l'espressione del sistema delle acque basse data in [10, Esempio 3, §11.1] è dimensionalmente sbagliata.

9.2 Soluzioni integrali

La nozione di soluzione debole (o integrale) è naturalmente di importanza fondamentale per i sistemi di leggi di conservazione, così come lo è stata nel caso di una legge di conservazione scalare. L'estensione della definizione di soluzione integrale al caso dei sistemi è banale: occorre solo prestare attenzione al fatto che ora le funzioni u , $f(u)$ e le funzioni test ϕ sono a valori vettoriali.

Definizione 9.2.1 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Una funzione $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R}^m)$ è una soluzione integrale o debole del problema ai valori iniziali (9.5) se

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u \cdot \phi_t + f(u) \cdot \phi_x \, dx dt + \int_{-\infty}^\infty g \cdot \phi|_{t=0} \, dx = 0 \quad (9.15)$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R}^m)$.

Esercizio 9.2.1 Provare che (9.15) è equivalente a richiedere

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\psi_t + f(u)\psi_x dxdt + \int_{-\infty}^\infty g\psi|_{t=0} dx = 0, \quad (9.16)$$

per ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R})$.

La condizione di Rankine-Hugoniot è dedotta analogamente. Più precisamente, sia $U \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ un insieme aperto, $x = s(t)$, $t \in I$, una curva il cui sostegno γ è contenuto in U ; indichiamo

$$U_l = \{(x, t) \in U : x < s(t)\}, \quad U_r = \{(x, t) \in U : x > s(t)\}.$$

Sia infine u una soluzione integrale del sistema (9.3); supponiamo che $u \in C^1(U_l \cup U_r)$ e che u sia prolungabile in modo C^1 a $U_l \cup \gamma$ e $U_r \cup \gamma$. Per ogni $t \in I$ indichiamo le tracce

$$u_l(t) = \lim_{x \rightarrow s(t)-} u(x, t), \quad u_r(t) = \lim_{x \rightarrow s(t)+} u(x, t).$$

Si deduce allora la condizione di Rankine-Hugoniot:

$$\dot{s}[u] = [f(u)], \quad \text{ovvero} \quad \dot{s}(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r), \quad t \in I. \quad (9.17)$$

Si presti attenzione al fatto che ora (9.17) è una relazione vettoriale, che si scrive per esteso come

$$\begin{aligned} \dot{s}(u_l^1 - u_r^1) &= f^1(u_l) - f^1(u_r), \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \dot{s}(u_l^m - u_r^m) &= f^m(u_l) - f^m(u_r), \end{aligned} \quad t \in I.$$

Pertanto, mentre nel caso scalare $m = 1$ si può dedurre che $\dot{s} = \frac{[f(u)]}{[u]}$, se $u_l \neq u_r$, questa espressione non ha senso nell'ambito dei sistemi. Nello spazio degli stati $\mathbb{R}^m$ la (9.17) significa che i vettori $[u]$ e $[f(u)]$ hanno la stessa direzione, e il fattore di proporzionalità è $\dot{s}$. Anche in questo caso la condizione di Rankine-Hugoniot può essere interpretata alla luce del Teorema di Lagrange (per funzioni a valori vettoriali), si veda l'Osservazione 8.3.1.

La definizione di soluzione entropica, che ha già giocato un ruolo essenziale nel determinare in modo unico le soluzioni integrali nel caso scalare, è più delicata nel caso vettoriale e verrà affrontata in seguito.

9.3 Onde progressive e la definizione di iperbolicità

Nel caso di una legge di conservazione scalare non abbiamo fatto nessuna particolare ipotesi sulla funzione flusso f oltre a quella di essere regolare, anche se il teorema di esistenza per il problema di Riemann è stato dato nel caso in cui f è uniformemente convessa o concava. *Nel caso dei sistemi, quali ipotesi dobbiamo richiedere su f ?*

Per affrontare questo problema consideriamo il sistema quasilineare

$$u_t + A(u)u_x = 0. \quad (9.18)$$

Ovviamente (9.3) può essere scritto sotto questa forma; in tal caso $A(u) = Df(u)$ è la matrice Jacobiana di f :

$$A(u) = \begin{pmatrix} f_{u_1}^1 & \cdots & f_{u_m}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{u_1}^m & \cdots & f_{u_m}^m \end{pmatrix}.$$

Come motivazione alle definizioni seguenti, introduciamo un tipo particolare di soluzione.

Definizione 9.3.1 (Onde progressive) *Un'onda progressiva o traveling wave per il sistema quasilineare (9.18) è una soluzione u della forma*

$$u(x, t) = v(x - \sigma t), \quad (9.19)$$

dove il profilo $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dell'onda è una funzione di classe C^1 , a valori vettoriali, di una variabile scalare $\xi = x - \sigma t$, e $\sigma \in \mathbb{R}$.

Un'onda progressiva u è dunque costante lungo le rette $x - \sigma t = C$, al variare di $C \in \mathbb{R}$, si veda la Figura 9.2.

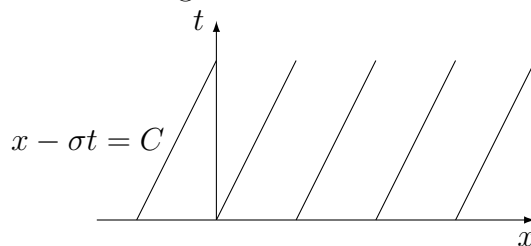


Figura 9.2: Un'onda progressiva è costante lungo le rette $x = \sigma t$.

Abbiamo già incontrato questo tipo di soluzioni nel caso scalare, ad esempio nella Sezione 8.2, si veda Figura 8.2, relativamente all'equazione $u_t + au_x = 0$. In tal caso $v = g$ e $\sigma = a$.

Cerchiamo pertanto delle onde progressive di (9.18). Se inseriamo l'espressione (9.19) in (9.18) otteniamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$-\sigma v' + A(v)v' = 0,$$

ovvero

$$A(v)v' = \sigma v'. \quad (9.20)$$

A parte il caso banale in cui $v' = 0$ e dunque v è costante, questo significa che σ deve essere un autovalore della matrice A con autovettore v' . Poiché $\sigma \in \mathbb{R}$, se ammettiamo che (9.18) possa avere come soluzioni delle onde progressive, dobbiamo supporre che gli autovalori di A siano reali.

Osservazione 9.3.1 Nel caso $m = 1$ l'uguaglianza (9.20) si riduce a

$$(A(v(\xi)) - \sigma) v'(\xi) = 0,$$

che implica $A(v(\xi)) = \sigma$ o $v'(\xi) = 0$. In entrambi i casi la funzione v deve essere *costante*. In altre parole, in dimensione $m = 1$ (in cui c'è un solo autovalore...) non c'è abbastanza "spazio" per questo tipo di soluzioni. Non si confondano le onde progressive, che sono costanti lungo rette parallele, con le onde di rarefazione, che sono costanti lungo rette uscenti dal punto $(0, 0)$.

Definizione 9.3.2 (Stretta iperbolicità) *Il sistema (9.18) è detto iperbolico in $U \subset \mathbb{R}^m$ se gli autovalori di A in U sono reali e strettamente iperbolico se essi sono anche distinti.*

Si noti che la definizione di stretta iperbolicità è stata data per il sistema (9.18) e dunque non richiede che il sistema sia conservativo; ovviamente, la forma conservativa sarà indispensabile per dare senso alle soluzioni integrali.

Se (9.18) è strettamente iperbolico in U scriveremo gli autovalori in ordine crescente:

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_m(u), \quad \text{per } u \in U,$$

e indicheremo con $r_1(u), \dots, r_m(u)$ i loro autovettori destri:

$$A(u)r_k(u) = \lambda_k(u)r_k(u), \quad \text{per } k = 1, \dots, m, \ u \in U.$$

Poiché gli autovalori sono distinti, ne segue che i corrispondenti autovettori $r_1(u), \dots, r_m(u)$ formano una base di $\mathbb{R}^m$ per ogni $u \in U$. Analogamente indichiamo con $l_1(u), \dots, l_m(u)$ gli autovettori sinistri di $A(u)$ associati agli autovalori $\lambda_1(u), \dots, \lambda_m(u)$:

$$l_k(u)A(u) = \lambda_k(u)l_k(u), \quad \text{per } k = 1, \dots, m, \ u \in U.$$

Si faccia attenzione al fatto che gli autovettori destri sono vettori colonna mentre gli autovettori sinistri sono vettori riga. Ovviamente gli autovettori sinistri di A sono gli autovettori destri della matrice trasposta A^T ; ricordiamo che A e A^T hanno infatti gli stessi autovalori.

Osservazione 9.3.2 (k -caratteristiche) Non abbiamo ancora definito le caratteristiche per sistemi di equazioni alle derivate parziali, ma cerchiamo di dare un'interpretazione intuitiva di queste basandoci sul caso scalare. Nel caso scalare, la matrice Jacobiana $Df(u)$ relativa ai sistemi si riduce alla funzione scalare $f'(u)$, che ha come unico autovalore $\lambda(u) = f'(u)$. Le caratteristiche di tale equazione scalare, uscenti da $t = 0$ e relative ad un dato iniziale g , si scrivono perciò come

$$y(s) = \left(x^0 + \lambda(g(x^0)) s, s \right),$$

ovvero come

$$x = x^0 + \lambda(g(x^0)) t.$$

Viene pertanto naturale immaginare che, nel caso dei sistemi, le rette

$$x = x^0 + \lambda_k(g(x^0)) t, \quad k = 1, \dots, nm$$

nel piano (x, t) giochino un ruolo importante. Per semplicità, chiameremo k -caratteristiche queste rette.

Lemma 9.3.1 (Ortogonalità degli autovettori) *Supponiamo che il sistema (9.18) sia strettamente iperbolico e siano $l_j(u)$ e $r_k(u)$ gli autovettori sinistri e destri di $A(u)$, per $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, m$ e $u \in U$. Allora*

$$(i) \quad l_j(u) \cdot r_k(u) = 0 \text{ se } j \neq k, u \in U;$$

$$(ii) \quad l_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0 \text{ se } u \in U.$$

Dimostrazione. Sappiamo che $Ar_k = \lambda_k r_k$ e $l_j A = \lambda_j l_j$. Pertanto

$$\lambda_k l_j \cdot r_k = l_j A r_k = \lambda_j l_j \cdot r_k,$$

e dunque $(\lambda_k - \lambda_j) l_j \cdot r_k = 0$. Poiché gli autovalori sono distinti, la prima affermazione segue.

Per dimostrare la seconda, notiamo che la prima implica che tutti i vettori l_j , per $j \neq k$, sono in un iperpiano ortogonale a r_k . Se fosse $l_k \cdot r_k = 0$, allora anche l_k dovrebbe giacere in quell'iperpiano e l'insieme $\{l_1, \dots, l_m\}$ non sarebbe più una base. $\square$

Mostriamo ora come la nozione di stretta iperbolicità sia invariante per cambiamenti regolari delle coordinate.

Teorema 9.3.1 (Invarianza della stretta iperbolicità per diffeomorfismi)

Assumiamo che il sistema (9.18) sia strettamente iperbolico e sia $\Phi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ un diffeomorfismo con inversa Ψ . Allora Φ trasforma il sistema (9.18) nel sistema strettamente iperbolico

$$v_t + B(v)v_x = 0, \quad \text{con } B(v) = D\Phi(\Psi(v)) A(\Psi(v)) D\Psi(v). \quad (9.21)$$

Dimostrazione. Sia u una soluzione di (9.18) e $v = \Phi(u)$. Allora si ha

$$v_t = D\Phi(u)u_t, \quad v_x = D\Phi(u)u_x, \quad u_x = D\Psi(v)v_x.$$

Pertanto

$$v_t = D\Phi(u)u_t = -D\Phi(u)A(u)u_x = -D\Phi(u)A(u)D\Psi(v)v_x = -B(v)v_x$$

e questo dimostra (9.21). Dimostriamo ora che (9.21) è strettamente iperbolico. Sia λ_k un autovalore di A con autovalore r_k , cioè $A(u)r_k(u) = \lambda_k(u)r_k(u)$, e poniamo

$$s_k(v) = D\Phi(\Psi(v)) r_k(\Psi(v)).$$

Allora (si ricordi che $D\Psi(v) D\Phi(\Psi(v)) = \text{Id}$)

$$\begin{aligned} B(v)s_k(v) &= D\Phi(\Psi(v)) A(\Psi(v)) D\Psi(v) D\Phi(\Psi(v)) r_k(\Psi(v)) \\ &= D\Phi(\Psi(v)) A(\Psi(v)) r_k(\Psi(v)) \\ &= D\Phi(\Psi(v)) \lambda_k(\Psi(v)) r_k(\Psi(v)) \\ &= \lambda_k(\Psi(v)) s_k(v). \end{aligned}$$

Dunque $\mu_k(v) := \lambda_k(\Psi(v))$ è un autovalore di $B(v)$ corrispondente all'autovettore $s_k(v)$. Poiché i λ_k sono distinti, ne segue che anche i μ_k lo sono.

□

Esercizio 9.3.1 In riferimento alla dimostrazione del Teorema 9.3.1, provare che l'autovettore sinistro di $B(v)$ corrispondente a $\mu_k(v)$ è $m_k(v) = l_k(\Psi(v)) D\Psi(v)$.

Esercizio 9.3.2 Il Teorema 9.3.1 mostra che cambiamenti di variabili $u \rightarrow v$ regolari trasformano sistemi quasi lineari strettamente iperbolici in sistemi quasi lineari strettamente iperbolici. E' vero che tali cambiamenti di coordinate trasformano sistemi di leggi di conservazione strettamente iperbolici in sistemi di leggi di conservazione strettamente iperbolici? Pensare ad un semplice cambiamento di variabili nel caso del p -sistema.

Ci chiediamo ora quale sia la regolarità delle funzioni $\lambda_k(u)$, $r_k(u)$ e $l_k(u)$.

Teorema 9.3.2 (Regolarità di autovalori ed autovettori) *Supponiamo che il sistema (9.18) sia strettamente iperbolico e A di classe C^n . Allora:*

- (i) *gli autovalori $\lambda_k(u)$, $k = 1, \dots, m$ sono di classe C^n ;*
- (ii) *si possono scegliere gli autovettori $r_k(u)$ ed $l_k(u)$, $k = 1, \dots, m$, in modo che siano di classe C^n e soddisfino la condizione di normalizzazione $|r_k(u)| = 1$, $|l_k(u)| = 1$, $k = 1, \dots, m$.*

La dimostrazione si basa sul teorema delle funzioni implicite; si veda [10, Theorem 2, §11.1].

Esempio 9.3.1 (Stretta iperbolicità del p -sistema) Nel caso (9.6) del p -sistema si ha

$$f(v, u) = \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix}, \quad A(v, u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se

$$p'(v) < 0,$$

allora gli autovalori $\pm \sqrt{-p'(v)}$ di A sono reali e distinti: il sistema è strettamente iperbolico. Nel caso del sistema (9.9) si arriva alle stesse conclusioni supponendo $\sigma'(v) > 0$.

Esercizio 9.3.3 [10, Esercizio 1, §11.5] Sotto quali ipotesi sulle funzioni regolari $q(u)$ e $p(v)$ il sistema (leggera variazione del p -sistema, sprovvista di senso fisico)

$$\begin{cases} v_t - q(u)_x = 0, \\ u_t + p(v)_x = 0, \end{cases}$$

è strettamente iperbolico?

Esempio 9.3.2 (Stretta iperbolicità del sistema della dinamica dei gas)

Consideriamo il sistema (9.11), cioè

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \\ (\rho E)_t + (\rho E u + p u)_x = 0, \end{cases} \quad (9.22)$$

dove $E = e + \frac{u^2}{2}$. Proviamo che (9.22) è strettamente iperbolico nella regione $\rho > 0$ se assumiamo che la pressione $p = p(\rho, e)$ soddisfi le ipotesi (fisiche)

$$p_\rho(\rho, e) > 0 \quad \text{e} \quad p_e(\rho, e) > 0. \quad (9.23)$$

9.3. ONDE PROGRESSIVE E LA DEFINIZIONE DI IPERBOLICITÀ 233

Invece di verificare questo risultato direttamente dall'espressione (9.11) (possibile ma un po' lungo), riscriviamo il sistema sotto forma quasilineare cercando di semplificare le equazioni. La prima equazione si scrive banalmente

$$\rho_t + \rho_x u + \rho u_x = 0. \quad (9.24)$$

La seconda si scrive, pensando $\rho u^2 = (\rho u)u$,

$$\rho_t u + \rho u_t + (\rho u)_x u + (\rho u)u_x + p_x = 0.$$

Il primo e il terzo addendo danno 0 a causa della prima equazione; dividendo per ρ (la densità è sempre positiva!) si ottiene

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0. \quad (9.25)$$

La terza equazione si scrive, pensando $\rho Eu = (\rho u)E$,

$$\rho_t E + \rho E_t + (\rho u)_x E + \rho u E_x + p_x u + pu_x = 0.$$

Il primo e il terzo addendo sono di nuovo a somma 0 per la prima equazione. Dividendo per ρ si ottiene

$$E_t + u E_x + \frac{1}{\rho} p_x u + \frac{1}{\rho} p u_x = 0.$$

Ma, a causa di (9.25),

$$E_t + u E_x = \left(e + \frac{u^2}{2} \right)_t + u \left(e + \frac{u^2}{2} \right)_x = e_t + uu_t + ue_x + u^2 u_x = e_t + ue_x - \frac{1}{\rho} p_x u,$$

e la terza equazione diventa

$$e_t + ue_x + \frac{p}{\rho} u_x = 0. \quad (9.26)$$

Da (9.24)–(9.26) deduciamo

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \\ e_t + ue_x + \frac{p}{\rho} u_x = 0. \end{cases} \quad (9.27)$$

Si noti che tale sistema non è più in forma conservativa (si veda l'Esercizio 9.3.2) ma ha gli stessi autovalori del sistema (9.22) a causa del Teorema 9.3.1. Il sistema (9.27) si può scrivere sotto la forma (9.18) con

$$A(\rho, u, e) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{p}{\rho} & u & \frac{p}{\rho} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix} = u \text{Id} + \bar{A}(\rho, u, e),$$

dove

$$\bar{A}(\rho, u, e) = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ \frac{p_\rho}{\rho} & 0 & \frac{pe}{\rho} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $\bar{A}$ è

$$\lambda^3 + \left(-p_\rho - \frac{pe}{\rho^2}\right) \lambda = 0.$$

La quantità

$$c := \sqrt{p_\rho + \frac{pe}{\rho^2}} > 0 \quad (9.28)$$

è la *velocità locale del suono* (locale perché dipende dagli stati in questione) ed è ben definita a causa delle ipotesi (9.23). Pertanto gli autovalori del sistema (9.22) sono

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c.$$

Essi sono distinti a causa di (9.28) e dunque il sistema (9.11) è strettamente iperbolico nella regione $\rho > 0$.

Si noti come i primi due addendi in ognuna delle tre equazioni in (9.27) esprimano il trasporto della relativa quantità (densità di massa, velocità, densità di energia interna) per la velocità u (si pensi al significato dell'equazione scalare $u_t + au_x = 0$, in cui il grafico di $u(x, 0)$ è trasportato rigidamente nei tempi successivi). In particolare, i primi due addendi della seconda equazione non sono altro che il membro di sinistra dell'equazione di Burgers. Questo permette di interpretare l'equazione di Burgers come un modello estremamente semplificato per rappresentare la dinamica di un flusso fluido (ad esempio se ρ è molto grande o le variazioni della pressione sono trascurabili).

Esercizio 9.3.4 Verificare che c in (9.28) ha le dimensioni di una velocità.

Esercizio 9.3.5 (La dinamica dei gas in coordinate (ρ, u, S)) La seconda legge della termodinamica stabilisce che

$$de = TdS - pdv, \quad (9.29)$$

e supponiamo che la pressione sia espressa tramite la densità e l'entropia S , ovvero $p(e, \rho) = P(\rho, S)$. Verificare allora che

$$(i) \quad c = \sqrt{P_\rho(\rho, S)};$$

(ii) se scegliamo come variabili (ρ, u, S) , allora la terza equazione in (9.27) si scrive

$$S_t + uS_x = 0;$$

(iii) dedurre che (9.27) si scrive, nelle variabili (ρ, u, S) , come

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}P_x &= 0, \\ S_t + uS_x &= 0. \end{cases} \quad (9.30)$$

Esercizio 9.3.6 [10, Esercizio 2, §11.5] Provare che il sistema (9.12) delle acque basse è strettamente iperbolico nella regione $U = \{(h, u) \in \mathbb{R}^2: h > 0\}$.

Provare inoltre che per soluzioni regolari il sistema (9.12) può essere riscritto come

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + gh\right)_x &= 0. \end{cases} \quad (9.31)$$

Esercizio 9.3.7 [10, Esercizio 3, §11.5] Sia $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^{2 \times 2}$ la matrice definita da

$$A(u) = e^{-\frac{1}{u^2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2}{u}\right) & \sin\left(\frac{2}{u}\right) \\ \sin\left(\frac{2}{u}\right) & -\cos\left(\frac{2}{u}\right) \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{u^2}} \tilde{A},$$

per $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $A(0) = 0$. Provare che $A \in C^\infty$, che ha autovalori reali ma non esistono autovettori destri $r_1(u)$ e $r_2(u)$ che siano continui in 0. Cosa succede agli autospazi se $u \rightarrow 0$?

Esercizio 9.3.8 (Un sistema non strettamente iperbolico) Consideriamo il seguente sistema, detto di Keyfitz-Kranzer [26],

$$\begin{cases} u_t + (\phi(u^2 + v^2)u)_x &= 0, \\ v_t + (\phi(u^2 + v^2)v)_x &= 0, \end{cases}$$

dove $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione crescente di classe C^1 . Provare che questo sistema è iperbolico ma non strettamente iperbolico in $(0, 0)$; cosa accade agli autovettori in tale punto? Può essere comodo usare la notazione $r^2 = u^2 + v^2$.

9.4 Le onde semplici

In questa sezione generalizzeremo il concetto di onda progressiva; questo ci servirà per introdurre alcune definizioni di base. Supporremo sempre il sistema (9.3) strettamente iperbolico in $U \subset \mathbb{R}^m$.

Definizione 9.4.1 (Onda semplice) *Un'onda semplice per il sistema (9.3) è una soluzione u della forma*

$$u(x, t) = v(w(x, t)), \quad (9.32)$$

dove $v : \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ e $w : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Osservazione 9.4.1 Ogni onda progressiva è un'onda semplice: basta prendere $w(x, t) = x - \sigma t$. Se $m = 1$ ogni rarefazione è un'onda semplice: si prenda $w = u$ nella (8.30) e $v = \text{Id}$.

Se inseriamo l'espressione (9.32) in (9.3) otteniamo

$$\dot{v}(w)w_t + Df(v(w))\dot{v}(w)w_x = 0, \quad (9.33)$$

ovvero

$$(w_t + Df(v(w))w_x)\dot{v}(w) = 0. \quad (9.34)$$

Chiaramente ogni funzione w costante soddisfa (9.34) (comunque si scelga la funzione v), così come ogni funzione costante v (comunque si scelga la funzione w). Mostriamo ora che, a parte questi casi banali, se vale (9.34) allora $\dot{v}(w)$ è un autovettore della matrice $Df(v(w))$ e w soddisfa un'equazione scalare.

Lemma 9.4.1 *Assumiamo che il sistema (9.3) sia strettamente iperbolico e $f \in C^1(U)$. Siano v e w due funzioni di classe C^1 che soddisfano localmente (9.34) con w non localmente costante e $\dot{v} \neq 0$. Allora esiste $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ tale che*

$$\dot{v}(s) = r_k(v(s)) \quad (9.35)$$

e

$$w_t + \lambda_k(v(w))w_x = 0. \quad (9.36)$$

Osservazione 9.4.2 Il vantaggio di considerare onde semplici è che, per tali soluzioni, lo studio del sistema (9.3) e dunque di (9.34) è ridotto allo studio del sistema di equazioni differenziali ordinarie (9.35) (per v) e ad una legge di conservazione scalare (9.36) (per w).

Dimostrazione del Lemma 9.4.1. Poiché i vettori $\{r_1(u), \dots, r_m(u)\}$ formano una base di $\mathbb{R}^m$ per ogni $u \in U$, sia

$$\dot{v}(w) = \sum_{j=1}^m a_j(v(w)) r_j(v(w)), \quad (9.37)$$

per opportuni scalari $a_j(v(w))$, $j = 1, \dots, m$. Pertanto l'espressione (9.34) implica che localmente in (x, t) vale

$$\sum_{j=1}^m a_j(v(w)) \left(w_t + \lambda_j(v(w)) w_x \right) r_j(v(w)) = 0. \quad (9.38)$$

Poiché $\dot{v}$ non è identicamente nullo, ci sarà almeno un punto $w_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\dot{v}(w_0) \neq 0$ e dunque, poiché v è supposto regolare, un intervallo aperto I di w_0 dove $\dot{v}$ non si annulla; pertanto ci sarà almeno un indice k per cui $a_k(v(w)) \neq 0$ per ogni $w \in I$. Possiamo supporre che I sia l'immagine tramite w di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty) & \xrightarrow{w} & I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{v} \mathbb{R}^m \\ (x, t) & & w_0. \end{array}$$

Se moltiplichiamo a sinistra (9.38) per $l_k(v(w))$ otteniamo, dal Lemma 9.3.1, che

$$a_k(v(w)) \left(w_t + \lambda_k(v(w)) w_x \right) l_k(v(w)) \cdot r_k(v(w)) = 0.$$

Ma $a_k(v(w)) \neq 0$ e così pure $l_k(v(w)) \cdot r_k(v(w))$ per il Lemma 9.3.1; pertanto occorre che valga (9.36) per ogni $(x, t) \in \Omega$.

Supponiamo ora che esista un altro indice h per cui $a_h(v(w_0)) \neq 0$; a meno di restringerci ad insiemi I ed Ω più piccoli, lo stesso procedimento implica che deve valere anche $w_t + \lambda_h(v(w)) w_x = 0$ per ogni $(x, t) \in \Omega$. Sottraendo questa equazione da (9.36), si deduce che $w_x = 0$ per ogni $(x, t) \in \Omega$, perché gli autovalori sono distinti, e dunque $w_t = 0$ per ogni $(x, t) \in \Omega$. Pertanto w è localmente costante in Ω , una contraddizione. Dunque, da (9.37), si ha $\dot{v}(w) = a_k(v(w)) r_k(v(w))$; a meno di ridefinire r_k cambiandone la lunghezza, abbiamo ottenuto (9.35). $\square$

Osservazione 9.4.3 Ovviamente, se esistono funzioni regolari v e w per cui valgono (9.35) e (9.36), allora si dimostra subito, per derivazione, che $u(x, t) = v(w(x, t))$ risolve il sistema in (9.43).

Definizione 9.4.2 (k -onda semplice) *Un'onda semplice è detta una k -onda semplice se valgono (9.35) e (9.36).*

Riguardo a (9.35) diamo la seguente definizione, si veda la Figura 9.3. Useremo qui e nel seguito la notazione u_0 invece di u^0 per indicare un punto fissato di $U \subset \mathbb{R}^m$. Questa notazione, oltre ad essere in linea con le notazioni u_l , u_r , è leggermente più familiare dell'altra.

Definizione 9.4.3 (k -curva di rarefazione) Fissiamo $u_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ e sia v la soluzione di (9.35) che passa per u_0 . La traiettoria di v è detta k -curva di rarefazione, in simboli $R_k(u_0)$.

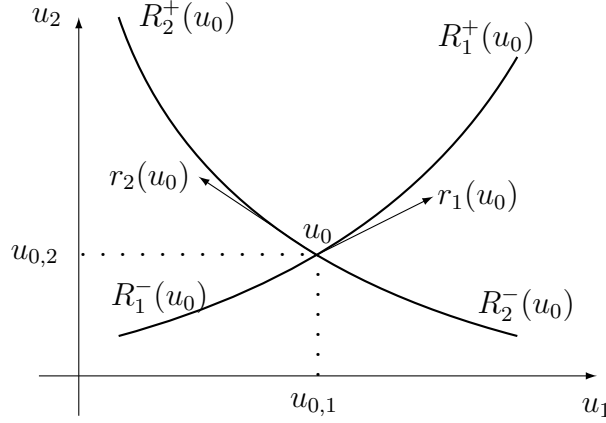


Figura 9.3: Curve di rarefazione per il punto (u_1^0, u_2^0) ; qui $m = 2$.

Supposto pertanto che v soddisfi (9.35), passiamo ora a (9.36), che scriviamo sotto la forma

$$w_t + f_k(w)_x = 0, \quad (9.39)$$

dove

$$f_k(w) = \int_0^w \lambda_k(v(s)) \, ds.$$

Si noti che il valore $f_k(0)$ viene eliminato dall'operazione di derivazione. A questa equazione possiamo applicare la teoria vista precedentemente nel caso scalare. Si ha

$$f'_k(w) = \lambda_k(v(w)), \quad (9.40)$$

$$f''_k(w) = D\lambda_k(v(w)) \cdot \dot{v}(w) = D\lambda_k(v(w)) \cdot r_k(v(w)). \quad (9.41)$$

Pertanto f_k sarà una funzione convessa o concava di w a seconda che $D\lambda_k \cdot r_k > 0$ o $D\lambda_k \cdot r_k < 0$, rispettivamente; f_k sarà lineare nel caso $D\lambda_k \cdot r_k \equiv 0$.

Definizione 9.4.4 (Genuina non linearità e lineare degenerazione) L 'autovalore λ_k è detto genuinamente non lineare in $U \subset \mathbb{R}^m$ se

$$D\lambda_k(u) \cdot r_k(u) \neq 0 \quad \text{per ogni } u \in U,$$

mentre è detto linearmente degenere se

$$D\lambda_k(u) \cdot r_k(u) = 0 \quad \text{per ogni } u \in U.$$

Osservazione 9.4.4 Si noti che la Definizione 9.4.4 dipende solo da λ_k e non dalla scelta dell'autovettore r_k ; dipende invece da r_k il *segno* di (9.41), cioè se f_k è convessa o concava. Inoltre, calcoliamo

$$\frac{d}{ds}\lambda_k(v(s)) = D\lambda_k(v(s)) \cdot \dot{v}(s) = D\lambda_k(v(s)) \cdot r_k(v(s)). \quad (9.42)$$

Se pertanto λ_k è genuinamente non lineare, allora $s \mapsto \lambda_k(v(s))$ è strettamente monotona; se λ_k è linearmente degenerare, allora $s \mapsto \lambda_k(v(s))$ è costante. In altre parole, se λ_k è genuinamente non lineare (linearmente degenerare) allora è monotono (costante) lungo la k -curva di rarefazione.

Dall'Osservazione 9.4.4, se λ_k è genuinamente non lineare possiamo dividere la curva $R_k(u_0)$ in due parti, definendo

$$\begin{aligned} R_k^+(u_0) &= \{u \in R_k(u_0) : \lambda_k(u) > \lambda_k(u_0)\}, \\ R_k^-(u_0) &= \{u \in R_k(u_0) : \lambda_k(u) < \lambda_k(u_0)\}. \end{aligned}$$

Pertanto, si veda la Figura 9.3,

$$R_k(u_0) = R_k^-(u_0) \cup \{u_0\} \cup R_k^+(u_0).$$

Esercizio 9.4.1 Provare che la nozione di genuina non linearità o di degenerazione lineare è invariante per diffeomorfismi (ricordare il Teorema 9.3.1).

Esercizio 9.4.2 (GNL del p -sistema) Provare che entrambi gli autovalori del p -sistema (9.6) sono genuinamente non lineari sotto l'ipotesi (fisica) che $p''(v) > 0$.

Esercizio 9.4.3 (GNL e LD del sistema della dinamica dei gas) Usando la forma data in (9.30) per il sistema della dinamica dei gas con $P_\rho > 0$ (pressione crescente con ρ), dimostrare che sotto l'ipotesi $P_{\rho\rho} > 0$ (pressione convessa in ρ), gli autovalori λ_1 e λ_3 sono genuinamente non lineari mentre λ_2 è linearmente degenerare.

Esercizio 9.4.4 (GNL del sistema delle acque basse) Si consideri il sistema delle acque basse nella formulazione (9.31). Provare che gli autovettori sono

$$r_1(h, u) = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}, \quad r_2(h, u) = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}$$

e dunque entrambi gli autovalori sono genuinamente non lineari.

9.5 Onde di rarefazione

In questa sezione iniziamo lo studio del problema di Riemann per il sistema (9.3), che sarà sempre supposto strettamente iperbolico in $U \subset \mathbb{R}^m$.

Definizione 9.5.1 (Problema di Riemann) *Fissati $u_l, u_r \in U \subset \mathbb{R}^m$, il problema di Riemann è il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= g & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (9.43)$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < 0, \\ u_r & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (9.44)$$

Possiamo ora risolvere il problema di Riemann (9.43)-(9.44) in un caso particolare: i due stati u_l e u_r stanno su una curva di rarefazione. Premettiamo una definizione importante, motivata dalla Sezione 9.4 e dalla Definizione 8.5.2.

Definizione 9.5.2 (k -onda di rarefazione) *Una soluzione integrale u del problema (9.43) che sia una k -onda semplice, costante lungo le rette per l'origine e continua è detta una k -onda di rarefazione (centrata).*

Teorema 9.5.1 (Esistenza di k -onde di rarefazione) *Sia $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ e λ_k genuinamente non lineare. Supponiamo inoltre che*

$$u_r \in R_k^+(u_l). \quad (9.45)$$

Allora il problema di Riemann (9.43)-(9.44) ha come soluzione un'onda di rarefazione.

Dimostrazione. Siano $w_l, w_r \in \mathbb{R}$ definiti da $u_l = v(w_l)$ e $u_r = v(w_r)$, dove v è una soluzione di (9.35) (w_l, w_r esistono per definizione di k -curva di rarefazione). Cominciamo col supporre che

$$w_l < w_r \quad (9.46)$$

e consideriamo il problema di Riemann per l'equazione (9.39) con dato iniziale scalare

$$g_k(x) = \begin{cases} w_l & \text{se } x < 0, \\ w_r & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (9.47)$$

cioè

$$\begin{cases} w_t + f_k(w)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w = g_k & \text{su } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (9.48)$$

Da (9.45) segue che $\lambda_k(u_l) < \lambda_k(u_r)$; da (9.40) e (9.46) deduciamo $f'_k(w_l) < f'_k(w_r)$. Poiché λ_k è genuinamente non lineare, da (9.41) segue che f_k è strettamente convessa. Possiamo pertanto applicare il Teorema di esistenza del caso scalare, che asserisce che l'unica soluzione del problema di Riemann scalare (9.48) è una rarefazione (scalare) che congiunge gli stati w_l e w_r :

$$w(x, t) = \begin{cases} w_l & \text{se } \frac{x}{t} < f'_k(w_l), \\ (f'_k)^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } f'_k(w_l) < \frac{x}{t} < f'_k(w_r), \\ w_r & \text{se } \frac{x}{t} > f'_k(w_r). \end{cases} \quad (9.49)$$

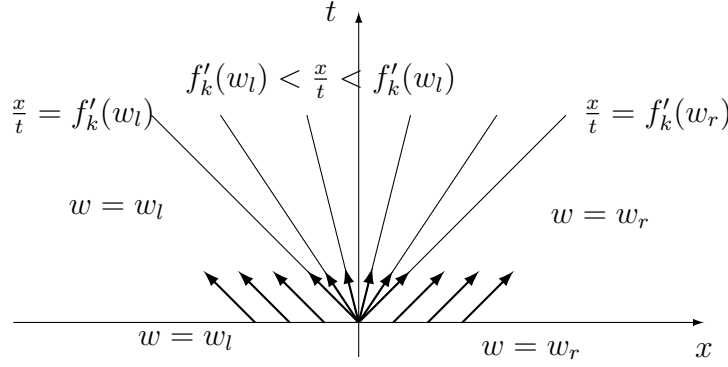


Figura 9.4: Onda di rarefazione. I vettori indicano le direzioni delle k -caratteristiche.

Chiaramente w è una funzione continua. Avendo risolto l'equazione scalare, supponiamo che v risolva (9.35) e passi per u_l . Definiamo allora

$$u(x, t) := v(w(x, t)).$$

Per l'Osservazione 9.4.3, u risolve il sistema $(9.43)_1$. Chiaramente u è continua, perché w e v lo sono, e quindi è una soluzione integrale; inoltre $u(x, 0) = v(w(x, 0)) = v(g_k(x))$, che è uguale a $v(w_l) = u_l$ se $x < 0$ e $v(w_r) = u_r$ se $x > 0$. Perciò u soddisfa il dato iniziale $(9.44)_2$. Infine, seguono dalla costruzione i fatti che u sia una k -onda semplice e sia costante lungo rette uscenti dall'origine.

Nel caso $w_l > w_r$ il procedimento è analogo: si ha ancora $\lambda_k(u_l) < \lambda_k(u_r)$, dunque $f'_k(w_l) < f'_k(w_r)$; poiché $w_l > w_r$, segue che f_k è strettamente concava. Possiamo di nuovo applicare il Teorema e la stessa formula (9.49) vale ancora.

□

Osservazione 9.5.1 Si noti come la costruzione di una k -rarefazione nel caso di un sistema si basi sulla costruzione di una rarefazione per l'equazione scalare $w_t + f_k(w)w_x$, che viene poi “vettorializzata” dalla funzione v . Nel caso scalare ovviamente v è l'identità.

Osservazione 9.5.2 Perché l'esistenza di una k -onda di rarefazione è stata limitata al caso in cui $u_r \in R_k^+(u_l)$? Perché nel caso in cui $u_r \in R_k^-(u_l)$ non ci sarebbe spazio per costruirla! Si esaminino infatti le k -caratteristiche relative a questi due casi, si veda la Figura 9.5.

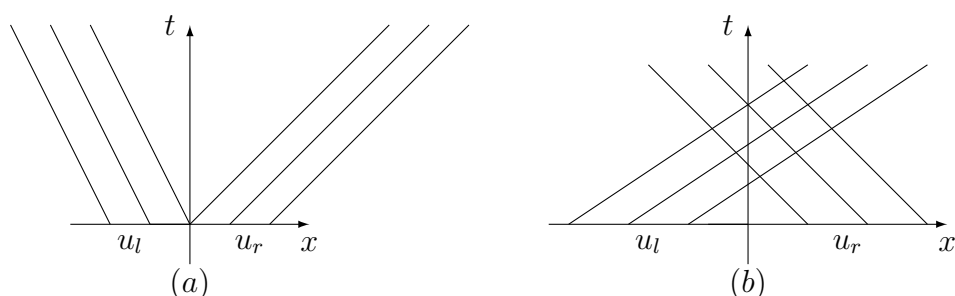


Figura 9.5: Le k -caratteristiche nel caso in cui λ_k è genuinamente non lineare; (a): $u_r \in R_k^+(u_l)$, cioè $\lambda_k(u_l) < \lambda_k(u_r)$, (b): $u_r \in R_k^-(u_l)$, cioè $\lambda_k(u_r) < \lambda_k(u_l)$.

Esercizio 9.5.1 [10, Esercizio 4, §11.5] Si consideri il sistema delle acque basse nella formulazione (9.31). Provare che le curve di rarefazione R_1 e R_2 nel piano (h, u) sono date dalla formule

$$2\sqrt{gh} \pm u = c,$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Disegnare tali curve nel piano (h, u) .

9.6 Il luogo di Hugoniot

In questa sezione consideriamo gli stati che sono collegati tramite un'onda d'urto. Ricordiamo che attraverso una curva di discontinuità (nel piano (x, t)) che separa due regioni in cui una soluzione è regolare deve valere la condizione di Rankine-Hugoniot.

Definizione 9.6.1 Consideriamo il sistema (9.3) in $U \subset \mathbb{R}^m$. Fissato $u_0 \in U$, il luogo di Hugoniot (o insieme d'urto) per u_0 o è l'insieme

$$S(u_0) = \{u \in U \subset \mathbb{R}^m : \text{esiste } \sigma = \sigma(u, u_0) \text{ tale che } f(u) - f(u_0) = \sigma(u - u_0)\}.$$

Il luogo di Hugoniot consiste pertanto di tutti gli stati $u \in U$ che soddisfano la condizione di salto di Rankine-Hugoniot con u_0 : se gli stati u_0 ed u_1 di una soluzione sono separati da una discontinuità di tipo salto, allora necessariamente $u_1 \in S(u_0)$. In particolare, tra questi stati ci sono gli u che possono essere collegati con u_0 da un'onda d'urto; per il momento, però, nessuna nozione di entropia né di tipo degli autovalori (genuinamente non lineari o linearmente degeneri) è stata utilizzata.



Hugoniot

Teorema 9.6.1 (Struttura del luogo di Hugoniot) *Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f \in C^2(U)$. Consideriamo il sistema (9.3) che supponiamo strettamente iperbolico in U ; fissiamo $u_0 \in U$. Esiste allora un intorno $\mathcal{U} \subset U$ di u_0 ed m curve regolari $S_k(u_0)$, $k = 1, 2, \dots, m$, tali che:*

(i) *in $\mathcal{U}$ si ha che $S(u_0) = \cup_{k=1}^m S_k(u_0)$; inoltre, la curva $S_k(u_0)$ passa per u_0 e ha in u_0 tangente $r_k(u_0)$;*

(ii) *vale che*

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ u \in S_k(u_0)}} \sigma(u, u_0) = \lambda_k(u_0);$$

(iii) *infine vale che*

$$\sigma(u, u_0) = \frac{\lambda_k(u) + \lambda_k(u_0)}{2} + O(|u - u_0|^2) \quad \text{per } u \rightarrow u_0, u \in S_k(u_0).$$

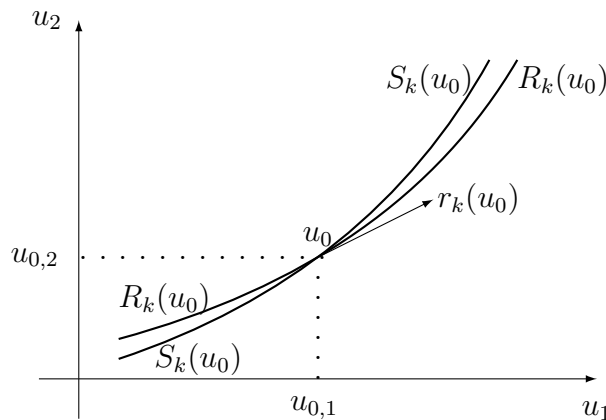


Figura 9.6: Curve di rarefazione e di shock per il punto (u_1^0, u_2^0) ; qui $m = 2$. Le due curve $R_k(u_0)$ e $S_k(u_0)$ sono tangenti nel punto u_0 con vettore tangente $r_k(u_0)$.

Prima di dimostrare questo importante risultato, facciamo vari commenti sul suo enunciato. Cominciamo col definire la k -onda d'urto analogamente a come abbiamo fatto per definire la k -onda di rarefazione nella Definizione 9.4.3.

Definizione 9.6.2 (k -curva d'urto) Fissiamo $u_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$. La curva $S_k(u_0)$ è detta k -curva d'urto.

Osservazione 9.6.1 Se un sistema è strettamente iperbolico in U e $u \in U$, dai Teoremi 9.5.1 e 9.6.1 si ha allora che:

- per u_0 passano m curve regolari $R_k(u_0)$, $k = 1, 2, \dots, m$, le curve di rarefazione;
- per u_0 passano m curve regolari $S_k(u_0)$, $k = 1, 2, \dots, m$, la cui unione forma il luogo di Hugoniot;
- la curva $R_k(u_0)$ e la curva $S_k(u_0)$ hanno la stessa tangente nel punto u_0 , la cui direzione è l'autovettore $r_k(u_0)$.

Il punto (ii) del Teorema 9.6.1 si interpreta così: consideriamo una soluzione discontinua di un problema di Riemann, avente u_0 come stato sinistro e $u \in S_k(u_0)$ come stato destro, con u vicino a u_0 ; allora la velocità di propagazione di tale discontinuità è vicina a $\lambda_k(u_0)$. Si ricordi che una proprietà simile vale anche per le rarefazioni: se u_0 e $u \in R_k(u_0)$ sono separati da una rarefazione e u è vicino a u_0 , allora le velocità di propagazione della coda e della testa della rarefazione sono $\lambda_k(u_0)$ e $\lambda_k(u) \sim \lambda_k(u_0)$.

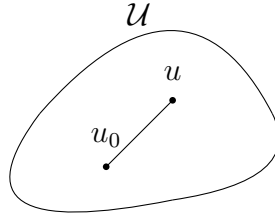
Il punto (iii) del Teorema 9.6.1 stabilisce che la velocità di propagazione della discontinuità è, al primo ordine, la *media delle k velocità caratteristiche degli stati costanti*. Ricordiamo che, nel caso dell'equazione di Burgers, la velocità di propagazione di un'onda d'urto è *precisamente* tale media, come si è visto negli esempi del Capitolo 8. Si noti che (iii) implica (ii).

Dimostrazione del Teorema 9.6.1. Dividiamo la dimostrazione in vari passi. Indicheremo con $\mathcal{U} \subset U$ un generico intorno di u_0 che potrà rimpicciolirsi di passo in passo.

1. *La matrice di media.* Fissiamo $u_0 \in U$ e sia $u \in \mathcal{U}$ abbastanza vicino ad u_0 in modo che il segmento che li congiunge sia contenuto in $\mathcal{U}$.

Questo permette di definire la funzione $g : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ tramite

$$g(t) = f(u_0 + t(u - u_0)).$$

Figura 9.7: L'intorno $\mathcal{U}$.

La funzione g è regolare perché f lo è. Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale a g (in versione vettoriale, cioè componente per componente),

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt,$$

deduciamo che

$$f(u) - f(u_0) = A(u, u_0)(u - u_0), \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}, \quad (9.50)$$

dove

$$A(u, u_0) = \int_0^1 Df(u_0 + t(u - u_0)) dt,$$

è detta *matrice di media*. Pertanto:

$$u \in S(u_0) \iff \text{esiste } \sigma(u, u_0) \text{ tale che } (A(u, u_0) - \sigma(u, u_0)\text{Id})(u - u_0) = 0. \quad (9.51)$$

2. *Autovalori e autovettori della matrice di media*. Notiamo che

$$A(u_0, u_0) = Df(u_0).$$

Poiché il sistema è strettamente iperbolico, si ha che il polinomio caratteristico $P(\lambda, u_0) := \det(A(u_0, u_0) - \lambda \text{Id})$ ha m radici reali e distinte. Per la dipendenza continua delle radici da un parametro, anche il polinomio caratteristico $P(\lambda, u) = \det(A(u, u_0) - \lambda \text{Id})$ ha m radici reali e distinte se u è vicino a u_0 , si veda l'Esercizio 9.6.1. Pertanto, dal Teorema 9.3.2, per $u \in \mathcal{U}$ esistono delle funzioni di classe C^1 scalari

$$\lambda_1(u, u_0) < \dots < \lambda_m(u, u_0) \quad (9.52)$$

e vettoriali

$$r_k(u, u_0), l_k(u, u_0), \quad \text{con} \quad |r_k(u, u_0)| = |l_k(u, u_0)| = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (9.53)$$

che soddisfano

$$\lambda_k(u_0, u_0) = \lambda_k(u_0), \quad r_k(u_0, u_0) = r_k(u_0), \quad l_k(u_0, u_0) = l_k(u_0), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

e che sono rispettivamente autovalori, autovettori destri e sinistri della matrice $A(u, u_0)$:

$$\begin{aligned} A(u, u_0)r_k(u, u_0) &= \lambda_k(u, u_0)r_k(u, u_0), \\ l_k(u, u_0)A(u, u_0) &= \lambda_k(u, u_0)l_k(u, u_0), \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Ovviamente gli insiemi $\{r_1(u, u_0), \dots, r_m(u, u_0)\}$ e $\{l_1(u, u_0), \dots, l_m(u, u_0)\}$ sono ancora basi di $\mathbb{R}^m$ e

$$l_j(u, u_0) \cdot r_k(u, u_0) = 0 \quad \text{se} \quad j \neq k. \quad (9.54)$$

3. *Il Teorema delle Funzioni Implicite e la definizione di $S_k(u_0)$.* Fissato $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, l'equazione in (9.51) vale se e soltanto se $\sigma(u, u_0) = \lambda_k(u, u_0)$ e $u - u_0$ è parallelo a $r_k(u, u_0)$. A causa di (9.54), quest'ultima condizione è equivalente a

$$l_j(u, u_0) \cdot (u - u_0) = 0, \quad \text{per} \quad j \neq k. \quad (9.55)$$

Questa condizione è composta da $m - 1$ equazioni per le m componenti dell'incognita u : vogliamo risolvere il sistema (9.55) applicando il Teorema della Funzione Implicita. Definiamo allora

$$\Phi_k : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$$

tramite

$$\begin{aligned} \Phi_k(u) &= (l_1(u, u_0) \cdot (u - u_0), \dots, l_{k-1}(u, u_0) \cdot (u - u_0), l_{k+1}(u, u_0) \cdot (u - u_0), \dots, l_m(u, u_0) \cdot (u - u_0)). \end{aligned}$$

Il sistema (9.55) si scrive allora come $\Phi_k(u) = 0$ e (9.51) è equivalente a

$$u \in S(u_0) \iff \Phi_k(u_0) = 0 \text{ per qualche } k \in \{1, \dots, m\}.$$

Abbiamo che $\Phi_k(u_0) = 0$ e

$$D\Phi_k(u_0) = \begin{pmatrix} l_1(u_0) \\ \vdots \\ l_{k-1}(u_0) \\ l_{k+1}(u_0) \\ \vdots \\ l_m(u_0) \end{pmatrix}.$$

La matrice $D\Phi_k(u_0)$ è composta da $m - 1$ righe e m colonne e il suo rango è $m - 1$, in quanto la famiglia $\{l_1(u_0), \dots, l_m(u_0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^m$. Possiamo dunque applicare il Teorema delle Funzioni Implicite (si veda l'Esercizio 9.6.2) a Φ_k : localmente vicino a u_0 il suo luogo degli zeri è grafico di una funzione regolare $\phi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, dove I è un intervallo contenente 0. In altre parole,

$$\Phi_k(\phi_k(s)) = 0 \quad \text{per ogni } s \in I, \quad \phi_k(0) = u_0. \quad (9.56)$$

Definiamo allora

$$S_k(u_0) := \text{sost}(\phi_k).$$

Poiché $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ era arbitrario, abbiamo definito le curve $S_k(u_0)$ per ogni k . A meno di riparametrizzare ϕ_k con l'ascissa curvilinea possiamo inoltre supporre che

$$|\dot{\phi}_k(s)| = 1, \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (9.57)$$

4. *Fine della dimostrazione di (i).* Da (9.54) segue che

$$\phi_k(s) = u_0 + \mu(s)r_k(\phi_k(s)), \quad (9.58)$$

per s in un intorno di 0, dove $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione regolare che soddisfa $\mu(0) = 0$ (da (9.56)) e $\dot{\mu}(0) = 1$ (da (9.57) e (9.53)). Derivando si ottiene

$$\dot{\phi}_k(0) = r_k(u_0).$$

Questo dimostra completamente il punto (i).

Omettiamo la dimostrazione dei punti (ii) e (iii). □

Esercizio 9.6.1 Chiarire in dettaglio la dipendenza continua delle radici da un parametro nella dimostrazione del Teorema 9.6.1; usare il Teorema della Funzione Implicita.

Esercizio 9.6.2 Chiarire in dettaglio l'applicazione del Teorema delle Funzioni Implicite (si veda [10, §C.7] o [17, Cap. 7, §6]) nella dimostrazione del Teorema 9.6.1.

Esercizio 9.6.3 [10, Esercizio 5, §11.5] Consideriamo il sistema (9.13) delle acque basse in coordinate (h, q) . Trovare una equazione che descriva il luogo

di Hugoniot $S((h_0, q_0))$ nel piano (h, q) , $h_0 > 0$. Nel caso particolare $q_0 = 0$, dimostrare che il luogo di Hugoniot è dato dalla formula

$$q = \pm \sqrt{\frac{g}{2}} h (h - h_0) \sqrt{\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}}.$$

Provare che in coordinate (h, u) il luogo di Hugoniot si scrive come

$$u = u_0 \pm \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} \right)} (h - h_0).$$

Disegnare tale insieme (usando MATLAB).

Ricordando l'Osservazione 9.6.1, ci si può chiedere se e quando le curve $R_k(u_0)$ e $S_k(u_0)$ coincidono. Questo può accadere se λ_k è un autovalore genuinamente non lineare ma accade *sempre* se λ_k è linearmente degenere.

Teorema 9.6.2 *Assumiamo le stesse ipotesi e notazioni del Teorema 9.6.1; supponiamo che l'autovalore λ_k del sistema (9.3) sia linearmente degenere in U . Allora, per ogni $u_0 \in U$ vale che*

$$(i) \quad R_k(u_0) = S_k(u_0);$$

$$(ii) \quad \lambda_k(u, u_0) = \lambda_k(u) = \lambda_k(u_0) \text{ per ogni } u \in S_k(u_0).$$

Osservazione 9.6.2 Ovviamente (i) implica (ii) per l'Osservazione 9.4.4. Consideriamo una soluzione discontinua di un problema di Riemann con stato sinistro u_0 e stato destro $u \in S_k(u_0)$. Se λ_k è linearmente degenere, il Teorema 9.6.2 asserisce che la velocità di propagazione della discontinuità non dipende da u , ma è la stessa per tutti gli stati sulla curva $S_k(u_0)$.

Dimostrazione del Teorema 9.6.2. Supponiamo che v sia una soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = r_k(v(s)), \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

Abbiamo visto nell'Osservazione 9.4.4 che se λ_k è linearmente degenere allora la funzione $s \mapsto \lambda_k(v(s))$ è costante in un intorno di 0, cioè che λ_k è costante sulla curva di rarefazione $R_k(u_0)$. Sui punti $v(s)$ di questa curva di rarefazione accade allora che

$$\begin{aligned} f(v(s)) - f(u_0) &= \int_0^s \frac{d}{d\sigma} f(v(\sigma)) d\sigma = \int_0^s Df(v(\sigma)) \dot{v}(\sigma) d\sigma = \int_0^s Df(v(\sigma)) r_k(v(\sigma)) d\sigma \\ &= \int_0^s \lambda_k(v(\sigma)) r_k(v(\sigma)) d\sigma = \lambda_k(u_0) \int_0^s \dot{v}(\sigma) d\sigma = \lambda_k(u_0) (v(s) - u_0). \end{aligned}$$

Questo significa che $v(s)$ appartiene anche al luogo di Hugoniot $S(u_0)$ e inoltre che $\lambda_k(v(s), u_0) = \lambda_k(u_0)$ per ogni s ; ciò dimostra il punto (ii). Più precisamente $v(s)$ appartiene alla curva $S_k(u_0)$ perché $v(s)$ appartiene anche a $R_k(u_0)$, la cui tangente in u_0 è proprio $r_k(u_0)$, che caratterizza $S_k(u_0)$ (gli autovettori sono linearmente indipendenti, dunque identificano direzioni distinte). Questo dimostra (i). $\square$

9.7 Onde d'urto e discontinuità di contatto

Chiarita la struttura del luogo di Hugoniot $S(u_0)$ nella sezione precedente, vediamo ora più in dettaglio quando possiamo risolvere il problema di Riemann (9.43)-(9.44) con un'onda d'urto... o qualcosa di simile. Come ci capisce dai Teoremi 9.6.1 e 9.6.2, ci saranno due casi da esaminare.

L'autovalore λ_k è linearmente degenere. Sia $u_r \in S_k(u_l)$. Definiamo

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < \sigma t, \\ u_r & \text{se } x > \sigma t, \end{cases} \quad (9.59)$$

con

$$\sigma = \lambda_k(u_r) = \lambda_k(u_l), \quad (9.60)$$

si veda il Teorema 9.6.2. Chiaramente u è una soluzione integrale in quanto è soluzione regolare (costante!) nelle regioni $x < \sigma t$ e $x > \sigma t$ e soddisfa la condizione di Rankine-Hugoniot attraverso la retta di salto $x = \sigma t$.

Nel caso in cui g è dato da (9.44) e λ_k è linearmente degenere, si noti la struttura particolare delle k -caratteristiche: si tratta, per ogni $x^0 \neq 0$, di rette parallele tra loro; non solo, anche la retta $x = \sigma t$, passante per $x^0 = 0$, è parallela ad esse.

Esempio 9.7.1 Nel sistema della dinamica dei gas, l'autovalore $\lambda_2 = u$ (u è la velocità, scalare) è linearmente degenere, si veda l'Esercizio 9.4.3. In tal caso le 2-caratteristiche sono le rette $(x^0 + \lambda_k(u)s, s)$, ovvero $x = x^0 + ut$. In presenza di una soluzione come quella in (9.59)-(9.60), la velocità del gas a sinistra e a destra della discontinuità è la stessa, e coincide con la velocità stessa di propagazione della discontinuità. Questo vuol dire che le particelle del gas non attraversano la linea di discontinuità.

L'interpretazione dell'esempio precedente motiva la seguente definizione.

Definizione 9.7.1 Una soluzione u definita come in (9.59) con λ_k linearmente degenere è detta una discontinuità di contatto.

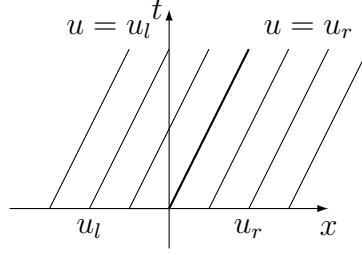


Figura 9.8: Le k -caratteristiche nel caso in cui λ_k è linearmente degenere e la discontinuità di contatto (più grossa).

L'autovalore λ_k è genuinamente non lineare. Sia $u_r \in S_k(u_l)$. Definiamo

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < \sigma t, \\ u_r & \text{se } x > \sigma t, \end{cases} \quad (9.61)$$

con

$$\sigma = \lambda_k(u_l, u_r). \quad (9.62)$$

Certamente u è una soluzione integrale perché valgono le condizioni di Rankine-Hugoniot. Se $u_l \neq u_r$ allora $\lambda_k(u_l) \neq \lambda_k(u_r)$ per l'Osservazione 9.4.4. Dal punto (iii) del Teorema 9.6.1 deduciamo che, se u_l è abbastanza vicino a u_r , allora $\lambda_k(u_l, u_r)$ giace nell'intervallo di estremi $\lambda_k(u_l)$ e $\lambda_k(u_r)$. A seconda che

$$(a): \lambda_k(u_l) < \lambda_k(u_r) \quad \text{o} \quad (b): \lambda_k(u_l) > \lambda_k(u_r),$$

le k -caratteristiche sono come in Figura 9.9.

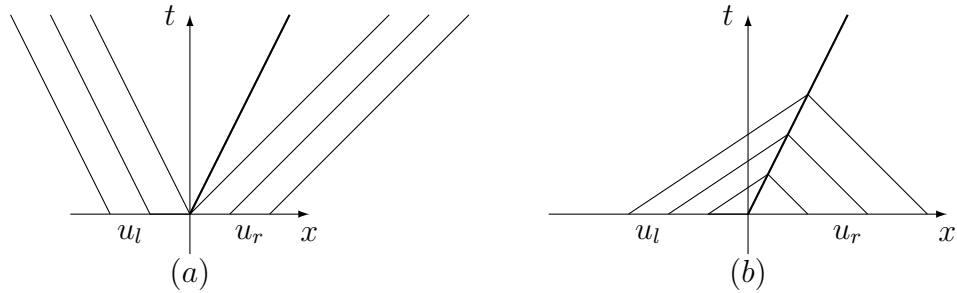


Figura 9.9: Le k -caratteristiche nel caso in cui λ_k è genuinamente non lineare e l'onda d'urto (più grossa); (a): $\lambda_k(u_l) < \lambda_k(u_r)$, (b): $\lambda_k(u_l) > \lambda_k(u_r)$.

Abbiamo già incontrato un problema simile nel caso delle leggi di conservazione scalari; in tal caso, abbiamo scartato la configurazione in (a) a favore di quella in (b). Questo motiva la seguente definizione, si veda la Definizione 8.5.1.

Definizione 9.7.2 Sia λ_k genuinamente non lineare e $u_l \in U$. La coppia (u_l, u_r) , con $u_r \in S_k(u_l)$, è detta ammissibile se

$$\lambda_k(u_l) > \lambda_k(u_r, u_l) > \lambda_k(u_r). \quad (9.63)$$

La disuguaglianza (9.63) è detta condizione di entropia di Lax; in tal caso la soluzione integrale (9.61)-(9.62) è detta una k -onda d'urto o k -shock wave.

Si noti, in (9.63), che il fatto che $\lambda_k(u_r, u_l)$ appartenga all'intervallo $(\lambda_k(u_r), \lambda_k(u_l))$ è automatico se u_l e u_r sono abbastanza vicini, si veda il punto (iii) del Teorema 9.6.1. Si noti inoltre che, se usiamo la parametrizzazione (9.58) per la curva $S_k(u_0)$, allora

$$\frac{d}{ds} \lambda_k(\phi_k(s)) = D\lambda_k(\phi_k(s)) \dot{\phi}_k(s)$$

e dunque

$$\frac{d}{ds} \lambda_k(\phi_k(s))|_{s=0} = D\lambda_k(\phi_k(s)) r_k(u_0).$$

Se λ_k è genuinamente non lineare allora il termine di destra è diverso da zero e dunque l'autovalore λ_k è monotono (almeno localmente) lungo la curva d'urto. Come per le rarefazioni, dividiamo la curva d'urto $S_k(u_0)$ in due parti, definendo

$$\begin{aligned} S_k^+(u_0) &= \{u \in S_k(u_0) : \lambda_k(u_0) < \lambda_k(u, u_0) < \lambda_k(u)\}, \\ S_k^-(u_0) &= \{u \in R_k(u_0) : \lambda_k(u) < \lambda_k(u, u_0) < \lambda_k(u_0)\}. \end{aligned}$$

Pertanto, si veda la Figura 9.10,

$$S_k(u_0) = S_k^-(u_0) \cup \{u_0\} \cup S_k^+(u_0),$$

e la parte ammissibile della curva d'urto è $S_k^-(u_0)$ (diversamente dalle curve rarefazione, dove la parte ammissibile era $R_k^+(u_0)$).

Esercizio 9.7.1 Un'onda d'urto è un'onda semplice?

9.8 La soluzione locale del Problema di Riemann

In questa sezione dimostriamo finalmente che il problema di Riemann (9.43), (9.44) ha sicuramente una soluzione se i dati iniziali u_l e u_r sono abbastanza vicini.

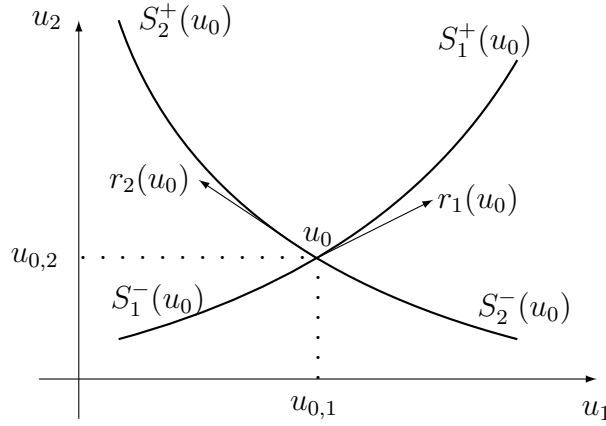


Figura 9.10: Curve d'urto per il punto (u_1^0, u_2^0) ; qui $m = 2$.

Definizione 9.8.1 Le curve di Lax o curve di shock-rarefazione $L_k(u_0)$, $k = 1, 2, \dots, m$, del sistema in (9.43) sono definite come segue (si veda la Figura 9.11):

$$L_k(u_0) = \begin{cases} R_k^+(u_0) \cup \{u_0\} \cup S_k^-(u_0) & \text{se } \lambda_k \text{ è genuinamente non lineare,} \\ R_k(u_0) = S_k(u_0) & \text{se } \lambda_k \text{ è linearmente degenera.} \end{cases}$$

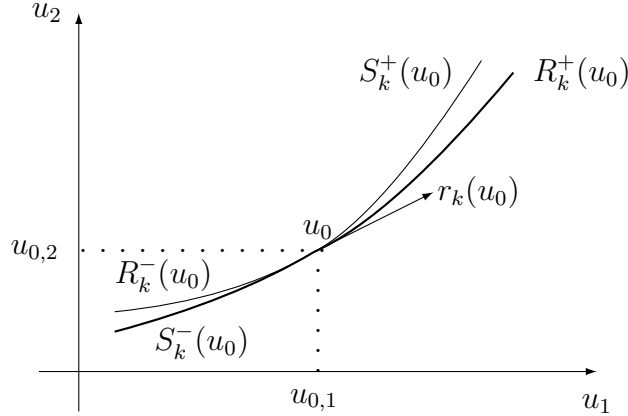


Figura 9.11: k -curva di Lax $L_k(u_0)$ per il punto u_0 (in grosso); qui $m = 2$.

Dal Teorema 9.6.1 e dalla Definizione 9.4.3 deduciamo che le curve di Lax sono di classe C^1 : le curve $R_k^+(u_0)$ e $S_k^-(u_0)$ sono regolari e hanno tangente comune $r_k(u_0)$ nel punto u_0 . L'interpretazione delle curve di Lax è la seguente: se fissiamo u_l e $u_r \in L_k(u_l)$, allora u_l e u_r sono connessi da un'onda di rarefazione, un'onda d'urto o una discontinuità di contatto e da una sola onda di questo tipo.

Poiché abbiamo a disposizione m curve di Lax, l'idea è di risolvere il problema di Riemann in questo modo: congiungiamo u_l con uno stato inter-

medio u_1 giacente sulla curva $L_1(u_l)$, questo con un altro stato intermedio giacente su $L_2(u_1)$ e così via. Speriamo di riuscire in questo modo ad arrivare a connettere un certo stato u_{m-1} con u_r tramite la curva $L_m(u_{m-1})$. Abbiamo a disposizione dunque m curve (non tangenti!) per collegare due punti di $\mathbb{R}^m$: ce la dovremmo fare, almeno localmente.

Teorema 9.8.1 (Soluzione del problema di Riemann per dati piccoli)

Sia $U \subset \mathbb{R}^m$ un aperto e $f \in C^2(U)$. Supponiamo che il sistema in (9.43) sia strettamente iperbolico in U e che gli autovalori siano genuinamente non lineari o linearmente degeneri in U .

Se u_l e u_r sono abbastanza vicini tra loro, allora esiste un'unica soluzione integrale del problema di Riemann (9.43), (9.44) che consiste di $m + 1$ stati costanti separati tra loro da onde di rarefazione, onde d'urto o discontinuità di contatto.

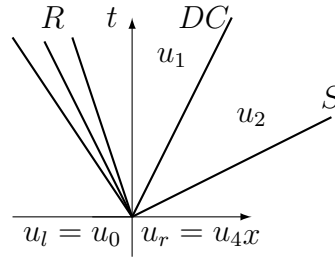


Figura 9.12: Una ipotetica soluzione al problema di Riemann (pensata per il sistema della dinamica dei gas).

Osservazione 9.8.1 L'ipotesi sul tipo degli autovalori nel Teorema 9.8.1 non richiede che *tutti* gli autovalori siano genuinamente non lineari oppure che *tutti* siano linearmente degeneri, ma semplicemente che, fissato un generico k , allora λ_k è di uno di questi due tipi.

Si noti inoltre che la soluzione del Teorema 9.8.1 è costante lungo le rette passanti per l'origine.

Dimostrazione del Teorema 9.8.1. La dimostrazione ricorda un po' quella del Teorema 9.6.1, ma si usa il Teorema della Funzione Inversa invece del Teorema della Funzione Implicita.

1. *Parametrizzazione delle curve di Lax.* Parametrizziamo le curve di Lax L_k , $k = 1, 2, \dots, m$, con l'ascissa curvilinea σ_k definita a partire dal punto u_0 : se $u_0 \in U$ e $u \in L_k(u_0)$, allora $\sigma_k(u)$ è la distanza (col segno) di u da

u_0 lungo la curva $L_k(u_0)$. Più precisamente, scegliamo il segno positivo se $u \in R_k^+(u_0)$ e il segno negativo se $u \in S_k^-(u_0)$:

$$\sigma_k(u) = \begin{cases} > 0 & \text{se } u \in R_k^+(u_0), \\ < 0 & \text{se } u \in S_k^-(u_0). \end{cases}$$

Chiaramente, dati due punti $u, v \in L_k(u_0)$, allora $\sigma_k(u) - \sigma_k(v)$ darà la distanza (col segno) dei punti u e v lungo $L_k(u_0)$. Viceversa, se $u = u(\sigma_k) = \phi_k(\sigma_k) \in L_k(u_0)$, dove ϕ_k è una curva il cui sostegno è $L_k(u_0)$, allora dalla Definizione 9.4.3 e dal Teorema 9.6.1 deduciamo che $\dot{\phi}_k(0) = r_k(u_0)$. Uno sviluppo di Maclaurin di $u(\sigma_k)$ dà allora

$$u(\sigma_k) = u_0 + \sigma_k r_k(u_0) + o(\sigma_k). \quad (9.64)$$

2. *Definizione di Φ .* Poniamo $u_l =: u_0$ e fissiamo una m -pla di parametri $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ in un intorno $\mathcal{I}$ di $0 \in \mathbb{R}^m$; scegliamo quindi iterativamente m stati $u_1, u_2, \dots, u_m$ in U così:

$$\begin{aligned} u_1 \in L_1(u_0) & : \sigma_1(u_1) = s_1, \\ u_2 \in L_2(u_1) & : \sigma_2(u_2) = s_2, \\ & \vdots \\ u_m \in L_m(u_{m-1}) & : \sigma_m(u_m) = s_m. \end{aligned}$$

Se poniamo $u_m =: u$, allora abbiamo definito

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (s_1, s_2, \dots, s_m) & \mapsto & u. \end{array}$$

In altre parole, fissati u_0 e s , arriviamo ad un punto u percorrendo sulla curva $L_1(u_0)$ un tratto lungo s_1 arrivando a u_1 , su $L_2(u_1)$ un tratto lungo s_2 arrivando a u_2 e così via. La mappa Φ ha la stessa regolarità delle curve di Lax, dunque C^1 , e $\Phi(0) = u_0$.

3. $D\Phi(0)$ non è singolare. Da (9.64) deduciamo che

$$\Phi(0, \dots, \sigma_k, \dots, 0) - \Phi(0) = \sigma_k r_k(u_0) + o(\sigma_k) \quad \text{per } \sigma_k \rightarrow 0,$$

e dunque che

$$\Phi_{s_k}(0) = r_k(u_0), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Ne segue che

$$D\Phi(0) = (r_1(u_0), r_2(u_0), \dots, r_m(u_0)),$$

e dunque la matrice $D\Phi(0)$ non è singolare.

4. Possiamo dunque applicare a Φ il Teorema della Funzione Inversa e dedurre che per ogni u_r in un intorno $\mathcal{U}$ di u_l esiste $s = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \mathcal{I}$ tale che $\Phi(s) = u_r$.

Se u_{k-1} ed u_k sono collegati da una k -onda di rarefazione, allora, nelle notazioni del Teorema 9.5.1 si ha che quest'onda è definita da $v_k(w_k(x, t))$ dove $\dot{v}_k = r_k(v)$, $v(0) = u_{k-1}$ e

$$w_k(x, t) = \begin{cases} s_{k-1} & \text{se } \frac{x}{t} < \lambda_k(u_{k-1}), \\ (f'_k)^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } \lambda_k(u_{k-1}) < \frac{x}{t} < \lambda_k(u_k), \\ s_k & \text{se } \frac{x}{t} > \lambda_k(u_k). \end{cases}$$

Pertanto

$$v_k(w_k(x, t)) = \begin{cases} u_{k-1} & \text{se } \frac{x}{t} < \lambda_k(u_{k-1}), \\ v_k\left((f'_k)^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)\right) & \text{se } \lambda_k(u_{k-1}) < \frac{x}{t} < \lambda_k(u_k), \\ u_k & \text{se } \frac{x}{t} > \lambda_k(u_k). \end{cases}$$

Se invece u_{k-1} ed u_k sono collegati da una k -onda d'urto o da una k -discontinuità di contatto, allora, nella notazione del Teorema 9.6.1, quest'onda è definita da

$$\begin{cases} u_{k-1} & \text{se } \frac{x}{t} < \sigma(u_k, u_{k-1}), \\ u_k & \text{se } \frac{x}{t} > \sigma(u_k, u_{k-1}), \end{cases}$$

e, nel caso l'autovalore λ_k sia genuinamente non lineare (e dunque l'onda sia un'onda d'urto) vale la condizione di entropia di Lax

$$\lambda_k(u_{k-1}) > \lambda_k(u_k, u_{k-1}) > \lambda_k(u_k).$$

Ricordando il punto (ii) del Teorema 9.6.1, in ogni caso tali onde sono costanti fuori dalla regione

$$\lambda_k(u_0) - \epsilon < \frac{x}{t} < \lambda_k(u_0) + \epsilon,$$

per un $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo. Poiché gli autovalori sono distinti, questo vuol dire che tali onde non si intersecano, e l'intera costruzione ha senso.

□

9.9 Il Problema di Riemann per il p -sistema

In questa sezione facciamo vedere come esempio la soluzione del problema di Riemann nel caso del p -sistema. Ricordiamo alcuni fatti già visti. Il p -sistema si scrive

$$\begin{cases} v_t - u_x &= 0, \\ u_t + p(v)_x &= 0. \end{cases}$$

Sotto l'ipotesi $p'(v) < 0$ è strettamente iperbolico nella regione $v > 0$ con autovalori $\lambda_1 = -c$ e $\lambda_2 = c$, dove $c = \sqrt{-p'(v)}$. I relativi autovettori sono

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}.$$

Se supponiamo $p''(v) > 0$, allora

$$D\lambda_i \cdot r_i = \left(\mp \frac{-p''}{2c} \right) \cdot (\pm 1, c) = \frac{p''(v)}{2c} > 0$$

per $i = 1, 2$, dove il segno superiore corrisponde a $i = 1$ e quello inferiore a $i = 2$. Pertanto gli autovalori sono genuinamente non lineari. Il segno della disuguaglianza dimostra che entrambi gli autovalori crescono nella direzione degli autovettori. Sia

$$g(x) = \begin{cases} (v_l, u_l) & \text{se } x < 0, \\ (v_r, u_r) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

e risolviamo il problema di Riemann per il dato iniziale g . Da un punto di vista fisico, abbiamo un gas in un tubo con una membrana a $x = 0$. A sinistra della membrana il gas ha volume specifico v_l e velocità u_l , a destra ha volume specifico v_r e velocità u_r . Al tempo 0 la membrana è tolta e chiediamo quale sarà l'evoluzione del flusso gassoso (Attenzione! Stiamo studiando il problema in coordinate Lagrangiane, per semplicità; il vero problema fisico andrebbe posto in coordinate Euleriane! Si veda [30]).

Poniamo $U_l := (v_l, u_l)$. Le curve di rarefazione sono le soluzioni del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{v} = \pm 1, \\ \dot{u} = \sqrt{-p'(v)}, \\ v(0) = v_l, \quad u(0) = u_r. \end{cases}$$

Qui il segno superiore si riferisce alla curva R_1 , quello inferiore alla curva R_2 . Prendendo v come variabile, cioè $\frac{du}{ds} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{ds} = \pm \frac{du}{dv}$, si trova

$$R_1(U_l) = \left\{ (v, u) : u = u_l + \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(w)} dw \right\},$$

$$R_2(U_l) = \left\{ (v, u) : u = u_l - \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(w)} dw \right\},$$

si veda la Figura 9.13. Si calcola infatti subito che la funzione $u_1(v) = u_l + \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(w)} dw$ è crescente e concava, mentre $u_2(v) = u_l - \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(w)} dw$ è decrescente e convessa. Poiché abbiamo visto che $D\lambda_i \cdot r_i$, cioè che gli autovalori crescono nella direzione degli autovettori (che puntano verso l'alto, poiché $c > 0$), avremo che R_i^+ sarà costituita dagli $u > u_l$, dunque

$$R_1^+(U_l) = \left\{ (v, u) : v > v_l \text{ and } u = u_l + \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(w)} dw \right\},$$

$$R_2^+(U_l) = \left\{ (v, u) : v < v_l \text{ and } u = u_l - \int_{v_l}^v \sqrt{-p'(w)} dw \right\}.$$

Le condizioni di Rankine-Hugoniot per U_l e $U = (v, u)$ si scrivono

$$\begin{cases} \sigma(v_l - v) = -(u_l - u), \\ \sigma(u_l - u) = p(v_l) - p(v). \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce

$$\sigma = -\frac{u_l - u}{v_l - v}$$

che, inserito nella seconda, dà il luogo di Hugoniot per U_l :

$$S(U_l) = \left\{ (v, u) : (u_l - u)^2 = -(p(v_l) - p(v)) (v_l - v) \right\}.$$

Si noti che il termine $\Delta(v) := -(p(v_l) - p(v)) (v_l - v)$ a destra dell'uguaglianza è sempre positivo poiché $p'(v) < 0$. Ricordando che le curve di Lax devono essere di classe C^1 , la curva $S_1^-(U_l)$ dovrà essere, almeno per (v, u) in un intorno di (v_l, u_l) , nella regione in cui $v < v_l$ e $u < u_l$; analogamente, la curva $S_2^-(U_l)$ dovrà giacere nella regione in cui $v > v_l$ e $u < u_l$. Pertanto ne deduciamo

$$S_1^-(U_l) = \left\{ (v, u) : v < v_l, u = u_l - \sqrt{-(p(v_l) - p(v)) (v_l - v)} \right\},$$

$$S_2^-(U_l) = \left\{ (v, u) : v > v_l, u = u_l - \sqrt{-(p(v_l) - p(v)) (v_l - v)} \right\}.$$

Si noti che gli indici per S_1 e S_2 sono stati scelti correttamente in modo che le curve di Lax siano di classe C^1 .

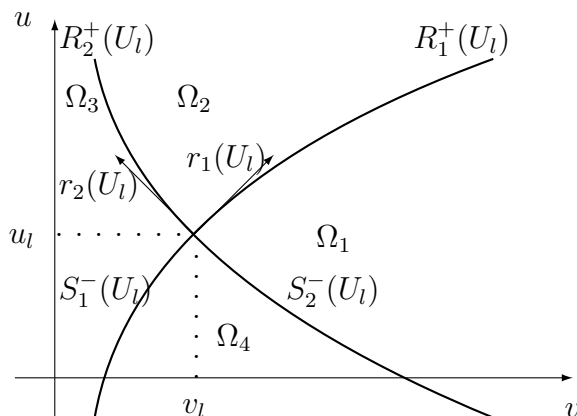


Figura 9.13: Le curve di Lax del p -sistema per il punto $U_l = (v_l, u_l)$.

Le curve di Lax dividono il piano (almeno localmente attorno a (v_l, u_l)) in quattro regioni, si veda la Figura 9.13: Ω_1 delimitata da R_1^+ e S_2^- , Ω_2 delimitata da R_1^+ e R_2^+ , Ω_3 delimitata da S_1^- e R_2^+ e Ω_4 delimitata da S_1^- e S_2^- . Ricordando la dimostrazione del Teorema 9.8.1, raggiungeremo un qualsiasi stato $U_r = (v_r, u_r)$ in un intorno di (v_l, u_l) in uno (e in uno solo) dei seguenti modi (si veda la Figura 9.14):

1. se $(v_r, u_r) \in \Omega_1$, percorriamo prima $R_1^+(U_l)$ sino a raggiungere un opportuno stato U_m , poi percorriamo la curva $S_2^-(U_m)$ per arrivare a U_r ;
2. se $(v_r, u_r) \in \Omega_2$, percorriamo prima $R_1^+(U_l)$ sino a raggiungere un opportuno stato U_m , poi percorriamo la curva $R_2^+(U_m)$ per arrivare a U_r ;
3. se $(v_r, u_r) \in \Omega_3$, percorriamo prima $S_1^-(U_l)$ sino a raggiungere un opportuno stato U_m , poi percorriamo la curva $R_2^+(U_m)$ per arrivare a U_r ;
4. se $(v_r, u_r) \in \Omega_4$, percorriamo prima $S_1^-(U_l)$ sino a raggiungere un opportuno stato U_m , poi percorriamo la curva $S_2^-(U_m)$ per arrivare a U_r .

Cerchiamo di capire intuitivamente il senso di tali soluzioni, analizzando cosa succede ad esempio se $U_r \in \Omega_1$. Lo stato iniziale prevede un gas più denso a destra e meno denso a sinistra; la velocità u_r non si discosta troppo da u_l . In tal caso la soluzione sviluppa un'onda d'urto (della seconda famiglia) che si propaga verso destra (dove il gas è meno denso). Subito dietro l'urto la velocità è aumentata (U_m è più alto di U_r) e il gas ha una densità intermedia. Intanto, a sinistra di 0, il gas sta fluendo verso destra e dunque

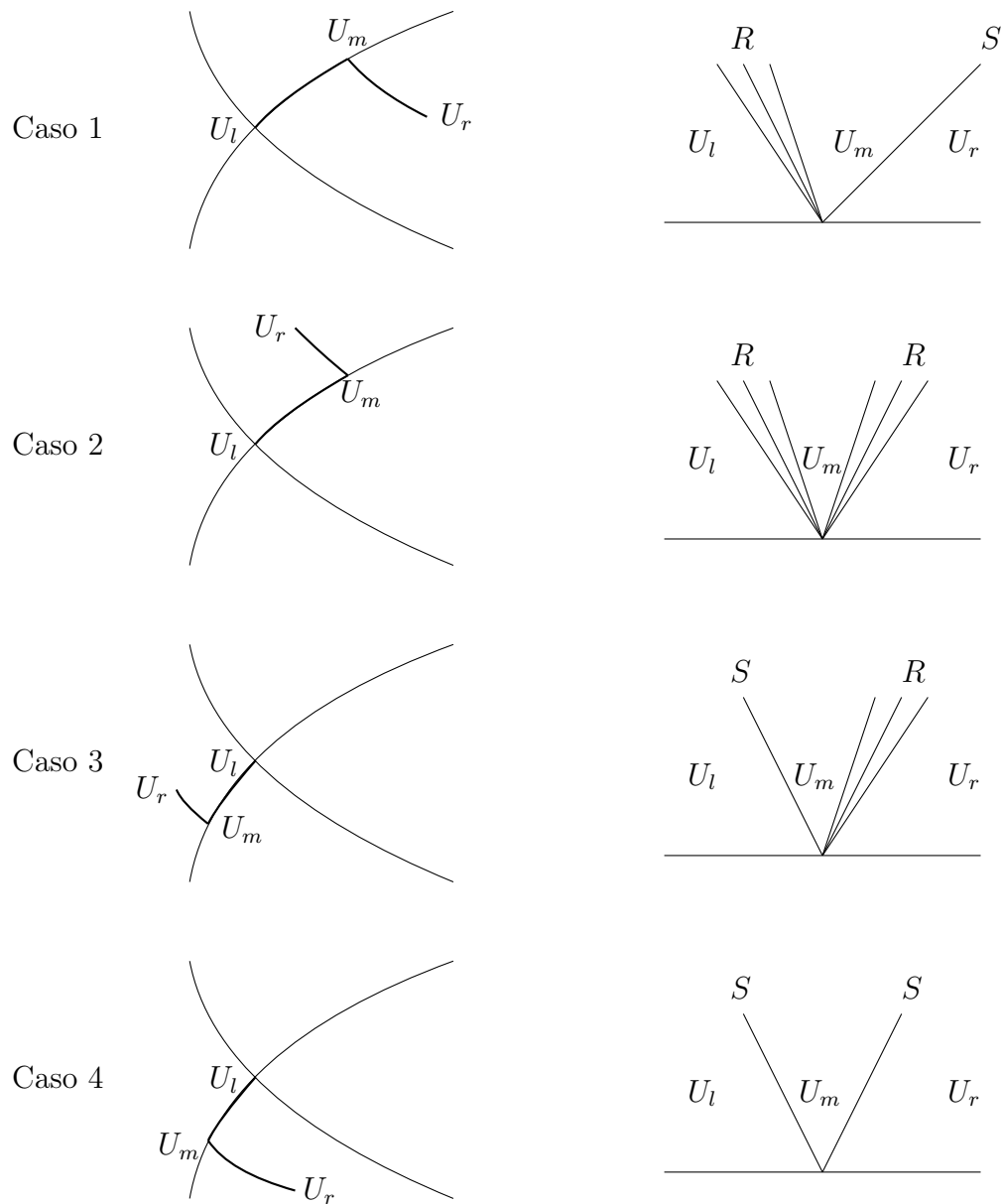
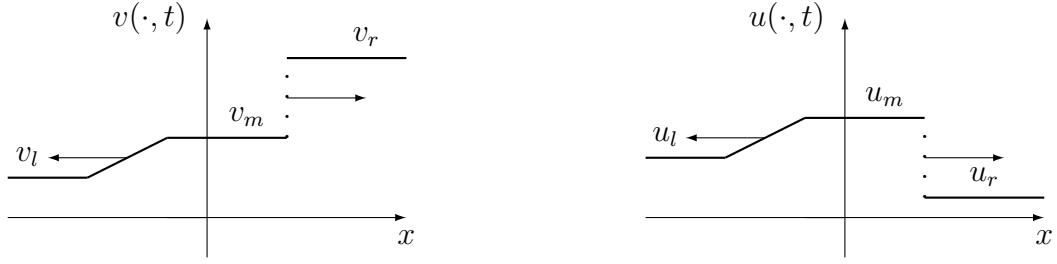


Figura 9.14: Le soluzioni dei problemi di Riemann per il p -sistema.

Figura 9.15: La soluzione al tempo t nel Caso 1.

la densità diminuisce: questo comportamento “meno brusco” è rappresentato da un’onda di rarefazione (della prima famiglia) che si propaga verso sinistra.

Osservazione 9.9.1 Se $p(v) = v^{-\gamma}$ e $\gamma > 1$, allora si trova facilmente che

$$\begin{aligned}
 R_1^+(U_l) &= \left\{ (v, u) : v > v_l \text{ e } u = u_l + \sqrt{\gamma} \left(v^{-\frac{\gamma-1}{2}} - v_l^{-\frac{\gamma-1}{2}} \right) \right\}, \\
 R_2^+(U_l) &= \left\{ (v, u) : v < v_l \text{ e } u = u_l - \sqrt{\gamma} \left(v^{-\frac{\gamma-1}{2}} - v_l^{-\frac{\gamma-1}{2}} \right) \right\}, \\
 S_1^-(U_l) &= \left\{ (v, u) : v < v_l \text{ e } u = u_l - \sqrt{-\left(v_l^{-\gamma} - v^{-\gamma} \right) (v_l - v)} \right\}, \\
 S_2^-(U_l) &= \left\{ (v, u) : v > v_l \text{ e } u = u_l - \sqrt{-\left(v_l^{-\gamma} - v^{-\gamma} \right) (v_l - v)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Questo permette di disegnare con precisione le curve di Lax (MATLAB...)

Si ottiene un’interpretazione fisica migliore studiando il p -sistema in coordinate Euleriane; in tal caso, si veda ad esempio [30] per le relative curve di Lax.

Capitolo 10

Matematici

Riportiamo una breve lista dei matematici (e non) incontrati in vario modo nel testo.

- d'Alembert, Jean-Baptiste Le Rond (Parigi, 1717 - Parigi, 1783)
- Darboux, Jean Gaston (Nîmes, 1842 - Parigi, 1917)
- Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (Düren, 1805 - Göttingen, 1859)
- Duhamel, Jean-Marie Constant (Saint-Malo, 1797 - Parigi 1872)
- Euler, Leonhard (Eulero) (Basilea, 1707 - S. Pietroburgo, 1783)
- Gauss, Carl Friedrich (Braunschweig, 1777 - Göttingen, 1855)
- Green, George (Sneinton, 1793 - Nottingham, 1841)
- Hadamard, Jacques Solomon (Versailles, 1865 - Parigi, 1963)
- Hamilton, William Rowan (Dublino, 1805 ? Dublino, 1865)
- von Harnack, Carl Gustav Axel (Tartu, 1851 - Dresden, 1888)
- Hugoniot, Pierre Henri (Allenjoie, 1851 - Nantes, 1887)
- Huygens, Christiaan (L'Aia, 1629 - L'Aia, 1695)
- Jacobi, Carl Gustav Jacob (Potsdam, 1804 ? Berlino, 1851)
- Kelvin, William Thomson, I barone (Belfast, 1824 - Largs, 1907)
- Kirchhoff, Gustav Robert Georg (Königsberg, 1824 - Berlino, 1887)

- Lamé, Gabriel (Tours, 1795 - Parigi, 1870)
- Liouville, Joseph (Saint-Omer, 1809 - Parigi, 1882)
- Poisson, Siméon-Denis (Pithiviers, 1781 - Parigi, 1840)
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard (Breselenz, 1826 - Selasca, 1866)
- Rankine, William John Macquorn (Edinburgh, 1820 - Glasgow, 1872)
- Sobolev, Sergej L'vovič (San Pietroburgo, 1908 - Mosca, 1989)
- Stokes, George Gabriel (Skreen, 1819 - Cambridge, 1903)
- Tichonov, Andrei Nikolaevic (Gzhatsk, 1906 - Mosca, 1993)

Bibliografia

- [1] V.I. Arnold. *Mathematical Understanding of Nature*. AMS, 2014.
- [2] M.T. Borgato e L. Pepe. *Note critiche di Analisi Matematica*. Editrice Universitaria, Ferrara, 1979.
- [3] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Oxford University Press, 2000.
- [4] J. Burgers. *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence*. Neder. Akad. Wefensh. Proc. 43, 1940, 2–12.
- [5] J.R. Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley, 1984.
- [6] C. Carathéodory. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order*. AMS, 1999.
- [7] B. Carazza e G.P. Guidetti. *La Nascita dell'Equazione di Klein-Gordon*. Arch. History Exact Sci. 22(4), 1980, 373–383.
- [8] Ph.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity..* North-Holland, 1988.
- [9] C.M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, third edition. Springer, 2010.
- [10] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2a ed., 2010.
- [11] L.C. Evans e R. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, 1992.
- [12] W. Fleming. *Functions of Several Variables*. 2nd edition, Springer, 1977.

- [13] G.B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 1976.
- [14] G.P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, volume I, Linearized Steady Problems. Springer, 1994.
- [15] P.R. Garabedian. *Partial Differential Equations*. Wiley, 1964.
- [16] D. Gilbarg e N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1983.
- [17] E. Giusti. *Analisi matematica 2*. Bollati Boringhieri, 1990.
- [18] E. Giusti. *Esercizi e complementi di analisi matematica. Volume 2*. Bollati Boringhieri, 1992.
- [19] R. Haberman. *Mathematical models. Mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*. SIAM, 1998.
- [20] G.H. Hardy, J.E. Littlewood e G. Pólya *Inequalities*, Seconda edizione. Cambridge University Press, 1952.
- [21] L.L. Helms *Introduction to Potential Theory*. Wiley, 1969.
- [22] H. Holden e N.H. Risebro. *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*. Springer, 2002.
- [23] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol 1. Springer, 1983.
- [24] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer, 4a ed., 1991.
- [25] O.D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Springer, 1929.
- [26] B.L. Keyfitz e H.C. Kranzer. *A system of nonstrictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*. Arch. Rational Mech. Anal. 72 (1979/80), 219–241.
- [27] S.G. Krantz e H.R. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions*, second edition. Birkhäuser, 2002.
- [28] S. Lang. *Algebra lineare*. Boringhieri, 1970.
- [29] P.D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 537–566.

- [30] R.J. Leveque. *Numerical methods for conservation laws*, second edition. Birkhäuser, 1992.
- [31] M.J. Lighthill e G.B. Whitham. *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A., 229, 1955, 317–345.
- [32] P. Lindqvist. *Notes on the p -Laplace Equation*. <https://folk.ntnu.no/lqvist/lecturenotes.html>, 2005.
- [33] T. Manacorda. *Una osservazione al riguardo della propagazione per onde del calore*. Riv. Mat. Univ. Parma 15(4), 1989, 35–40.
- [34] V.P. Mikhailov. *Partial Differential Equations*. Mir, 1978.
- [35] T. Morley. *A Simple Proof that the World is Three-Dimensional*. SIAM Review 27(1), 1985, 69–71.
- [36] T. Morley. *Errata: A Simple Proof that the World is Three-Dimensional*. SIAM Review 28(2), 1986, 229.
- [37] M. Renardy e R.C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Seconda edizione. Springer, 2004.
- [38] P.I. Richards. *Shock waves on the highway*. Oper. Res. 4, 1956, 42–51.
- [39] B. Riemann. *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*. Gött. Abh. Math. Cl. 8, 1860, 43–65.
- [40] L. Rodino. *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Space*. World Scientific, 1993.
- [41] S. Salsa. *Equazioni a Derivate Parziali*. Metodi, Modelli e Applicazioni. Springer, 2004.
- [42] S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti e P. Zunino. *Invito alle Equazioni alle Derivate Parziali*. Springer, 2009.
- [43] S. Salsa e G. Verzini. *Equazioni a Derivate Parziali*. Complementi ed esercizi. Springer, 2005.
- [44] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Hermann, 2 volumi, 1950/1951.
- [45] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, second edition. Springer, 1994.

- [46] W.A. Strauss. *Partial Differential Equations. An Introduction*, second edition. Wiley, 2008.
- [47] J.L. Vazquez. *The Porous Medium Equation*. Clarendon, 2007.
- [48] D.V. Widder. *The Heat Equation*. Academic Press, 1976.