RACCOLTA DEGLI ESAMI SCRITTI DI ANALISI FUNZIONALE DAL 2011 AL 2018

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Francesca Prinari
Dipartimento di Matematica
Università di Ferrara

Date: Aggiornato al 15/02/2018.

Gli esercizi sulla prima parte del programma (fino al Teorema di Banach-Steinhaus incluso) e utili per prepararsi al primo parziale sono:

(1) 19.05.2011 Esercizio 2, Esercizio 3
(2) 06.06.2011 Esercizio 2, Esercizio 3
(3) 06.07.2011 Esercizio 1, Esercizio 4
(4) 08.09.2011 Esercizio 1, Esercizio 3
(5) 24.11.2011 Esercizio 1
(6) 25.01.2012 Esercizio 1, Esercizio 2 (a)
(7) 15.05.2012 Tutto
(8) 13.06.2012 Esercizio 1 (a e b)
(9) 09.07.2012 Esercizio 1 (a e b), Esercizio 2
(10) 16.07.2012 Esercizio 2
(11) 17.09.2012 Esercizio 1
(12) 11.01.2013 Tutto
(13) 22.01.2013 Esercizio 3 (esame scritto)
(14) 28.05.2013 Esercizio 2
(15) 25.06.2013 Esercizio 1 (tutto tranne la parte (e)), Esercizio 2
(16) 18.07.2013 Esercizio 2
(17) 10.10.2013 Esercizio 1
(18) 26.11.2013 Tutto
(19) 16.01.2014 Primo parziale: Esercizio 1,2
(20) 04.02.2014 Esercizio 1, Esercizio 2
(21) 25.03.2014 Esercizio 1, Esercizio 2
(22) 27-11-2014 tutto
(23) 22-01-2015 Esercizio 2, Esercizio 4
(24) 11-02-2015 Esercizio 1
(25) 17-03-2015 Esercizio 1
(26) 11-06-2015 Esercizio 1
(27) 7-07-2015 Esercizio 1
(28) 6-5-2015 tutto
(29) 7-6-2015 tutto
(30) 21-06-2016 Esercizio 1
(31) 8-7-2016 Esercizio 1
(32) 20-07-2016 Esercizio 1, Esercizio 2
(33) 23-09-2016 Esercizio 1
(34) 2-12-2016 Tutto
(35) 20-01-2017 Esercizio 1, Esercizio 2
(36) 21-02-2017 Esercizio 1, Esercizio 2
(37) 18-07-2017 Esercizio 1
(38) 12-09-2017 Esercizio 1
(39) 27.11.2017 Tutto
(40) 16.01.2018 Esercizio 1, Esercizio 2
(41)

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 19.5.2011

(1) (8/12 punti) Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare, continuo e iniettivo. Provare che $T^{-1} : T(X) \to X$ e' continuo se e solo se $T(X)$ e' chiuso in Y.

(2) (8/10 punti) Sia $X = L^p(0,1)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ e sia $T : X \to X$ definito da $T(u)(t) = tu(t)$. Verificare che T e' lineare, continuo e di norma 1.

(3) (6/8 punti) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X'. Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in M\}$$

e

$$N^0 := \{x \in X : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in N\}.$$

Provare che

(a) se $B_X := \{x \in X : \ ||x|| \leq 1\}$ e $B_{X'} = \{f \in X' : \ ||f|| \leq 1\}$ allora $B_X^0 = B_{X'}$ e $B_{X'}^0 = B_X$.

(b) se M e' un sottospazio allora $M^0 = \{f \in X' : \ f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$.

(4) (**9 crediti)**(8 punti) Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare. Allora T e' continuo se e solo se per ogni $(x_n)_n \subset X$ tale che $x_n \rightharpoonup x_0$ in X vale che $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ in Y.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 6.6.2011

(1) (**9 crediti**)(**8 punti**) Sia X uno spazio di Banach e Y un suo sottoinsieme denso e $(F_n)_n$ una successione in X' . Dimostrare che: $(F_n)_n$ converge debolmente $*$ in $X' \iff (F_n)_n$ é limitata in X' e $(F_n(y))_n$ converge per ogni $y \in Y$.

(2) Sia T : $c_0 \to c_0$ (dove c_0 denota lo spazio di Banach delle successioni infinitesime, dotato della norma $\| \cdot \|_\infty$) l'operatore lineare definito da
$$T(x) = (x_n - x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$
per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.
  (a) (**6/8 punti**) Provare che T e' continuo e calcolarne la norma;

  (b) (**3/4 punti**) Per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ sia
$$||x||_T = \|Tx\|_\infty + ||x||_\infty.$$
  Si verifichi che $\| \cdot \|_T$ e' una norma equivalente a $\| \cdot \|_\infty$.

  (c) (**3/5 punti**) dimostrare che T e' iniettivo;

  (d) (**4/5 punti**) stabilire se T e' un isomorfismo topologico;

(3) (**6/8 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare tale che $f \circ T \in X'$ per ogni $f \in Y'$. Provare che T e' continuo.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 6.7.2011

(1) (**8 punti**) Sia $X = C^0[0,1]$ munito della norma del massimo. Sia
$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx + u(1).$$
Verificare che T e' un funzionale lineare e continuo di norma 2.

(2) (**6 punti**) Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \to Z$ un operatore lineare, continuo e iniettivo e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che T e' continuo.

(3) (**6 punti**) Sia X spazio di Banach riflessivo. Provare che
 (a) ogni $f \in X'$ assume minimo sulla palla chiusa unitaria di X;
 (b) dedurre dal punto precedente che ogni $f \in X'$ assume massimo sulla sfera unitaria di X.

(4) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X'. Definiamo
$$M^0 := \{f \in X' : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in M\}$$
e
$$N^0 := \{x \in X : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in N\}.$$
Provare che
 (a) (**4 punti**) se per ogni $r > 0$ $B_r^X := \{x \in X : \ ||x|| \leq r\}$ e $B_r^{X'} = \{f \in X' : \ ||f|| \leq r\}$ allora $(B_r^X)^0 = B_{1/r}^{X'}$ e $(B_r^{X'})^0 = B_{1/r}^X$.
 (b) (**4 punti**) Sia M un sottospazio. Sapendo che in tal caso $M^0 = \{f \in X' : \ f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$, provare che
$$M \text{ e' denso } \iff M^0 = \{0_{X'}\}$$
.

Soluzione

(1) Banalmente si verifica che $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in X$. Inoltre

$$|T(u)| \leq ||u||_\infty + ||u||_\infty = 2||u||_\infty$$

per ogni $u \in X$. Infine scelta $u \equiv 1$ si ha che $||u||_\infty = 1$ e $T(u) = 2$. Possiamo quindi concludere che T ha norma 2.

(2) Essendo $T : X \to Y$ un operatore lineare, per provare che T e' continuo e'sufficiente verificare che T ha grafico chiuso. Sia $x_n \to x$ in X e $Tx_n \to y$ in Y. Dobbiamo provare che $y = Tx$. Essendo S un operatore continuo vale che $Sx_n \to Sx$ ossia

$$J(Tx_n) \to J(Tx).$$

Inoltre anche J e' continuo. Quindi $J(Tx_n) \to J(y)$. Da cui

$$J(Tx) = J(y)$$

ed essendo J iniettivo otteniamo che

$$Tx = y.$$

(3) (a) Verifichiamo le ipotesi del teorema di Weirstrass (vedi Corollario III.19 del Brezis). La palla chiusa unitaria di X e' convessa, chiusa e limitata e ogni $f \in X'$ e' convessa (in quanto lineare) e continua e quindi semicontinua. Quindi f raggiunge il suo minimo sulla palla chiusa unitaria.

(b) Se consideriamo la funzione $-f$, ragionando come sopra, possiamo dire che $-f$ ammette minimo sulla palla B_1. In particolare segue che f assume massimo sulla palla B_1 in quanto

$$max_{B_1} f = -min_{B_1}(-f).$$

Infine e' facile provare che per una funzione lineare

$$max_{B_1} f = max_{S_1} f$$

dove S_1 e' la sfera unitaria.

(4) (a) Sia $f \in (B_r^X)^0$. Allora $|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in B_r^X$. Se $x \in B_1^X$ allora $rx \in B_r^X$ e quindi $|f(rx)| \leq 1$ ossia $|f(x)| \leq \frac{1}{r} \ \forall x \in B_1^X$. In particolare $|f| \leq \frac{1}{r}$ ossia $f \in B_{1/r}^{X'}$. Viceversa sia $f \in B_{1/r}^X$. Allora $|f(x)| \leq \frac{1}{r} \forall x \in B_1^X$. Per ogni $x \in B_r^X$ vale che $\frac{1}{r}x \in B_1^X$ e quindi $|f(\frac{1}{r}x)| \leq \frac{1}{r}$ ossia $|f(x)| \leq 1$. Segue che $f \in (B_r^X)^0$.

(b) Sia $x \in (B_r^{X'})^0$. Allora $|f(x)| \leq 1 \ \forall f \in B_r^{X'}$. Se $g \in B_1^{X'}$ allora $rg \in B_r^{X'}$ e quindi $|rg(x)| \leq 1$ da cui $|g(x)| \leq \frac{1}{r}$. In particolare segue che $||x|| = \sup_{g \in X',\ ||g|| \leq 1} |g(x)| \leq \frac{1}{r}$ ossia $x \in B_{1/r}^X$. Viceversa se $x \in B_{1/r}^X$ allora $||x|| = \sup_{g \in X',\ ||g|| \leq 1} |g(x)| \leq \frac{1}{r}$. Questo implica che $|g(x)| \leq \frac{1}{r}$ per ogni $g \in B_1^{X'}$. In particolare per ogni $f \in B_r^{X'}$ (poiche' $\frac{1}{r} f \in B_1^{X'}$) vale che $|\frac{1}{r} f(x)| \leq \frac{1}{r}$ ossia $|f(x)| \leq 1$ da cui $x \in (B_r^{X'})^0$.

(c) Se M e' denso e $f \in X'$ e' tale che $f \equiv 0$ su M allora per continuita' $f \equiv 0$ su X. In particolare otteniamo che $M^0 = \{0_{X'}\}$. Viceversa supponiamo che $M^0 = \{0_{X'}\}$. Quindi se $f \in X'$ e' tale che $f \equiv 0$ su M, allora $f \equiv 0$ su X. Da un corollario del Teorema di Hanh Banach (confronta Corollario 1.8 del Brezis) possiamo concludere che M e' denso.

Scritto totale di Analisi Funzionale (3 crediti)

Ferrara, 6.7.2011

(1) Sia $X = C^1[0,1]$ munito della norma $|u| := ||u||_\infty + ||u'||_\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia
$$T_n(u) = \int_0^1 u(x)dx + u(\frac{1}{n}).$$
  (a) (**10 punti**) Verificare che T_n e' un funzionale lineare e continuo di norma 2.
  (b) (**3 punti**) Dimostrare che $||T_n - T|| \to 0$ (in $L(X)$) dove
$$T_n(u) = \int_0^1 u(x)dx + u(0).$$

(2) (**7 punti**) Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \to Z$ un operatore lineare, continuo e iniettivo e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che T e' continuo.

(3) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X'. Definiamo
$$M^0 := \{f \in X' : \ |f(x)| \le 1 \ \forall x \in M\}$$
e
$$N^0 := \{x \in X : \ |f(x)| \le 1 \ \forall f \in N\}.$$
Provare che
  (a) (**5 punti**) se per ogni $r > 0$ $B_r^X := \{x \in X : \ ||x|| \le r\}$ e $B_r^{X'} = \{f \in X' : \ ||f|| \le r\}$ allora $(B_r^X)^0 = B_{1/r}^{X'}$ e $(B_r^{X'})^0 = B_{1/r}^X$.
  (b) (**5 punti**) Sia M un sottospazio. Sapendo che in tal caso $M^0 = \{f \in X' : \ f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$, provare che
$$M \text{ e' denso } \iff M^0 = \{0_{X'}\}$$
.

Soluzione

(1) Banalmente si verifica che $T_n(au+bv) = aT_n(u) + bT_n(v)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in X$. Inoltre
$$|T_n(u)| \leq ||u||_\infty + ||u||_\infty \leq 2|u|$$
per ogni $u \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine scelta $u \equiv 1$ si ha che $|u| = 1$ e $T_n(u) = 2$. Possiamo quindi concludere che T_n ha norma 2.

(2) Grazie al teorema di Lagrange, per ogni $u \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\xi_n \in [0,1]$ tale che
$$|(T_n - T)(u)| = |u(\frac{1}{n}) - u(0)| = |u'(\xi_n)|(\frac{1}{n}).$$
In particolare se $|u| = 1$ si ha che
$$|(T_n - T)(u)| \leq \frac{1}{n}.$$
Questo implica che
$$||T_n - T|| \leq \frac{1}{n}$$
da cui $||T_n - T|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Oppure si puo' arrivare alle stesse conclusioni usando il teorema fondamentale del calcolo integrale:
$$|(T_n - T)(u)| = |u(\frac{1}{n}) - u(0)| = |\int_0^{\frac{1}{n}} u'(x)dx| \leq |u| \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n}|u|.$$
Da cui segue, per definizione di norma, che
$$||T_n - T|| \leq \frac{1}{n}.$$

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 8.9.2011

(1) (**10 punti**) Sia $X = C^0[0,1]$ munito della norma del massimo. Sia
$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx - u(1).$$
Verificare che T e' un funzionale lineare e continuo di norma 2.

(2) (**8 punti**) Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \to Z$ un operatore lineare e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e biettivo. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che J e' continuo.

(3) Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X'. Definiamo
$$M^0 := \{f \in X' : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in M\}$$
e
$$N^0 := \{x \in X : \ |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in N\}.$$
Per ogni $r > 0$ sia $B_r^X := \{x \in X : \ ||x|| \leq r\}$ e $B_r^{X'} = \{f \in zX' : ||f|| \leq r\}$. Sia $0 < r < R$. Provare che

(a) (**4 punti**) $(B_R^X \setminus B_r^X)^0 = (B_R^X)^0$;

(b) (**4 punti**) $(B_R^{X'})^0 = B_{\frac{1}{R}}^X$;

(c) (**4 punti**) $(B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0 = (B_R^{X'})^0$.

Soluzione

(1) si verifica facilmente che T e' un funzionale lineare. Inoltre per ogni $u \in C^0[0,1]$ $|T(u)| \leq ||u||_\infty + |u(1)| \leq 2||u||_\infty$. Quindi $||T|| \leq 2$. Per dimostrare che $||T|| = 2$ proviamo che esiste una successione $u_n \in C^0[0,1]$ tale che $||u||_\infty = 1$ e $\lim_n |T(u_n)| = 2$. Sia

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ -nx + n - 1 & se\ 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Allora

$$\begin{aligned} T(u_n) &= 1 - \frac{1}{n} + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} (-nx + n - 1)dx + 1 \\ &= 2 - \frac{1}{n} - n[\frac{x^2}{2}]_{1-\frac{1}{n}}^{1} + (n-1)\frac{1}{n} \end{aligned}$$

che tende a 2 per $n \to \infty$.

(2) Da un corollario al teorema della mappa aperta segue che l'operatore lineare $T^{-1} : Y \to X$ e' anche continuo. Componendo allora con l'operatore continuo $J \circ T$ otteniamo che $J = J \circ T \circ T^{-1}$ e' continuo.

(3) Si osservi preliminarmente che se $B \subset C$ allora $C^0 \subset B^0$.
  (a) Dall'osservazione sopra segue che
  $$(B_R^X)^0 \subset (B_R^X \setminus B_r^X)^0.$$
  Poi, se $f \in (B_R^X \setminus B_r^X)^0$ allora per ogni $x \in B_R^X \setminus B_r^X$ vale che $|f(x)| \leq 1$. Sia $x \in B_R^X$. Se $x = 0$ allora $f(x) = 0$. Se $x \neq 0$ allora $R\frac{x}{||x||} \in B_R^X \setminus B_r^X$. Da cui segue che $|f(R\frac{x}{||x||})| \leq 1$ ossia $|f(x)| \leq \frac{||x||}{R} \leq 1$. In entrambi i casi $|f(x)| \leq 1$ ossia $f \in (B_R^X \setminus B_r^X)^0$.
  (b) vedi compito del 6-7-2011.
  (c) Dall'osservazione sopra segue che
  $$(B_R^{X'})^0 \subset (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0.$$
  Poi, se $x \in (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0$ allora per ogni $f \in (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0$ vale che $|f(x)| \leq 1$. Sia $f \in B_R^{X'}$. Se $f = 0$ allora $f(x) = 0$. Se $f \neq 0$ allora $R\frac{f}{||f||} \in B_R^{X'} \setminus B_r^{X'}$. Da cui segue che $|\frac{R}{||f||}f(x)| \leq 1$ ossia $|f(x)| \leq \frac{||f||}{R} \leq 1$. In entrambi i casi $|f(x)| \leq 1$ ossia $f \in (B_R^{X'} \setminus B_r^{X'})^0$.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 24.11.2011

(1) (**15 punti**) Sia $m : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua non identicamente nulla e sia $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore definito da
$$Tu(x) := u(x)m(x).$$
Dimostrare che
  (a) (**5 punti**) T e' lineare e continuo;
  (b) (**5 punti**) supponiamo che $\bar{x} \in (0,1)$ sia tale che $M = |m(\bar{x})| = \max_{[0,1]} |m(x)|$. Per ogni $\epsilon > 0$ sia $u_\epsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{m(x)}{M} \chi_{[\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]}(x)$. Provare che $||Tu_\epsilon||_{L^2} \to ||m||_\infty$ per $\epsilon \to 0$.
  (c) (**5 punti**) Dedurre che $||T|| = ||m||_\infty$.

(2) (**15 punti**) Sia $C^1[0,1]$ munito della norma $||u||_{C^1} = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ e $C[0,1]$ sia munito della norma $|| \cdot ||_\infty$.
Sia $I : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx$. Verificare che I ha grafico chiuso. E' continuo?

Soluzioni.

(1) (**15 punti**)

(a) La linearita' segue facilmente. Inoltre per ogni $u \in X$
$$||Tu||_2 \leq |||u||_2||m||_\infty,$$
da cui segue che T e' continuo con norma $||T|| \leq ||m||_\infty$.

(b) Supponiamo $M > 0$ (altrimenti segue facilmente che $||T|| = ||m||_\infty = 0$). Per ogni $\epsilon > 0$
$$||Tu_\epsilon||^2_{L^2} = \frac{1}{2\epsilon}\int_{\bar{x}-\epsilon}^{\bar{x}+\epsilon}(\frac{m(x)}{M})^2 \cdot (m(x))^2 dx = \frac{1}{M^2}\frac{1}{2\epsilon}\int_{\bar{x}-\epsilon}^{\bar{x}+\epsilon}(m(x))^4 dx \to \frac{M^4}{M^2} = M^2$$
per $\epsilon \to 0$ essendo m continua in $\bar{x}$.

(c) (**5 punti**) Si osservi che $||u_\epsilon||^2_{L^2} = \frac{1}{2\epsilon}\int_{\bar{x}-\epsilon}^{\bar{x}+\epsilon}(\frac{m(x)}{M})^2 dx \to 1$ per $\epsilon \to 0$. Quindi, usando la definizione di norma di un operatore, segue che
$$||T|| \geq \frac{||Tu_\epsilon||^2_{L^2}}{||u_\epsilon||^2_{L^2}} \to M = ||m||_\infty.$$

(2) (**15 punti**) Sia $u_n, u \in C^0[0,1]$ tale che $u_n \to u$ in $C[0,1]$ e $Iu_n \to v \in C^1[0,1]$. Proviamo che $v = Iu$. Poiche' $u_n \to u$ uniformente, si puo' passare al limite sotto in segno di integrale e quindi per ogni $t \in (0,1)$ vale che $v(t) = \lim_{n\to\infty} Iu_n(t) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t u_n(x)dx = \int_0^t u(x)dx$ ossia
$$v(t) = \int_0^t u(x)dx.$$
Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che per ogni $t \in (0,1)$ $v'(t) = u(t)$ ossia per ogni $t \in (0,1)$
$$I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx = \int_0^t v'(x)dx = v(t).$$
Infine I e' continuo per il teorema del grafico chiuso essendo $C[0,1]$ e $C^1[0,1]$ spazi di Banach con le norme considerta.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 25.01.2012

(1) (**15 punti**) Sia $X = l^2$ e sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosi' definiti:
$$F_n(x) = x_n$$
per ogni $x = (x_n)_{n\in N} \in X$.
   (a) Calcolare $||F_n||$;

   (b) Dimostrare che $F_n(x) \to 0$, per ogni $x \in X$ ma F_n non converge a zero in X'.

(2) (**15 punti**) Per ogni $u \in C^1[0,1]$ sia $||u|| = |u(0)| + ||u'||_\infty$.
   (a) Verificare che $\|\cdot\|$ e' una norma su $C^1[0,1]$ che rende lo spazio uno spazio di Banach.

   (b) Sia $C[0,1]$ munito della norma $||\cdot||_\infty$ e sia $I : C^1[0,1] \to C[0,1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = u'(t)$. Verificare che I ha grafico chiuso. E' continuo?

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 15.5.2012

(1) Sia $X = L^p(0,1)$ $(1 \leq p < +\infty)$ e sia $T : X \to X$ definito da $T(u)(t) = (1-t)u(t)$. Verificare che T e' ben posto, e' lineare, continuo e di norma 1.

(2) Sia $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare e continuo definito da

$$T_k(a) = \sum_{j=1}^{k} a_j b_j$$

dove $a = (a_n)_{n\geq 1}$.

(a) Calcolare la norma di T_k;

(b) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia limitata. Dimostrare che $(b_k)_k \in l^1$.

(3) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T_n : X \to Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $f \in Y'$ la successione $(f \circ T_n)_n$ sia limitata in X'. Dimostrare che la successione $(T_n)_n$ e' limitata in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Soluzioni

(1) Sia $u \in L^p(0,1)$, Allora $|T(u)|^p(t) = (1-t)^p|u(t)|^p \leq |u(t)|^p \in L^1(0,1)$ e quindi $|T(u)|^p$ (che e' una funzione misurabile) appartiene allo spazio $L^1(0,1)$, ossia $T(u) \in L^p(0,1)$. Quindi T e' ben posto. Inoltre

$$\|Tu\|_p \leq \|u\|_p$$

per ogni $u \in L^p(0,1)$, ossia $\|T\| \leq 1$. Per provare che $\|T\| = 1$ sia $u_n(x) = \sqrt[p]{n}\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. Allora

$$\|u_n\|_p = \sqrt[p]{n}(\int_0^{\frac{1}{n}} dt)^{\frac{1}{p}} = 1$$

e

$$\|Tu_n\|_p = \sqrt[p]{n}(\int_0^{\frac{1}{n}} (1-t)^p dt)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[p]{p+1}}(1-(1-\frac{1}{n})^{p+1})^{\frac{1}{p}}$$

$$\equiv \frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[p]{p+1}}\sqrt[p]{\frac{p+1}{n}} \to 1$$

quando $n \to \infty$.

(2) Per ogni $a \in X$ si ha che $|T_k(a)| \leq \|a\|_\infty \sum_{j=1}^k |b_j|$. Quindi

$$\|T_k\| \leq \sum_{j=1}^k |b_j|.$$

D'altra parte definito

$$a_h^k = \begin{cases} segno(b_h) = \frac{b_h}{|b_h|} & \text{se } b_h \neq 0 \quad h \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $\bar{a}_k := (a_h^k)_h$ si ha che $||\bar{a}_k||_\infty = 1$ e $T_k(\bar{a}_k) = \sum_{h=1}^k |b_h|$. Quindi

$$\|T_k\| \leq \sum_{j=1}^k |b_j|$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiche' c_0 e' chiuso rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ nello spazio l^∞ (che e' uno spazio di Banach) si ha che c_0 e' uno spazio di Banach. Essendo la famiglia di funzionali lineari e continui $(T_k)_k$ puntualmente limitata, per il Teorema di B.S., esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_k ||T_k|| = \sup_k \sum_{h=1}^k |b_h| \leq M.$$

Cio' implica che la serie $\sum_{h=1}^\infty |b_h|$ converge al $\sup_k ||T_k||$.

(3) Si osservi che $(T_n)_n$ e' limitata in $\mathcal{L}(X,Y)$
$\iff$ esiste $M \geq 0$ tale che $\sup_n ||T_n|| \leq M$
$\iff$ esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_n \sup_{x \in X,\ |x\|_X \leq 1} ||T_n(x)||_Y \leq M$$

$\iff$ l'insieme

$$B = \{T_n(x) :\ x \in X,\ |x\|_X \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$$

e' limitato in Y.

Da un corollario del teorema di B.S. sappiamo che un insieme B e' limitato in uno spazio di Banach Y se e solo se $f(B)$ e' limitato in $\mathbb{R}$ per ogni $f \in Y'$. Ora, nel nostro caso,

$$f(B) = \{f(T_n(x)) :\ x \in X,\ |x\|_X \leq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Essendo $(f \circ T_n)_n$ limitata in X', vale che esiste $C \geq 0$ tale che

$$\|f \circ T_n\|_{X'} \leq C$$

e quindi per ogni $x \in X,\ |x\|_X \leq 1$ vale che $|f(T_n(x))| \leq C$ da cui $f(B) \subset [-C, C]$.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 13.6.2012

Per il **compito totale**: svolgere almeno un esercizio a scelta tra (1) e (2). Ciascuno vale 15 punti.

Per il **secondo parziale**: limitandosi agli esercizi (2) e (3), svolgere al massimo 3 implicazioni con al piu' una "$a \Longrightarrow b$". Una implicazione corretta vale 12 punti, due valgono 24 punti, tre valgono 30.

(1) Sia X uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0,1] \to X$ un'applicazione tale che $f \circ \alpha \in C[0,1]$ per ogni $f \in X'$. Provare che
  (a) **(6 punti)** α e' limitata (ossia $\sup_{t\in[0,1]} ||\alpha(t)||_X \in \mathbb{R}$);
  (b) **(6 punti)** il funzionale $\psi : X' \to \mathbb{R}$ definito da
$$\psi(f) := \int_0^1 f \circ \alpha(t)dt$$
  e' lineare e continuo.
  (c) **(3 punti)** Se X e' uno spazio di Hilbert munito di prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$, dimostrare che esiste un unico $\bar{x} \in X$ tale
$$< \bar{x}, x >= \int_0^1 < x, \alpha(t) > dt \quad \forall x \in X.$$

(2) Siano $(X, \| \cdot \|_X), (Y, \| \cdot \|_Y)$ due spazi di Banach. Sia $T : X \to Y$ lineare e iniettivo, sia $Z = T(X)$ e sia
$$\|y\|_Z = \|y\|_Y + \|T^{-1}y\|_X.$$
Dimostrare che sono equivalenti le seguenti proprieta':

  (a) $T : (X, \| \cdot \|_X) \to (Y, \| \cdot \|_Y)$ e' continuo;

  (b) $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e' uno spazio di Banach e $T^{-1} : (Z, \|\cdot\|_Z) \to (X, \|\cdot\|_X)$ e' continuo.

(3) Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni
  (a) esiste $S : H \to H$ lineare tale che $(Sx, y) = (x, Ty)$
  (b) T é continuo.

Soluzioni

(1) (a) Sia $f \in X'$. Poiche' $f \circ \alpha \in C[0,1]$, per il teorema di Weirstrass esiste il $\max_{t\in[0,1]} |f(\alpha(t))| \in \mathbb{R}$. Applicando uno dei corollari al Teorema di Banach-Steinhaus (con $B = \{\alpha(t) : \ t \in [0,1]\}$) segue che B e' limitato ossia α e' limitata;

(b) facilmente si prova che il funzionale $\psi : X' \to \mathbb{R}$ e' lineare. Proviamo che e' continuo, ossia che esiste $C > 0$ tale che

$$|\psi(f)| \leq C||f||_{X'}$$

per ogni $f \in X'$. Sia $C = \sup_{t\in[0,1]} ||(\alpha(t))||_X (\in \mathbb{R})$ e $f \in X'$. Essendo f un funzionale lineare e continuo, si ha che

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f \circ \alpha(t)|dt \leq \int_0^1 ||f||_{X'}|\alpha(t)|dt \leq C||f||_{X'}.$$

(c) Si noti che $\psi \in X''$. Essendo X uno spazio di Hilbert, si ha che X e' riflessivo e pertanto esiste un unico $\bar{x} \in X$ tale che

$$\int_0^1 < f, \alpha(t) > dt = \psi(f) =< f, \bar{x} > \quad \forall f \in X'.$$

In particolare applicando tale uguaglianza sui funzionali del tipo $f_x(y) =< x, y >$ si ha che

$$\int_0^1 < f_x, \alpha(t) > dt =< f_x, \bar{x} > \quad \forall x \in X$$

ossia

$$\int_0^1 < x, \alpha(t) > dt =< x, \bar{x} > \quad \forall x \in X.$$

(2) "$\Longrightarrow$" Facilmente si prova che $\|\cdot\|_Z$ e' una norma. Proviamo che $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e' uno spazio di Banach. Sia $(z_n)_n \in Z$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_Z$. Allora, dalla definizione di tale norma, si ha che $(z_n)_n$ e' una successione di Cauchy in Y rispetto alla norma $\|\cdot\|_Y$ e $T^{-1}(z_n)$ e' una successione di Cauchy in X rispetto alla norma $\|\cdot\|_X$. Essendo tali spazi completi, si ha che esiste $z \in Y$ e $x \in X$ tali che

$$\|z_n - z\|_Y \to 0, \ \|T^{-1}(z_n) - x\|_X \to 0$$

per $n \to \infty$. Essendo $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ continuo, si ha che

$$\|T(T^{-1}(z_n)) - Tx\|_Y \to 0$$

ossia

$$\|z_n - Tx\|_Y \to 0.$$

Segue allora che $Tx = z$ ossia che $z \in T(X) = Z$ e $x = T^{-1}z$. In particolare

$$\begin{aligned}\|z_n - z\|_Z &= \|z_n - z\|_Y + \|T^{-1}(z_n) - T^{-1}z\|_X \\ &= \|z_n - z\|_Y + \|T^{-1}(z_n) - x\|_X \to 0\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e' uno spazio di Banach.

Proviamo ora che $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_Z)$ e' continuo: infatti essendo $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ continuo esiste $C > 0$ tale che

$$|T(x)|_Y \leq C|x|_X$$

e quindi

$$|T(x)|_Z = |T(x)|_Y + |x|_X \leq (C+1)|x|_X.$$

Applicando il teorema della mappa aperta a $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_Z)$ (che e' un operatore continuo tra spazi di Banach) segue che $T^{-1} : (Z, \|\cdot\|_Z) \to (X, \|\cdot\|_X)$ e' continuo.

"$\Longleftarrow$" Dimostriamo che $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ e' chiuso: sia $x_n \to 0$ in X e sia $Tx_n \to y$ in Y. Proviamo che $y = 0$. Per ipotesi $T^{-1} : (Z, \|\cdot\|_Z) \to (X, \|\cdot\|_X)$ e' continuo. Quindi applicando il teorema della mappa aperta segue che $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_Z)$ e' continuo. In particolare poiche' $x_n \to 0$ in X segue che

$$Tx_n \to 0$$

in Z ossia $|Tx_n|_Y + |x_n|_X \to 0$ in X. Dall'unicita' del limite cio' implica che $y = 0$.

(3) "$\Longrightarrow$" Essendo T lineare, per provare che e' continuo, dimostriamo che T e' chiuso: sia $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$. Allora

$$(z, Tx_n) = (Sz, x_n)$$

per ogni $z \in H$ da cui

$$(z, y) = (Sz, x) = (z, Tx)$$

per ogni $z \in H$. In particolare $y = Tx$.

"$\Longleftarrow$" Per ogni $y \in H$ sia $f_y : H \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$f_x(y) = (x, Ty).$$

E' facile provare che f_x e' lineare. Proviamo che e' continuo. Infatti, usando la disuaglianza di Cauchy-Schwartz e la continuita' di T si ha che

$$|f_x(y)| = |(x, Ty)| \leq |x||Ty| \leq |x| \cdot \|T\||y|.$$

Dal teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su uno spazio di Hilbert segue che esiste un elemento $Sx \in H$ tale che

$$(x, Ty) = f_x(y) = (Sx, y).$$

Proviamo che S e' lineare: per ogni $x, z \in H$ si ha che

$$(S(x+z), y) = (x+z, Ty)$$
$$= (x, Ty) + (z, Ty) = (Sx, y) + (Sz, y) = (Sx + Sz, y)$$

per ogni $y \in H$ ossia $S(x+z) = Sx + Sz$. (analogamente procedere per provare che $S(\lambda x) = \lambda S(x)$).

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 09.07.2012

(1) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

Provare che

(a) (**8 punti**) T e' continuo se e solo se T^* e' continuo;

(b) (**4 punti**) Dimostrare che se T e' continuo, allora

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = ||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')}.$$

(c) (**8 punti**) Dimostrare che se T e' continuo e biettivo, allora T^* e' continuo e biettivo.

(2) (**10 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che valga la seguente proprieta': se $(x_n)_n \subset [0, 1]$ e' convergente, allora per ogni $f \in X'$ la successione reale $f(\alpha(x_n))$ e' limitata. Provare che α e' limitata su $[0, 1]$.

Scritto totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 16.7.2012

(1) (**14 punti**) Siano $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Sia $T : X \to Y$ lineare, sia

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y.$$

Dimostrare che sono equivalenti le seguenti proprieta':

(a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ e' continuo;

(b) $(X, \|\cdot\|_T)$ e' uno spazio di Banach.

(2) Siano X, Y, Z spazi di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $K_n \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Provare che

(a) (**6 punti**) se $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in X$, allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e se $x'_n \to x'$ in X allora $T_n(x'_n) \to T(x')$;

(b) (**10 punti**) se $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in X$ e se $K_n(y) \to K(y)$ per ogni $y \in Y$ allora $K \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $K_n \circ T_n(x) \to K \circ T(x)$ per ogni $x \in X$.

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 17.9.2012

(1) (**15 punti**) Sia X spazio di Banach, $T_n : X \to X$ una famiglia di operatori lineari e continui e $\mathcal{D} \subset X$ un sottoinsieme denso tale che:

$$T_n x \to x \text{ per } n \to \infty, \ \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} < \infty$

(b) $T_n x \to x, \ \forall x \in X$

(2) (**15 punti**) Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Sia $T : X \to Y$ lineare, biettivo e sia

$$\|y\|_T = \|y\|_Y + \|T^{-1}y\|_X.$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ e' continuo;

(b) $(Y, \|\cdot\|_T)$ e' uno spazio di Banach e $T^{-1} : (Y, \|\cdot\|_T) \to (X, \|\cdot\|_X$ e' continuo.

Primo parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 11.1.2013

(1) Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ e sia $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia

$$T_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{k^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dimostrare che:

(a) (**2 punti**) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ allora $T_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in l^1$;

(b) (**4 punti**) l'operatore $T_k : l^p \to l^1$ e' lineare e continuo;

(c) (**4 punti**) per $p = 1$ si ha che

$$||T_k||_{\mathcal{L}(l^1,\ l^1)} = \frac{1}{k};$$

(d) (**4 punti**) per $p = +\infty$ si ha che

$$||T_k||_{\mathcal{L}(l^\infty,\ l^1)} = \frac{1}{k-1};$$

(e) (**4 punti**) per ogni $1 < p < \infty$ si ha che

$$||T_k||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} = \left(\frac{1}{k^{p'}-1}\right)^{\frac{1}{p'}};$$

(f) (**2 punti**) per $k \to \infty$ la successione di operatori $(T_k)_k$ tende a 0 in $\mathcal{L}(l^p,\ l^1)$.

(2) (**10 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $\alpha : X \to Y$ una funzione. Dimostrare che α ha immagine limitata se e solo se per ogni $f \in Y'$ si ha che $f \circ \alpha : X \to \mathbb{R}$ ha immagine limitata.

Soluzioni

(1) Osserviamo che per ogni $1 \leq p \leq \infty$ si ha che $(\frac{1}{k^n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$. Infatti basta provare che $(\frac{1}{k^n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ in quanto $l^1 \subset l^p$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}} - 1 = \frac{1}{k-1}$$

se e solo se

$$\frac{1}{k} < 1$$

e tale condizione e' soddisfatta in quanto $k \geq 2$. (In alternativa, se $1 \leq p < \infty$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{k^n})^p = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{k^p})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{k^p}} - 1 = \frac{1}{k^p - 1}$$

se e solo se

$$\frac{1}{k^p} < 1$$

ossia se $k^p > 1$, condizione soddisfatta in quanto $k \geq 2$. Se $p = \infty$ e $k \geq 2$ la successione $(\frac{1}{k^n})_n$ e' ovviamente limitata.) Cosi' se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, applicando la disuguaglianza di Holder, si ottiene che la successione $T_k(x) = (x_n \cdot \frac{1}{k^n}) \in l^1$. Inoltre banalmente si dimostra che l'operatore T_k e' lineare e, applicando la disuguaglianza di Holder, si ha che

- se $1 < p \leq \infty$

$$||T_k(x)||_1 \leq ||(\frac{1}{k^n})_n||_{p'} \cdot ||x||_p = (\frac{1}{k^{p'} - 1})^{\frac{1}{p'}} ||x||_p$$

- se $p = 1$

$$||T_k(x)||_1 \leq ||(\frac{1}{k^n})_n||_\infty \cdot ||x||_1 = \frac{1}{k} \cdot ||x||_1$$

Quindi l'operatore $T_k : l^p \to l^1$ e' lineare e continuo e

- per $p = 1$

$$||T_k||_{\mathcal{L}(l^1,\ l^1)} \leq \frac{1}{k}$$

- per ogni $1 < p \leq \infty$

$$||T_k||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \leq \left(\frac{1}{k^{p'} - 1}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

In particolare per $k \to \infty$ la successione di operatori $(T_k)_k$ tende a 0 in $\mathcal{L}(l^p,\ l^1)$. Infine

$$||T_k||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} = \sup_{x\in l^p\setminus\{0\}} \frac{||T_k(x)||_1}{||x||_p} = \sup_{x\in l^p\setminus\{0\}} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{k^n}}{||x||_p} \geq \sup_{x\in l^p\setminus\{0\}} \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k^n}|}{||x||_p}$$

$$= ||(\frac{1}{k^n})_n||_{p'} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } p = 1 \\ (\frac{1}{k^{p'}-1})^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty. \end{cases}$$

(2) La funzione α ha immagine limitata in Y se e solo se l'insieme

$$\alpha(X) := \{\alpha(x) : \quad x \in X\}$$

e' limitato in Y. Da un corollario al teorema di Banach-Steinhaus questo e' equivalente a richiedere che per ogni $f \in Y'$ l'insieme $f(\alpha(X))$ sia limitato in $\mathbb{R}$ ossia che per ogni $f \in Y'$ la funzione $f \circ \alpha : X \to \mathbb{R}$ abbia immagine limitata.

Secondo parziale di di Analisi Funzionale

Ferrara, 22.1.2013

(1) (**14 punti**) Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $T : X \to \mathbb{R}$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti
   (a) $T \in X'$;
   (b) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$

$$x_n \rightharpoonup x \implies (Tx_n)_n \text{ limitata in } \mathbb{R}.$$

(2) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach e Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cap Z = \{0_X\}$. Si consideri su $Y \times Z$ la norma

$$||(y,z)|| = |y|_X + |z|_X$$

e su $Y + Z$ la norma $|\cdot|_X$. Sia $I : Y \times Z \to Y + Z$ il funzionale definito da

$$I(y,z) = y + z.$$

Provare che
   (a) (**4 punti**) I e' continua e iniettiva;
   (b) (**12 punti**) I^{-1} e' continua se e solo se $Y + Z$ e' chiuso in X.

Esame scritto di di Analisi Funzionale

Ferrara, 22.1.2013

(1) (**7 punti**) Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $T : X \to \mathbb{R}$ lineare tale che se $(x_n)_n$ e' debolmente convergente in X allora $(Tx_n)_n$ e' limitata in $\mathbb{R}$. Provare che $T \in X'$.

(2) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach e Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cap Z = \{0_X\}$. Si consideri su $Y \times Z$ la norma

$$|(y, z)| = |y|_X + |z|_X$$

e su $Y + Z$ la norma indotta da X. Sia $I : Y \times Z \to Y + Z$ definita da

$$I(y, z) = y + z.$$

Provare che

(a) (**2 punti**) I e' continua e iniettiva;

(b) (**6 punti**) I^{-1} e' continua se e solo se $Y + Z$ e' chiuso in X.

(3) (**15 punti**) Sia $X = l^p$ con $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $\{x_n\}_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = \sum_{n=1}^{k} x_n a_n \ \forall a \in X.$$

(a) Provare che se $1 < p \leq +\infty$ allora T_k e' un funzionale lineare e continuo con

$$||T_k|| = (\sum_{n=1}^{k} |x_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}};$$

(b) provare che se $p = 1$ allora T_k e' un funzionale lineare e continuo con

$$||T_k|| = \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n|.$$

(c) Supponendo che per ogni $a \in X$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ abbia limite finito si provi che la successione $\{x_n\}_n \in l^{p'}$.

Soluzioni

(1) "$\Longrightarrow$" Supponiamo che $T \in X'$ e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione debolmente convergente. Allora e' noto (vedere Proposizione III.5 (iii) del Brezis) che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e' limitata in X ossia esiste M tale che $||x_n|| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare

$$|T(x_n)| \le ||T|| \cdot ||x_n|| \le ||T||M$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ ossia la successione $(T(x_n))_n$ e' limitata in $\mathbb{R}$.

"$\Longleftarrow$" Per assurdo T non sia continuo. Allora

$$\sup_{x\in X,\ \|x\|=1} |T(x)| = +\infty.$$

Quindi esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ e

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = +\infty.$$

Essendo X uno spazio di Banach riflessivo, grazie al Teorema III.27 del Brezis, esiste una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ estratta da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che e' debolmente convergente in X. Allora la successione $T(x_{k_n})$ dovrebbe essere limitata. Assurdo.

(2) (a) Intanto e' facile provare che $||(\cdot,\cdot)||$ e' una norma su $Y \times Z$. Inoltre essendo Y, Z sottospazi chiusi e' facile provare che $Y \times Z$ e' uno spazio di Banach. Infatti se $\{(y_n, z_n)\}_n$ e' una successione di Cauchy in $Y \times Z$ rispetto alla norma $||(\cdot,\cdot)||$, facilmente si verifica che le successioni $\{y_n\}_n$ e $\{z_n\}_n$ sono successioni di Cauchy in X. Quindi esiste $y_0, z_0 \in X$ tali che $|y_n - y_0|_X \to 0$ e $|z_n - z_0|_X \to 0$. Poiche' Y, Z sono chiusi, segue che $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$. In particolare

$$||(y_n, z_n) - (y_0, z_0)|| = |y_n - y_0|_X + |z_n - z_0|_X \to 0.$$

Poi

- I e' iniettivo: infatti se $I(y_1, z_1) = I(y_2, z_2)$ allora $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ da cui $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in Y \cap Z = \{0_X\}$. Quindi $y_1 - y_2 = 0_X = z_2 - z_1$ ossia $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.
- I e' continuo: infatti I e' lineare (facile da verificare) e

$$|I(y, z)|_X = |y + z|_X \le |y|_X + |z|_X = ||(y, z)||.$$

(b) "$\Longleftarrow$" Osserviamo che I e' suriettivo: infatti se $w \in Y + Z$ allora esistono $y \in Y, z \in Z$ tali che $w = y + z$. In particolare $I(y, z) = w$. Se $Y + Z$ e' chiuso in X allora I e' un'applicazione continua e biettiva tra spazi di Banach e quindi ha inversa continua.

"$\Longrightarrow$" Essendo $I^{-1} : Y + Z \to Y \times Z$ continua, esiste $C > 0$ tale che

$$|y|_X + |z|_X = ||(y, z)|| = ||I^{-1}(y + z)|| \le C|y + z|_X \tag{1}$$

per ogni $(y, z) \in Y \times Z$.

Se $(y_n + z_n)_n \subset Y + Z$ e' tale che $|y_n + z_n - w_0|_X \to 0$, allora, grazie a (1), le successioni $(y_n)_n$ e $(z_n)_n$ risultano essere successioni di Cauchy in X. Quindi esistono $y_0, z_0 \in X$ tali che $|y_n - y_0|_X \to 0$ e $|z_n - z_0|_X \to 0$. Poiche' Y, Z sono chiusi, segue che $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$. Inoltre $|y_n + z_n - y_0 - z_0|_X \leq |y_n - y_0|_X + |z_n - z_0|_X$ e quindi $y_n + z_n \to y_0 + z_0$ in X e per l'unicita' del limite $y_0 + z_0 = w_0$.

(3) Sia

$$y_k = \begin{cases} x_n & \text{se } n \leq k, \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $y_k \in l^p$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ e quindi dal teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su l^p segue che il funzionale T_k e' un funzionale lineare e continuo con

$$||T_k|| = ||T_{y_k}|| = (\sum_{n=1}^{k} |x_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

se $1 < p \leq +\infty$ e

$$||T_k|| = \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n|$$

se $p = 1$.

Se per ogni $a \in X$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ ha limite finito allora da un corollario al teorema di Banach Steinhaus si ha che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} ||T_k|| \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\sum_{n=1}^{k} |x_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \in \mathbb{R}$$

se $1 < p \leq +\infty$ e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{1 \leq n \leq k} |x_n|$$

se $p = 1$.

Segue quindi che la successione $\{x_n\}_n \in l^{p'}$.

Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 28 maggio 2013

(1) (**15 punti**) Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:
 (a) $T : (X, \ \|\cdot\|_X) \to (X', \ \|\cdot\|_{X'})$ continuo;

 (b) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e per ogni $x \in X$
$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \overset{*}{\rightharpoonup} Tx.$$

(2) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $X = l^p \times l^{p'}$ dotato della norma $||(x,y)||_X := ||x||_p + ||y||_{p'}$ per ogni $(x,y) \in X$. Sia $T : (X, ||\cdot||_X) \to \mathbb{R}$ definito da
$$T(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{2^n}$$
per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$. Dimostrare che:
 (a) (**6 punti**) T e' un operatore ben posto, lineare e continuo;
 (b) (**5 punti**) per $p \notin \{1, +\infty\}$ si ha che
$$||T||_{X'} = \max\left\{ \left(\frac{1}{2^{p'}-1}\right)^{\frac{1}{p'}}; \left(\frac{1}{2^{p}-1}\right)^{\frac{1}{p}} \right\};$$
 (c) (**4 punti**) per $p \in \{1, +\infty\}$ si ha che
$$||T||_{X'} = 1.$$

(Per la risoluzione del primo esercizio si osservi che per se T e' continuo forte forte, allora e' continuo debole debole. Poiche' la topologia debole* e' meno fine della topologia debole, abbiamo che T e' continuo debole debole *. In particolare é sequenzialmente continuo.)

Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 25 giugno 2013

(1) (**20 punti**) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$.

Provare i seguenti fatti:

(a) per ogni $x \in X$ vale che $T_x \in X''$ e $||T_x||_{X''} = |x|_X$;

(b) per ogni $x, y \in X$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$;

(c) provare che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ se $x_n \to x_0$ in X allora $T_{x_n} \to T_{x_0}$ in X'';

(d) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e' tale che $\sup_n |T_{x_n}(f)| < +\infty$ per ogni $f \in X'$ allora (x_n) e' limitata in X;

(e) se f_n converge a f debole* in X' allora $T_x(f_n) \to T_x(f)$ per ogni $x \in X$.

(2) **(10 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia T l'operatore definito da

$$T(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{na}$$

per ogni $y = (y_n)_n \in l^2$. Dimostrare che T e' un operatore lineare e continuo con

$$||T||_{X'} = \sqrt{\frac{e^{2a}}{1 - e^{2a}}}$$

se e solo se $a < 0$.

(1) (a) Fissiamo $x \in X$. Per ogni $f, g \in X'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ vale che

$$T_x(af + bg) = (af + bg)(x) = af(x) + bg(x) = aT_x f + bT_x g$$

ossia T_x e' un operatore lineare. Inoltre da un corollario al Teorema di Hahn Banach vale che

$$\sup_{f \in X', ||f||_{X'} \leq 1} |f(x)| = ||x||_X$$

ossia

$$\sup_{f \in X', ||f||_{X'} \leq 1} |T_x(f)| = ||x||_X.$$

Questo implica che $T_x \in (X')' = X''$ e $||T_x||_{X''} = |x|_X$;

(b) Fissiamo $x, y \in X$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $f \in X'$ vale che

$$T_{ax+by}(f) = f(ax + by) = af(x) + bf(y) = aT_x(f) + bT_y(f);$$

quindi $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$.

(c) sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una successione tale che $x_n \to x_0$ in X. Allora applicando rispettivamente il punto (b) e poi il punto (a) segue che

$$||T_{x_n} - T_{x_0}||_{X''} = ||T_{x_n - x_0}||_{X''} = ||x_n - x_0||_X.$$

Quindi $T_{x_n} - T_{x_0} \to 0$ in X'.

(d) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tale che $\sup_n |T_{x_n}(f)| < +\infty$ per ogni $f \in X'$. Allora dal teorema di Banach Steinhaus (applicato sullo spazio X') segue che

$$\sup_n ||T_{x_n}||_{X''} < +\infty$$

e quindi, grazie alla proprieta' (a) segue che

$$\sup_n ||x_n||_X < +\infty$$

ossia (x_n) e' limitata in X;

(e) Sia f_n convergente debole* in X' a f. Allora $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$ ossia $T_x(f_n) \to T_x(f)$ per ogni $x \in X$.

(2)

(3) Sia $a \in \mathbb{R}$. Dal teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^2 si ha che T e' un operatore lineare e continuo su l^2 se e solo se la successione $(e^{na})_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ ossia se da

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2na} < +\infty.$$

Essendo questa una serie geometrica, converge se e solo se $|e^{2a}| < 1$ ossia se e solo se $a < 0$. Inoltre la norma di T coincide con la norma in l^2 della successione $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ da cui

$$||T||_{X'} = \sqrt{\frac{1}{1-e^{2a}} - 1} = \sqrt{\frac{e^{2a}}{1-e^{2a}}}.$$

Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 18 luglio 2013

(1) (**15 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e $T : X \to Y$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) $T : (X, \; \|\cdot\|_X) \to (Y, \; \|\cdot\|_Y)$ continuo;

(b) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e per ogni $x \in X$, se $x_n \rightharpoonup x$ in X allora $Tx_n \rightharpoonup Tx$ in Y.

(2) (**15 punti**) Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\}$. Per ogni $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ sia

$$T_x(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n (\sin x)^n.$$

Dimostrare che $T_x \in (l^2)'$ e che

$$||T_x||_{(l^2)'} = |\tan x|.$$

Esame Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 10.10.2013

(1) Per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia
$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Dimostrare che:
  (a) (**2 punti**) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ allora $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in l^1$;
  (b) (**6 punti**) per ogni $1 \le p \le +\infty$ l'operatore $T : l^p \to l^1$ e' ben posto, e' lineare e continuo;
  (c) (**10 punti**) per ogni $1 \le p \le +\infty$ si ha che
$$||T||_{\mathcal{L}(l^p,\, l^1)} \in [1, e].$$

(2) (**12 punti**) Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach.
Provare i seguenti fatti:

  (a) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_n \subset X$ sono tali che $|x_n - y_n|_X \to 0$ e $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $y_n \rightharpoonup x_0$ in X;

  (b) se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_n \subset X'$ sono tali che $|f_n - g_n|'_X \to 0$ e $f_n \overset{w*}{\rightharpoonup} f_0$ in X' allora $g_n \overset{w*}{\rightharpoonup} f_0$ in X'.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 26.11.2013

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T : l^p \to l^p$ cosí definito:

$$(T(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ \\ x_k + x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$.

(a) (**5 punti**) Dimostrare che l'operatore T e' lineare e continuo con
$$||T||_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 2;$$

(b) (**5 punti**) calcolare $T(e_n)$ e $T(f_n)$ dove $e_n = (\delta^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f_n = e_n + e_{2n}$. Dedurre che per $p = 1$ e per $p = +\infty$
$$||T||_{\mathcal{L}(l^p)} = 2;$$

(c) (**3 punti**) dimostrare che per ogni $k \geq n+1$ si ha che
$$||T(\sum_{i=1}^{k} e_i)||_{l^p} = \big(2^p(k-n) + 2n\big)^{\frac{1}{p}};$$

(d) (**4 punti**) usando la (c) calcolare la $||T||_{\mathcal{L}(l^p)}$ per $1 < p < \infty$.

(2) (**5+8 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato, $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazio di Banach e $T : X \to Y$ lineare. Provare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) T e' continuo;

(b) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ limitata (in X) e $\forall f \in Y'$ vale che $(f(T(x_n))_n$ e' limitata in $\mathbb{R}$.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 16.01.2014

Primo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

(a) (**P: 15 punti, T: 12 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \to l^p$ cosí definito:

$$(T_n(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ \\ x_k + \frac{1}{n} x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$.

(i) (**P: 4 punti, T: 3 punti**) Dimostrare che l'operatore T_n è lineare e continuo con $||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$;

(ii) (**P: 4 punti, T: 3 punti**) dimostrare che per $n \to \infty$ vale che $||T_n - I||_{\mathcal{L}(l^p)} \to 0$ dove $I : l^p \to l^p$ è l'operatore identita';

(iii) (**P: 3 punti, T: 2 punti**) calcolare $T_n(e_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ e per $p = 1$ dimostrare che $||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}$;

(iv) (**P: 4 punti, T: 4 punti**) per ogni $k \geq n+1$ calcolare

$$||T_n(\sum_{i=1}^{k} e_i)||_{l^p}^p = (1 + \frac{1}{n})^p k - n\big((1 + \frac{1}{n})^p - 1 - \frac{1}{n^p}\big);$$

al fine di dedurre che per ogni $1 < p < \infty$

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

(b) (**P: 15 punti, T: 7 punti**) Sia X uno spazio di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X \to X$ lineare e continuo tale che $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre sia $T : X \to X$ un operatore lineare tale che $T_n \circ T : X \to X$ sia continuo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

(i) (**4 punti**) $\sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;

(ii) (**5 punti**) $\sup_n ||T_n \circ T||_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;

(iii) (**6 punti**) T è continuo.

(c) (**T: 4 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua tale che $T(X)$ sia chiuso e $T(B_X)$ sia compatto (in Y). Dimostrare che $T(X)$ ha dimensione finita.

(d) (**T: 7 punti**) Sia E uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n \subseteq E$ e $x_0 \in E$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:
   (i) $(x_n)_n$ è debolmente convergente a x_0 in E;
   (ii) $(x_n)_n$ è limitata in E e l'insieme
$$V := \{f \in E' : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\}$$
   è un sottospazio denso di E'.

Secondo parziale (P) e scritto totale (T) di Analisi Funzionale

(a) (**P: 11 punti**) Sia E spazio di Banach riflessivo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in K_n$ dove (K_n) e' una successione di sottoinsiemi convessi chiusi di E tali che
 (i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
 (ii) $K_1 = \{x \in E : \ ||x|| \leq 1\}$.
Provare che esiste una sottosuccessione (x_{k_n}) estratta da (x_n) convergente debolmente in E ad un punto $x_0 \in \cap_n K_n$.
(In alternativa si provi che $\cap_n K_n \neq \emptyset$ (**P: 9 punti**)).

(b) (**P: 15 punti, T: 7 punti**) Sia E uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n \subseteq E$ e $x_0 \in E$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:
 (i) $(x_n)_n$ e' debolmente convergente a x_0 in E;
 (ii) $(x_n)_n$ e' limitata in E e l'insieme

$$V := \{f \in E' : \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\}$$

 e' un sottospazio denso di E'.

(c) (**P, T: 4 punti**) Siano $X, Y,$ due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e continuo tale che $T(X)$ sia chiuso e $T(B_X)$ sia compatto (in Y). Provare che $T(X)$ e' uno spazio vettoriale di dimensione finita.

(d) (**T: 12 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \to l^p$ cosí definito:

$$(T_n(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ \\ x_k + \frac{1}{n} x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$.
 (i) (**3 punti**) Dimostrare che l'operatore T_n e' lineare e continuo con $||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$;
 (ii) (**3 punti**) dimostrare che per $n \to \infty$ vale che $||T_n - I||_{\mathcal{L}(l^p)} \to 0$ dove $I : l^p \to l^p$ e' l'operatore identita';
 (iii) (**2 punti**) calcolare $T_n(e_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ e per $p = 1$ dimostrare che

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n};$$

 (iv) (**4 punti**) per ogni $k \geq n+1$ calcolare $||T_n(\sum_{i=1}^k e_i)||_{l^p}^p$ al fine di dedurre che per ogni $1 < p < \infty$

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

(e) (**T: 7 punti**) Sia X uno spazio di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X \to X$ lineare e continuo tali che $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre sia $T : X \to X$ un operatore lineare tale che $T_n \circ T : X \to X$ sia continuo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che
   (i) (**2 punti**) $\sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;
   (ii) (**2 punti**) $\sup_n ||T_n \circ T||_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;
   (iii) (**3 punti**) T e' continuo.

Esame scritto di Analisi Funzionale

(a) (**12 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \to l^p$ cosí definito:

$$(T_n(x))_k := \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ \\ x_k + \frac{1}{n}x_{k-n} & \text{se } k \geq n+1 \end{cases}$$

per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$.

(i) (**3 punti**) Dimostrare che l'operatore T_n e' lineare e continuo con
$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n};$$

(ii) (**3 punti**) dimostrare che per $n \to \infty$ vale che $||T_n - I||_{\mathcal{L}(l^p)} \to 0$ dove $I : l^p \to l^p$ e' l'operatore identita';

(iii) (**2 punti**) calcolare $T_n(e_n)$ dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ e per $p = 1$ dimostrare che
$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n};$$

(iv) (**4 punti**) per ogni $k \geq n+1$ calcolare $||T_n(\sum_{i=1}^k e_i)||_{l^p}^p$ al fine di dedurre che per ogni $1 < p < \infty$
$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

(b) (**7 punti**) Sia X uno spazio di Banach e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X \to X$ lineare e continuo tale che $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre sia $T : X \to X$ un operatore lineare tale che $T_n \circ T : X \to X$ sia continuo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

(i) (**2 punti**) $\sup_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;

(ii) (**2 punti**) $\sup_n ||T_n \circ T||_{\mathcal{L}(X)} \in \mathbb{R}$;

(iii) (**3 punti**) T e' continuo.

(c) (**4 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua tale che $T(X)$ sia chiuso e $T(B_X)$ sia compatto (in Y). Dimostrare che $T(X)$ ha dimensione finita.

(d) (**7 punti**) Sia E uno spazio di Banach e sia $(x_n)_n \subseteq E$ e $x_0 \in E$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $(x_n)_n$ e' debolmente convergente a x_0 in E;

(ii) $(x_n)_n$ e' limitata in E e l'insieme
$$V := \{f \in E' : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\}$$
e' un sottospazio denso di E'.

Soluzione

Esercizio 1.
Osserviamo preliminarmente che, per l'ipotesi di monotonia sulla successione $(K_n)_n$, se $x_n \in K_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ allora in particolare $x_m \in K_n\ \forall m \geq n$. Poichè $(x_n)_n \subseteq K_1$ che è limitato, si ha che la successione $(x_n)_n$ è limitata. Dalla riflessività di E segue che $\exists (x_{k_n}) \subseteq (x_n)$, $\exists x_0 \in E$ tali che $x_{k_n} \rightharpoonup x_0$. Dalla monotonia degli indici della sottosuccessione sappiamo che $k_m \geq m$, quindi, grazie all'osservazione iniziale, si ha che $x_{k_m} \in K_n\ \forall m \geq n$. In particolare x_0 appartiene alla chiusura debole di K_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora, K_n è convesso e chiuso forte, quindi K_n è chiuso anche rispetto la topologia debole. In particolare $x_0 \in K_n\ \forall n$ e quindi $x_0 \in \cap_n K_n$.

Esercizio 2.
$(a) \implies (b)$. Per ipotesi assumiamo che $x_n \rightharpoonup x_0$. Dalle proprietà della convergenza debole segue immediatamente che $(x_n)_n$ è limitata (prima tesi) e che $\forall f \in E'\ f(x_n) \to f(x_0)$; questo implica che l'insieme V coincide con tutto E' e pertanto è denso in esso.
$(b) \implies (a)$. Per le proprietà della convergenza debole, provare che $x_n \rightharpoonup x_0$ è equivalente a provare che $\forall f \in E'\ f(x_n) \to f(x_0)$. Siano dunque $f \in E'$, $\varepsilon > 0$, $f_0 \in V$ tali che $\|f - f_0\| < \varepsilon$ (una siffatta f_0 esiste per la densità di V in E') e sia $\boxed{M = \sup_n ||x_n|| < +\infty}$ poichè $(x_n)_n$ è limitata per ipotesi).

$$
\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x_0)| &\leq |f(x_n) - f_0(x_n)| + |f_0(x_n) - f_0(x_0)| + |f_0(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq \|f - f_0\|(\|x_n\| + \|x_0\|) + |f_0(x_n) - f_0(x_0)| \\
&< \varepsilon\,(M + \|x_0\|) + |f_0(x_n) - f_0(x_0)|.
\end{aligned}
$$

Passando al lim sup per $n \to \infty$, e ricordando che $f_0 \in V$, si ottiene che

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon\,(M + \|x_0\|).$$

Per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| \leq 0$$

da cui $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$.

Esercizio 3.
$T(X)$ chiuso $\subseteq Y$ Banach $\implies T(X)$ Banach. Allora la restrizione $T : X \to T(X)$ è lineare, continuo e suriettivo. Dal teorema della mappa aperta segue allora che $\exists\, c > 0$ tale che

$$B_Y = \{y \in T(X) |\, \|y\| \leq c\} \subseteq T(B_X).$$

Pertanto B_Y chiuso $\subseteq T(B_X)$ compatto $\implies B_Y$ compatto. Dal lemma di Riesz $T(X)$ ha dimensione finita.

Esercizio 4.
(a) Esplicitando $T_n(x)$ dalla definizione si ottiene:

$$T_n(x) = \left(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + \frac{1}{n}x_1, x_{n+2} + \frac{1}{n}x_2, \dots \right)$$
$$= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} + \dots) + \frac{1}{n}\left(0, \dots, 0, \overbrace{x_1}^{n-\text{esimo posto}}, x_2, \dots\right)$$
$$= x + \frac{1}{n}(0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots) \tag{2}$$

da cui

$$\|T_n(x)\|_{\ell^p} \le \|x\|_{\ell^p} + \frac{1}{n}\|(0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)\|_{\ell^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\|x\|_{\ell^p}.$$

Pertanto $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \le 1 + \frac{1}{n}$.
(b) Utilizzando (3) abbiamo che $T_n(x) - I(x) = \frac{1}{n}(0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ e dunque

$$\|(T_n - I)(x)\|_{\ell^p} = \frac{\|x\|_{\ell^p}}{n} \implies \|T_n - I\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(c) Essendo $e_n = (\delta_{n,k})$, si ha $\|e_n\|_{\ell^p} = 1\ \forall p$ e dalla definizione di T_n segue

$$T_n(e_n) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{n-\text{esimo}\\ \text{posto}}}, 0 \dots, 0. \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{2n-\text{esimo}\\ \text{posto}}}, 0, \dots)$$

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} \ge \|T_n(e_n)\|_{\ell^1} = 1 + \frac{1}{n} \implies \|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} = 1 + \frac{1}{n}$$

(d) Per ogni $1 < p < \infty$

$$\left\| T_n\left(\sum_{i=1}^k e_i\right)\right\|_{\ell^p}^p = k\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 - \frac{1}{n^p}\right]$$

Quindi

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \ge \frac{\left\|T_n\left(\sum_{i=1}^k e_i\right)\right\|_{\ell^p}^p}{\left\|\sum_{i=1}^k e_i\right\|_{\ell^p}} \sim \frac{\sqrt[p]{k\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}}{\sqrt[p]{k}} = 1 + \frac{1}{n}$$

Esercizio 5.
(a) Per ipotesi T_n converge puntualmente pertanto $\forall x\ \sup_n \|T_n(x)\| \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Banach Steinhaus segue che $\sup_n \|T_n\| \in \mathbb{R}$.
(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n \circ T)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\underbrace{T(x)}_{\in X}) \stackrel{\text{def}}{=} T(x)\ \forall x$, ovvero $T_n \circ T$

converge puntualmente. Quindi $\forall x \ \sup_n \|(T_n \circ T)(x)\| \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Bancah Steinhaus segue che $\sup_n \|T_n \circ T\| \in \mathbb{R}$.
(c)

$$\left.\begin{array}{l} T_n \circ T \xrightarrow[n\to\infty]{\text{puntualmente}} T \\ T_n \circ T \text{ continuo per ipotesi} \end{array}\right\} \stackrel{\text{Cor BS}}{\Longrightarrow} T \text{ continuo.}$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 4.02.2014

Secondo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

(1) (**T: 12 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : l^p \to l^p$ cosí definito:
$$T_n(x) := (x_k + \frac{x_{k+1}}{n})_{k\in\mathbb{N}}$$
per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$.
  (a) (**3 punti**) Dimostrare che l'operatore T_n é lineare e continuo con $||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$;

  (b) (**3 punti**) dimostrare che per $n \to \infty$ vale che $||T_n - I||_{\mathcal{L}(l^p)} \to 0$ dove $I : l^p \to l^p$ é l'operatore identita';

  (c) (**2 punti**) dimostrare che $||T_n||_{\mathcal{L}(l^\infty)} = 1 + \frac{1}{n}$;

  (d) (**4 punti**) per ogni $k \geq n + 1$ calcolare
$$||T_n(\sum_{i=1}^{k} e_i)||^p_{l^p}$$
dove $e_n = (\delta^n_k)_k$ al fine di dedurre che per ogni $1 \leq p < \infty$
$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

(2) (**P: 18 punti, T: 12 punti**) Sia X uno spazio di Banach e siano $Y, Z \subset$ sottospazi di X tali che
- $Y \cap Z = \emptyset$
- per ogni $x \in X$ esiste $y \in Y$ e $z \in Z$ tale che $x = y + z$.

Provare che
  (a) (**P: 3 punti, T: 2 punti**) per ogni $x \in X$ esiste un unico $y(=: Px) \in Y$ ed un unico $z \in Z$ tale che $x = y + z$.
  (b) (**P: 3 punti, T: 2 punti**) l'applicazione lineare $P : X \to Y$ é tale che $KerP = Z$ e $ImP = Y$;
  (c) (**P: 12 punti, T: 8 punti**) $P : X \to Y$ é continua se e solo se Y e Z sono chiusi in X.

(3) (**P: 12 punti, T: 6 punti**) Sia E uno spazio di Banach e sia $(f_n)_n \subseteq E$ e $f_0 \in E'$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti:
  (a) $(f_n)_n$ é debolmente* convergente a f_0 in E';
  (b) $(f_n)_n$ e' limitata in E' e l'insieme
$$V := \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)\}$$
e' un sottospazio denso di E.

Correzione prova scritta di Analisi Funzionale 04.02.2014

Esercizio 1.

(a) Esplicitando $T_n(x)$ dalla definizione si ottiene:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \left(x_1 + \frac{x_2}{n}, x_2 + \frac{x_3}{n}, x_3 + \frac{x_4}{n}, \dots\right) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + \frac{1}{n}(x_2, x_3, x_4, \dots) \\ &= x + \frac{1}{n}(x_2, x_3, x_4, \dots) \end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$\|T_n(x)\|_{\ell^p} \le \|x\|_{\ell^p} + \frac{1}{n}\|x\|_{\ell^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\|x\|_{\ell^p}.$$

Pertanto $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \le 1 + \frac{1}{n}$.

(b) Utilizzando (3) abbiamo che $T_n(x) - I(x) = \frac{1}{n}(x_2, x_3, x_4, \dots)$ e dunque

$$\|(T_n - I)(x)\|_{\ell^p} \le \frac{\|x\|_{\ell^p}}{n}$$

che implica che

$$\|T_n - I\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(c) Consideriamo $v = e_1 + e_2 = (1, 1, 0, \dots)$; abbiamo $\|v\|_{\ell^\infty} = \sup_k |v_k| = 1$ e, dalla definizione di T_n,

$$T_n(v) = (1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{0}{n}, 0 \dots) = (1 + \frac{1}{n}, 1, 0, \dots).$$

Per cui

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} \ge \|T_n(v)\|_{\ell^\infty} = \sup_k |(T_n v)_k| = 1 + \frac{1}{n}$$

Mettendo insieme a quanto provato nel punto (a), otteniamo che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} = 1 + \frac{1}{n}$$

(d) $\sum_{i=1}^m e_i = e_1 + e_2 + \dots + e_m = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m}, 0, \dots)$. Per ogni $1 < p < \infty$

$$\left\|\sum_{i=1}^k e_i\right\|_{\ell^p}^p = m, \quad T_n\left(\sum_{i=1}^k e_i\right) = (\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{m-1}, 1, 0, \dots)$$

$$\left\|T_n\left(\sum_{i=1}^k e_i\right)\right\|_{\ell^p}^p = (m-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p + 1$$

Quindi

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \geq \frac{\left\|T_n\left(\sum_{i=1}^k e_i\right)\right\|_{\ell^p}^p}{\left\|\sum_{i=1}^k e_i\right\|_{\ell^p}} \sim \frac{\sqrt[p]{m\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}}{\sqrt[p]{m}} = 1 + \frac{1}{n}$$

Mettendo insieme a quanto provato nel punto (a), otteniamo che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Esercizio 2.
(a) Per dimostrare l'unicitá supponiamo che esistano $y_1, y_2 \in Y$ e $z_1, z_2 \in Z$ tali che $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$. Allora $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ da cui si ha

$$\begin{array}{l} y_1 - y_2 \in Y \cap Z = \{0\} \\ z_2 - z_1 \in Y \cap Z = \{0\} \end{array} \implies \begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{array}$$

(b) $\ker(P) = \{x \in X | P(x) =: y = 0\} = \{x \in X | x = 0 + z,\ z \in Z\} = \{x \in X | x \in Z\} = Z$. Per dimostrare che $\mathrm{Im}(P) = Y$ dimostriamo che $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ tale che $y = Px$. Sia dunque $y \in Y$. Considerando l'elemento $x = y + 0 = y$, si ha che $y = Px = P(y + 0) = Py$. Infine segue che $(P \circ P)(x) = P(P(x)) = Py = y = Px$, cioè $P \circ P = P$.
(c) Supponiamo dapprima che Y e Z siano chiusi; poiché contenuti in uno spazio di Banach, saranno anch'essi spazi di Banach. Dal teorema del grafico chiuso segue che dimostrare la continuità di P è equivalente a provare che P ha grafico chiuso. Siano pertanto $x_n \in X$ e $w \in Y$ tali che $x_n \to 0$ in X e $Px_n \to w$ in Y. Dobbiamo dimostrare che $w = 0$. Dal punto (a) esistono $y_n \in Y$ e $z_n \in Z$ tali che $x_n = y_n + z_n$. Poiché $Px_n = y_n$ segue che

$$x_n - Px_n = y_n + z_n - y_n = z_n \in Z \tag{4}$$

$\boxed{\text{Passando al limite per } n \to \infty}$ in (4) otteniamo che la successione (z_n) tende a w. Poiché Z è chiuso e $(z_n) \subset Z$ si ha che $w \in Y \cap Z = \{0\}$ da cui la tesi. Viceversa supponiamo che $P : X \to Y$ sia continua. Allora $Z = KerP = P^{-1}(\{0_Y\})$ e' un chiuso. Resta da provare che anche Y è chiuso. Sia $(y_n) \subseteq Y$ tale che $y_n \to y$ in X. Proviamo che $y \in Y$. Dalla continuità di P abbiamo che $0 = y_n - Py_n \to y - Py$ ossia $y = Py$ da cui $y \in ImP = Y$.
Esercizio 3.
$(a) \implies (b)$. Per ipotesi assumiamo che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$. Dalle proprietà della convergenza debole $*$ segue immediatamente che $(f_n)_n$ è limitata (prima tesi) e che $\forall x \in E$ $f_n(x) \to f_0(x)$; questo implica che l'insieme V coincide con tutto E e pertanto è denso in esso.
$(b) \implies (a)$. Per le proprietà della convergenza debole $*$, provare che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ è equivalente a provare che $\forall x \in E$ $f_n(x) \to f_0(x)$. Siano dunque $x \in E,\ \varepsilon > 0,\ x_0 \in V$ tali che $\|x - x_0\| < \varepsilon$ (una siffatta x_0 esiste per la

densità di V in E) e sia $\boxed{M = \sup_n ||f_n||_{E'} < +\infty}$ (in quanto $(f_n)_n$ è limitata per ipotesi).

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_0(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_0(x_0)| + |f_0(x_0) - f_0(x)| \\ &\leq \|x - x_0\|(\|f_n\| + \|f_0\|) + |f_n(x_0) - f_0(x_0)| \\ &< \varepsilon\,(M + \|f_0\|) + |f_n(x_0) - f_0(x_0)|.\end{aligned}$$

Passando al $\limsup$ per $n \to \infty$, e ricordando che $x_0 \in V$, si ottiene che

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon\,(M + \|f_0\|).$$

Per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f_0(x)| \leq 0$$

da cui $|f_n(x) - f_0(x)| \to 0$.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 25.03.2014

(1) (**T: 12 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $T_n : \ell^p \to \ell^p$ così definito:
$$T_n(x) := (x_k + \frac{x_{k+n}}{n})_{k\in\mathbb{N}}$$
per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.
 (a) (**4 punti**) Dimostrare che l'operatore T_n è lineare e continuo con $||T_n||_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq 1 + \frac{1}{n}$.
 (b) (**3 punti**) Dimostrare che $||T_n||_{\mathcal{L}(l^\infty)} = 1 + \frac{1}{n}$.
 (c) (**5 punti**) Per ogni $k \geq n+1$ calcolare
$$||T_n(\sum_{i=1}^{k} e_i)||_{\ell^p}^p$$
 dove $e_n = (\delta_k^n)_k$ al fine di calcolare, nel limite per $k \to \infty$, la norma
$$||T_n||_{\mathcal{L}(\ell^p)}$$
 per ogni $p \in [1, \infty]$.

(2) (**T: 10 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e $(T_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ tali che
$$\sup_n ||T_n(x)||_Y \in \mathbb{R}$$
per ogni $x \in X$. Provare che:
 (a) (**5 punti**) il sottoinsieme
$$V := \{x \in X : \ (T_n(x))_n \text{ é una successione convergente in } Y\}$$
 è un sottospazio chiuso di X;
 (b) (**5 punti**) l'applicazione $T : V \to Y$ definita da
$$T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$
 è un operatore lineare e continuo tale che
$$||T||_{\mathcal{L}(V,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(V,Y)}.$$

(3) (**T: 8 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $P : X \to X$ lineare tale che $P \circ P = P$. Provare che:
 (a) (**2 punti**) Lo spazio X è la somma diretta di $\mathrm{Ker}(P)$ e $\mathrm{Imm}(P)$.
 (b) (**3 punti**) Se P è continuo allora $\mathrm{Ker}(P)$ e $\mathrm{Imm}(P)$ sono chiusi in X.
 (c) (**3 punti**) Se $\mathrm{Ker}(P)$ e $\mathrm{Imm}(P)$ sono chiusi in X allora P è continuo.

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 27.11.2014

(1) Sia $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $(a_k)_k$ una successione e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Dimostrare che

(a) (**3 punti**) $T_n(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;

(b) (**4 punti**) l'operatore $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo;

(c) (**3 punti**) $||T_n||_{\mathcal{L}(l^p)} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{np'}(2^{p'}-1)}\right)^{1/p'}$.

Infine si supponga che $(a_k)_k \in l^{p'}$. Si dimostri che

(a) (**3 punti**) esiste finito il $\lim_{n\to\infty} T_n(x)(:= T(x))$ per ogni $x \in l^p$ e si calcoli $T(x)$;

(b) (**3 punti**) $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p)$.

(2) (**5+5+4 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

Provare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(a) la successione $(T_n(f))_n$ é limitata per ogni $f \in X'$;

(b) la successione $(T_n)_n$ é limitata in X'';

(c) la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata in X.

Risoluzione

(1) (a) (b)(c) L'operatore T_n é associato alla successione $b^n = (b_k)_k$ definita da

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k \leq n \\ \\ \frac{1}{2^k} & \text{se } k \geq n+1. \end{cases}$$

(per non appesantire la notazione, ometto la dipendenza di b_k da n). Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k^n|^{p'} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{2^k})^{p'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'} + \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{j+n+1}})^{p'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{(n+1)p'}} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{p'}})^{j}.$$

Ora $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'}$ é finita perche' ha un numero finito di addendi e la serie geometrica $\sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{p'}})^j$ converge in quanto $0 < \frac{1}{2^{p'}} < 1$. Quindi la successione $(b_k)_k$ appartiene a $l^{p'}$ e, grazie al teorema di rappresentazione di $(l^p)'$ si ottiene che $T_n \in (l^p)'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $T_n(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$ e poiche' per ogni $n \in \mathbb{N}$ $(b_k)_k \in l^{p'}$ e

$$||T_n||_{(l^p)'} = ||b^n||_{l^{p'}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{(n+1)p'}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p'}}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{p'} + \frac{1}{2^{np'}(2^{p'} - 1)} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

(d) se $(a_k)_k \in l^{p'}$ allora dalla disuguaglianza di Hölder segue che per ogni $x \in l^p$ la successione $(a_k x_k)_k \in l^1$ ossia la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

converge (assolutamente). Per la stessa ragione, la successione $(\frac{1}{2^k} x_k)_k \in l^1$ e quindi la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$$

converge. In particolare, dal criterio di Cauchy per serie, segue che $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}=0$. Quindi esiste finito il

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k (:= T(x)).$$

(e) Infine, essendo

$$(T-T_n)(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k-\frac{1}{2^k})x_k$$

si ha che

$$||T_n-T||_{(l^p)'}=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k-\frac{1}{2^k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

che tende a 0 essendo convergente la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k-\frac{1}{2^k}|^{p'}$.

(2) Premettiamo che, grazie a uno dei corollari del Teorema di Hahn Banach, si ha che

$$||T_n||_{X''}=\sup_{f\in X',||f||_{X'}=1}|f(x_n)|=||x_n||_X.$$

(a) $\Longrightarrow$ (b) se $(T_n(f))_n$ é limitata per ogni $f\in X'$, dal Teorema di Banach-Steinhaus (applicato su X') si ha che esiste $C>0$ tale che

$$\sup_n ||T_n||_{X''}\leq C$$

ossia $(T_n)_n$ é limitata in X''.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Segue banalmente dal fatto che

$$\sup_n ||x_n||_X=\sup_n ||T_n||_{X''}\leq C.$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) Sia $C>0$ tale che

$$\sup_n ||x_n||_X\leq C.$$

Allora per ogni $f\in X'$ si ha che

$$|T_n(f)|=|f(x_n)|\leq ||f||_{X'}||x_n||_X\leq C||f||_{X'}.$$

In particolare

$$\sup_n ||T_n(f)||_X\leq C||f||_{X'}.$$

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Primo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

(1) (**P: 24 punti**, **T: 16 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1, 1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$

Dimostrare che

(a) (**P: 4 punti, T: 2 punti**) $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;

(b) (**P: 8 punti, T: 6 punti**) l'operatore $T_a : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma $||T_a||_{(l^p)'} = \begin{cases} \left(\dfrac{|a|^{p'}}{1-|a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1, 1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n\to\infty} T_{a_n}(x) (:= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che

(a) (**P: 6 punti, T: 4 punti**) $T \in (l^p)'$;

(b) (**P: 6 punti, T: 4 punti**) esiste $a \in (-1, 1)$ tale che (a_n) converge ad a. Provare inoltre che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.

(2) (**P: 6 punti**, **T: 14 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

(a) (**P: 6 punti**, **T: 4 punti**) Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \to (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')} = ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$;

(b) (**T: 5 punti**) Provare che $\forall x \in X$ vale

$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \to \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$). Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y) \to (X', \sigma(X', X))$ é continuo.

(c) (**T: 5 punti**) Provare che se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$-compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$-chiuso.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Compito di Analisi Funzionale

(1) (**16 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1,1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia
$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$
Dimostrare che
 (a) (**2 punti**) $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;

 (b) (**6 punti**) l'operatore $T_a : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma $||T_a||_{(l^p)'} = \begin{cases} \left(\dfrac{|a|^{p'}}{1-|a|^{p'}}\right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1,1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n\to\infty} T_{a_n}(x)(= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che
 (a) (**4 punti**) $T \in (l^p)'$;
 (b) (**4 punti**) esiste $a \in (-1,1)$ tale che (a_n) converge ad a. Provare che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.

(2) (**T: 14 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da
$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$
 (a) **T: 4 punti**) Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \to (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')} = ||T||_{\mathcal{L}(X',Y')}$.
 (b) (**T: 5 punti**) Provare che $\forall x \in X$ vale
$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \to \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).

Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y) \to (X', \sigma(X', X))$ é continuo.
 (c) (**T: 5 punti**) Sia $B \subseteq Y'$. Provare se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$-compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$-chiuso.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Secondo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

(1) (**T: 16 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1,1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$

Dimostrare che

(a) (**T: 2 punti**) $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;

(b) (**T: 6 punti**) l'operatore $T_a : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma $||T_a||_{\mathcal{L}(l^p)} = \begin{cases} \left(\dfrac{|a|^{p'}}{1-|a|^{p'}}\right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1,1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n\to\infty} T_{a_n}(x)(:= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che

(a) (**T: 4 punti**) $T \in (l^p)'$;

(b) (**T: 4 punti**) esiste $a \in (-1,1)$ tale che (a_n) converge ad a. Provare inoltre che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.

(2) (**P: 15 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $P : X \to X$ un'applicazione lineare tale che

(1) $P^2 = P$ (ossia $P(P(x)) = Px$ per ogni $x \in X$);

(2) $ImP \cap KerP = \{0\}$.

(a) (**P: 9 punti**) Provare che $P : X \to X$ é continua se e solo se $KerP$ e ImP sono chiusi in X;

(b) (**P: 6 punti**) Provare che se H é uno spazio di Hilbert e M é un sottospazio chiuso di H allora la proiezione ortogonale P_M su M verifica le proprietá (1) e (2) e $KerP_M = (ImP_M)^{\perp}$.

(3) (**P: 15 punti**, **T: 14 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

(a) (**P: 5 punti**, **T: 4 punti**) Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \to (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')} = ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

(b) (**P: 5 punti, T: 5 punti**) Provare che $\forall x \in X$ vale

$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \to \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).
Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y) \to (X', \sigma(X', X))$ é continuo.

(c) (**P: 5 punti, T: 5 punti**) Provare che se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$-compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$-chiuso.

Risoluzione

(1) L'operatore T_a é associato alla successione $b = (b_k)_k$ definita da $b_k = a^k$. Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} |a^k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} (|a|^{p'})^k$$

che e' una serie geometrica convergente in quanto $0 < |a|^{p'} < 1$. Quindi dal teorema di rappresentazione sui funzionali lineari e continui su l^p si ha che $b \in l^{p'}$ e quindi $T_a \in (l^p)'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$ e

$$||T_a||_{(l^p)'} = ||b||_{l^{p'}} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_k |a^k| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Essendo $(|a|^k)_k$ una successione decrescente a 0 segue che

$$||T_a||_{(l^p)'} = ||b||_{l^{p'}} = \begin{cases} \left(\dfrac{|a|^{p'}}{1 - |a|^{p'}} \right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Poi se (a_n) é una successione in $(-1, 1)$ tale che esiste finito il $\lim_{n\to\infty} T_{a_n}(x) (:= T(x))$ per ogni $x \in l^p$, allora, da un corollario del Teorema di Banach-Steinhaus, segue che T é un operatore lineare e continuo, ossia $T \in (l^p)'$. Inoltre, posto

$$e_n = (x_k^n)_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } \textit{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $T_{a_n}(e_1) = a_n$ e poiché $\lim_{n\to\infty} T_{a_n}(e_1) = T(e_1)$ segue che esiste $\lim_n a_n = T(e_1)(:= a)$. Ovviamente $|a| \leq 1$ (in quanto $|a_n| < 1$) e poiché $T(e_k) = \lim_n T_{a_n}(e_k) = \lim_n (a^n)^k = a^k$ segue che per $1 \leq p < +\infty$ e $x = (x_k)_k \in l^p$, si ha

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T(e_k) x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k = T_a(x).$$

Quindi T_a deve appartenere a $l^{p'}$ e quindi la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a^k|^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} (|a|^{p'})^k < +\infty$$

da cui segue che $|a| < 1$.

(2) Si osservi che grazie ad un corollario del Teorema di H. B. vale che

$$\sup_{f\in Y', ||f||_{Y'}\leq 1} ||T^*(f)||_{X'} = \sup_{f\in Y', ||f||_{Y'}\leq 1} \left(\sup_{x\in X, ||x||_X \leq 1} |T^*(f)(x)| \right)$$

$$= \sup_{x\in X, ||x||_X\le 1}\left(\sup_{f\in Y', ||f||_{Y'}\le 1}|T^*(f)(x)|\right) = \sup_{x\in X, ||x||_X\le 1}\left(\sup_{f\in Y', ||f||_{Y'}\le 1}|f(Tx)|\right)$$
$$= \sup_{x\in X, ||x||_X\le 1}||Tx||_Y$$

da cui segue che

$$||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')} = ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Poi, applicando la Proposizione III.2 del Brezis (versione italiana) con $Z = (X', \sigma(X', X))$ si ha che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y) \to (X', \sigma(X', X))$ é continuo se e solo se per ogni $x \in X$ la funzione $\varphi_x \circ T^* : (Y', \sigma(Y', Y) \to \mathbb{R}$ é continua. É facile provare che per ogni $x \in X$ la funzione $\varphi_x \circ T^*$ coincide conla funzione $\varphi_{T(x)}$ che é continua rispetto la topologia debole* di Y' (per definizione di tale topologia). Infine se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$-compatto allora $T^*(B)$ é $\sigma(X', X)$-compatto essendo T^* continuo debole*-debole*. In particolare $T^*(B)$ é $\sigma(X', X)$-chiuso. Proviamo che $B' = T^*(B) \subset X'$ é limitato usando uno dei corollari del Teorema di Banach-Steinhaus: per ogni $x \in X$ l'insieme

$$\{\psi(x) : \psi \in B'\} = \{T^*(f)(x) : f \in B\} = \varphi_{Tx}(B)$$

é compatto in $\mathbb{R}$ essendo immagine di un $\sigma(Y', Y)$-compatto attraverso la funzione continua $\varphi_{Tx} : (Y', \sigma(Y', Y) \to \mathbb{R}$. In particolare per ogni $x \in X$ l'insieme $\{\psi(x) : \psi \in B'\}$ é limitato in $\mathbb{R}$ e quindi $T^*(B)$ é limitato in X'.

(3) (a) Supponiamo che $P : X \to X$ sia continua. Allora $KerP = P^{-1}(\{0\})$ é ovviamente un chiuso. Proviamo che ImP é chiuso: sia (Px_n) tale che $(x_n) \subseteq X$ e $Px_n \to y$ in X. Dalla continuitá di P segue che $Px_n = P(Px_n) \to Py$ in X da cui $Py = y$ ossia $y \in ImP$. Viceversa supponiamo che $KerP$ e ImP sono chiusi in X. Per provare la continuitá di P applichiamo il teorema del Grafico chiuso. Sia $(x_n) \subseteq X$ tale che $x_n \to 0$ in X e $Px_n \to y$ in X. Poiché ImP é chiuso si ha che $y \in ImP$. Inoltre $Px_n - x_n \to y$ e dalla proprietá (1) di P vale che $P(Px_n - x_n) = Px_n - Px_n = 0$ ossia $Px_n - x_n \in KerP$. Poiché $KerP$ é chiuso in X si ha che $y \in KerP$ ossia $Py = 0$. Quindi $y \in ImP \cap KerP$ e dalla proprietá (2) segue che $y = 0$.

(b) Ricordiamo che se H é uno spazio di Hilbert e M é un sottospazio chiuso di H allora per ogni $x \in H$ la proiezione ortogonale $P_M(x)$ é definita come l'unico elemento $y \in M$ tale che

$$||x - y|| = \min_{z\in M} ||x - z||$$

ed é caratterizzato dal fatto che

$$< x - P_m(x), z >= 0$$

per ogni $z \in M$. In particolare, poiché $P_M(x) \in M$ allora l'elemento in M di minima distanza da $P_M(x)$ é proprio $P_M(x)$ ossia $P_M(P_M(x)) = P_M(x)$ (in alternativa basta osservare che $< P_m(x) - P_m(x), z >= 0$ per ogni $z \in M$.) Poi osserviamo che $KerP_M = M^\perp$: infatti se $P_M(x) = 0$ allora

$$< x - 0, z >= 0$$

per ogni $z \in M$ ossia $x \in M^\perp$. Viceversa se $x \in M^\perp$ allora

$$< x, z >= 0$$

per ogni $z \in M$ e quindi $P_M(x) = 0$. Poiché $ImP_M = M$ segue che $KerP_M = (ImP_M)^\perp$ e poiché $M^\perp \cap M = \{0\}$ segue la proprietá (2).

Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Ferrara, 22.01.2015
Compito di Analisi Funzionale

(1) (**16 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in (-1,1)$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia
$$T_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a^k x_k.$$
Dimostrare che
 (a) (**2 punti**) $T_a(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in l^p$;

 (b) (**6 punti**) l'operatore $T_a : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo con norma $||T_a||_{(l^p)'} = \begin{cases} \left(\dfrac{|a|^{p'}}{1-|a|^{p'}}\right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ |a| & \text{se } p = 1. \end{cases}$

Infine sia (a_n) una successione in $(-1,1)$ e si supponga che esista finito il $\lim_{n\to\infty} T_{a_n}(x)(= T(x))$ per ogni $x \in l^p$. Si provi che
 (a) (**4 punti**) $T \in (l^p)'$;
 (b) (**4 punti**) esiste $a \in (-1,1)$ tale che (a_n) converge ad a. Provare che $T = T_a$ nel caso $1 \leq p < \infty$.

(2) (**T: 14 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da
$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$
 (a) **T: 4 punti**) Provare che $T^* : (Y', \|\cdot\|_{Y'}) \to (X', \|\cdot\|_{X'})$ é un operatore lineare e continuo con $||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')} = ||T||_{\mathcal{L}(X',Y')}$.
 (b) (**T: 5 punti**) Provare che $\forall x \in X$ vale
$$\varphi_x \circ T^* = \varphi_{T(x)}$$

(si ricordi che, se Z é uno spazio di Banach, allora per ogni $z \in Z$ la funzione $\varphi_z : Z' \to \mathbb{R}$ e' definita da $\varphi_z(f) = f(z)$).

Dedurre che $T^* : (Y', \sigma(Y', Y) \to (X', \sigma(X', X))$ é continuo.
 (c) (**T: 5 punti**) Sia $B \subseteq Y'$. Provare se $B \subset Y'$ é $\sigma(Y', Y)$-compatto allora $T^*(B)$ é limitato e $\sigma(X', X)$-chiuso.

Ferrara, 11.02.2015

Secondo parziale (P) e Compito totale (T) di Analisi Funzionale

(1) (**T: 15 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a^k x_k.$$

   (a) (**6 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
   (b) (**3 punti**) calcolare la norma di T_n per ogni $1 \leq p \leq \infty$;
   (c) (**6 punti**) sono equivalenti i seguenti fatti:
      (i) esiste finito il $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ per ogni $x \in l^p$;
      (ii) $a \in (-1, 1)$.

(2) (**T: 6, P: 9 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $B \subset X'$. Provare che B é debolmente*-compatto in X' se e solo se B é limitato e debolmente*-chiuso in X'.

(3) (**P: 6 punti**) Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : (X', \sigma(X', X)) \to (Y', \sigma(Y', Y))$ un'applicazione lineare e continua. Dimostrare che

$$T : (X', |\cdot|_{X'}) \to (Y', |\cdot|_{Y'})$$

é continua.

(4) (**9 punti**) Sia H uno spazio di Hilbert e C un sottospazio chiuso di H. Per ogni $x \in H$ sia $P(x) \in C$ definito dalla relazione

$$||x - P(x)|| = \min_{z\in C} ||x - z||.$$

   Dimostrare che
   (a) $P : H \to H$ é un'applicazione lineare e continua;
   (b) $C^{\perp} = Ker P$.

Compito di Analisi Funzionale

Ferrara, 11.02.2015

(1) (**15 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^p$ sia
$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a^k x_k.$$
   (a) (**6 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
   (b) (**3 punti**) calcolare la norma di T_n per ogni $1 \leq p \leq \infty$;
   (c) (**6 punti**) dimostrare che se $1 < p \leq \infty$ sono equivalenti i seguenti fatti:
      (i) esiste finito il $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ per ogni $x \in l^p$;
      (ii) $a \in (-1, 1)$.

(2) (**9 punti**) Sia H uno spazio di Hilbert e C un sottospazio chiuso di H. Per ogni $x \in H$ sia $P(x) \in C$ definito dalla relazione
$$||x - P(x)|| = \min_{z \in C} ||x - z||.$$
   Dimostrare che
   (a) $P : H \to H$ é un'applicazione lineare e continua;
   (b) $C^{\perp} = KerP$.

(3) (**6 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $B \subset X'$. Provare che B é debolmente*-compatto in X' se e solo se B é limitato e debolmente*-chiuso in X'.

Compito di Analisi Funzionale

Ferrara, 17.03.2015

(1) (**18 punti**) Sia $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} e^{ak} x_k$$

(a) (**8 punti**) Dimostrare che $T_n \in (l^2)'$ e calcolare $||T_n||_{(l^2)'}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(b) (**4 punti**) se $a < 0$, dimostrare che la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^2$ e che, posto $T(x) := \lim_n T_n(x)$, l'operatore $T : l^2 \to \mathbb{R}$ é lineare e continuo;
(c) (**2 punti**) se $a = 0$ dare un esempio di un elemento $x \in l^2$ tale che $(T_n(x))_n$ non converge;
(d) (**4 punti**) dimostrare che se la successione $(T_n(x))_n$ converge per ogni $x \in l^2$ allora $a < 0$.

(2) (**12 punti**) Sia H uno spazio di Hilbert dotato di prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ e sia $y \in H$ di norma 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$P(x) = x - < x, y > y.$$

Dimostrare che
(a) (**2 punti**) $P : H \to H$ é un'applicazione lineare;
(b) (**4 punti**) $P(x) \in \{y\}^{\perp}$;
(c) (**2 punti**) $KerP = span\{y\}$;
(d) (**4 punti**) se $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ in H allora $P(x_n) \rightharpoonup P(\bar{x})$ in H.

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 11.06.2015

(1) (**16 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $a = (a_k)_k$ una successione e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

Si supponga che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ abbia limite finito. Si provi che

(a) (**6 punti**) il funzionale $T : l^p \to \mathbb{R}$ dato da

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

é lineare e continuo;

(b) (**5 punti**) $(a_k)_k \in l^{p'}$;

(c) (**5 punti**) calcolare la norma di T.

(2) (**15 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$T_n(f) = f(x_n).$$

Provare che:

(a) (**5 punti**) per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : (X', \sigma(X', X'')) \to \mathbb{R}$ é continuo;

(b) (**4 punti**) se la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in X allora la successione $(T_n)_n$ converge debolmente* in X'';

(c) (**5 punti**) se X é riflessivo e se la successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente* in X'' allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente debolmente in X.

Risoluzione: (1) sia $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. L'operatore $T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ risulta un operatore lineare e continuo essendo $T_n = T_b$ con $b = (b_k)_k \in l^p$ dato da

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k \leq n \\ \\ 0 & \text{se } k \geq n+1. \end{cases}$$

(vedi teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^p).

Poiche' per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x) \in \mathbb{R}$, per un corollario al Teorema di Banach Steinhaus si ha che l'operatore T é esso lineare e continuo. Inoltre

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

ossia

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = T_a(x)$$

con $a = (a_k)_k$ e usando di nuovo il teorema di rappresentazione degli operatori lineari e continui su l^p si ha che $a = (a_k)_k \in l^{p'}$ e

$$||T||_{l^{p'}} = ||a||_{l^p}.$$

(3) posto $T := \lim_n T_n$ rispetto alla topologia debole*, si ha che $T \in X''$ (in quanto limite puntuale di funzionali lineari e continui su X'). Essendo X é riflessivo, si ha che esiste x_0 tale che $T = Jx_0$. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente debolmente a x_0 in X: se $f \in X'$ allora $f(x_n) = T_n(f) \to T(f) = Jx_0(f) = f(x_0)$.

Scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 07.07.2015

(1) (**18 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, sia $a = (a_n)_n$ una successione e per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia
$$T_n(x) := a_n x_n.$$

(a) (**5 punti**) Si provi che l'operatore T_n é lineare e continuo e se ne calcoli la norma;

(b) Si supponga che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ abbia limite finito. Si provi che

(i) (**4 punti**) il funzionale $T : l^p \to \mathbb{R}$ dato da
$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$
é lineare e continuo;

(ii) (**4 punti**) $(a_k)_k \in l^\infty$;

(iii) (**2 punti**) se $p = +\infty$ allora esiste il $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (provare prima che esiste il $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$);

(iv) (**3 punti**) si calcoli l'operatore T.

(2) (**12 punti**) Siano $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio normato e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : X' \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da
$$T_n(f) = f(x_n).$$

(a) (**4 punti**) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si calcoli la norma di T_n;

(b) (**4 punti**) si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : (X', \sigma(X', X)) \to \mathbb{R}$ é continuo;

(c) (**4 punti**) se la successione $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata in X'' allora la successione $(x_n)_n$ é limitata in X.

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 6.5.2016

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $(x) = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1\alpha, x_2\beta, x_2\alpha^2, x_2\beta^2, \cdots, x_n\alpha^n, x_n\beta^n, 0, 0, \cdots).$$

(a) (**10 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to l^1$ é lineare e continuo di norma

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \\ \sup_{1\leq k\leq n}\left(|\alpha|^k + |\beta|^k\right) & \text{se } p = 1 \end{cases} .$$

(b) (**6 punti**) Si supponga $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$. Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1. Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$;

(c) (**4 punti**) sia $p > 1$. Si dimostri che se per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$.

(2) (**6 punti**) Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \to X'$ una funzione che soddisfa la seguente proprieta': se $\{t_n\}_n \subset [0, 1]$ é una successione convergente allora per ogni $x \in X$ la successione $\{\alpha(t_n)(x)\}_n$ é limitata in $\mathbb{R}$. Provare che α é limitata, ossia che

$$\sup_{t\in[0,1]} ||\alpha(t)||_{X'} < +\infty.$$

(3) (**5 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisca $T^0 = Id$ e per induzione $T^n = T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \to X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{T^i(x)}{i!}$$

é convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

Risoluzione

(1) (a) E' facilmente verificare che l'operatore T_n é lineare. Poi per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ se $1 < p \le \infty$ vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k\alpha^k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k\beta^k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|(|\alpha|^k + |\beta|^k)| \le \|x\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (|\alpha|^k + |\beta^k|)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$ vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k\alpha^k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k\beta^k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|(|\alpha|^k + |\beta|^k)| \le \|x\|_p (\sup_{1\le k\le n} (|\alpha|^k + |\beta^k|)$$

da cui segue che

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \le \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \le \infty \\ \\ \sup_{1\le k\le n} \left(|\alpha|^k + |\beta|^k \right) & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

Viceversa, vale che

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} = \sup_{x\in l^p} \frac{\|T_n(x)\|_1}{\|x\|_p} = \sup_{x\in l^p} \frac{\sum_{k=1}^{n} |x_k|(|\alpha|^k + |\beta|^k)}{\|x\|_p}$$

$$\ge \sup_{x\in l^p} \frac{|\sum_{k=1}^{n} x_k(|\alpha|^k + |\beta|^k)|}{\|x\|_p} = \sup_{x\in l^p} \frac{|S_n(x)|}{\|x\|_p} = ||S_n||_{(l^p)'}$$

dove $S_n \in (l^p)'$ é l'operatore definito da

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k(|\alpha|^k + |\beta|^k).$$

Quindi se $1 < p \le \infty$ vale

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \ge \left(\sum_{k=1}^{n} (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$ vale

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \ge \sup_{1\le k\le n} \left(|\alpha|^k + |\beta|^k \right).$$

(b) Se $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$ allora $y = (|\alpha|^k + |\beta|^k)_k \in l^p$ per ogni $1 \le p \le +\infty$. In particolare per ogni $x \in l^p$ vale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|(|\alpha|^k + |\beta|^k) \le \|x\|_p \|y\|_{p'} < +\infty$$

e quindi posto

$$T(x) := (x_1\alpha, x_1\beta, x_2\alpha^2, x_2\beta^2, \cdots, x_n\alpha^n, x_n\beta^n, \cdots)$$

vale che $T(x) \in l^1$. In particolare é noto che la (sotto)successione delle troncate (in c_{00}) $(x_1\alpha, x_1\beta, x_2\alpha^2, x_2\beta^2, \cdots, x_n\alpha^n, x_n\beta^n, 0, 0, \cdots,)$ converge in l^1 a $T(x)$. Inoltre

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \leq (\sum_{k=n+1}^{\infty} (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{p'})^{1/p'}.$$

Quindi se $1 < p \leq \infty$ otteniamo che per $n \to \infty$ $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \to 0$ (grazie al teorema di Cauchy per le serie). Se $p = 1$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1,l^1)} \leq \sup_{k \geq n+1} |\alpha|^k + |\beta|^k$$

ed essendo $|\alpha|, \beta < 1$ si ottiene che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1)} \to 0$.
(In particolare si riottiene per ogni $x \in l^p$ vale che $\|T_n(x) - T(x)\|_1 \to 0$.)

(c) Sia $p > 1$. Se per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora per il Teorema di Banach-Steinhaus vale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} < +\infty.$$

Essendo

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha|^n + |\beta|^n)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

dalla condizione necessaria di convergenza di una serie segue che la successione $(|\alpha|^n + |\beta|^n)_n$ deve essere infinitesima e quindi $\max\{|\alpha|, |\beta|\} < 1$.

(2) Per assurdo sia α non limitata. Allora esiste $(t_n)_n \subset [0,1]$ tale che $\lim_{n\to\infty} ||\alpha(t_n)||_{X'} = +\infty$. Siccome $[0,1]$ é compatto, esiste $(t_{k_n})_n$ una sottosuccessione convergente estratta da $(t_n)_n$. Applicando l'ipotesi dell'esercizio, vale allora che per ogni $x \in X$ la successione $\{\alpha(t_{k_n})(x)\}_n$ é limitata in $\mathbb{R}$. Da un corollario al Teorema di Banach-Steinhaus applicato all'insieme $B' := \{\alpha(t_{k_n})\ \ n \in \mathbb{N}\} \subset X'$ segue che la successione $||\alpha(t_{k_n})||$ é limitata. Assurdo perche' $\lim_{n\to\infty} ||\alpha(t_{k_n})||_{X'} = +\infty$.

(3) Applichiamo il criterio di Weistrass sulla convergenza totale di una serie. Poiche' vale che $||T^n||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||T||^n_{\mathcal{L}(X)}$ segue che per ogni $x \in X$

$$\sum_{i=0}^{n} ||\frac{T^i(x)}{i!}||_X \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{||T^i||_{\mathcal{L}(X)} ||x||_X}{i!}$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} \frac{||T||^i_{\mathcal{L}(X)}}{i!})||x||_X \leq (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{||T||^i_{\mathcal{L}(X)}}{i!})||x||_X \leq e^{||T||_{\mathcal{L}(X)}}||x||_X.$$

Questo implica che

(a) la serie $\sum_{i=0}^{\infty} ||\frac{T^i(x)}{i!}||_X$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach X) segue che la successione $S_n(x)$ converge in X;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} ||\frac{T^i}{i!}||_{\mathcal{L}(X)} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{||T||^i}{i!}) \leq e^{||T||}.$$

Quindi la serie $\sum_{i=0}^{\infty} ||\frac{T^i}{i!}||_{\mathcal{L}(X)}$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$) segue che la successione S_n converge in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore $S(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i(x)}{i!}$ di norma

$$||S||_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n\to\infty} ||S_n||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{||T||}.$$

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 7.6.2016

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1, 0, x_3\alpha, 0, x_5\alpha^2, \cdots, x_{2n+1}\alpha^n, 0, 0, \cdots).$$

(a) (**10 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to l^1$ é lineare e continuo di norma

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha|^{kp'}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \leq \infty \\ \sup_{0\leq k\leq n} |\alpha|^k & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

(b) (**6 punti**) Si supponga $|\alpha| < 1$. Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1. Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$;

(c) (**4 punti**) sia $p = 1$. Si dimostri che se per ogni $x \in l^1$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora $|\alpha| \leq 1$.

(2) (**6 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su $\mathbb{R}$ e sia $T_n : X \to Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é di Cauchy in Y. Provare che $\sup_{n\in N} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$.

(3) (**5 punti**) Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $||T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \to X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{T^k(x)}{k}$$

é convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

Risoluzione

(1) (a) E' facilmente verificare che l'operatore T_n é lineare. Infatti per ogni $x, y \in l^p$, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale che vale che

$$T_n(\lambda x+\mu y) = (\lambda x_1+\mu y_1, 0, (\lambda x_3+\mu y_3)\alpha, 0, \cdots, (\lambda x_{2n+1}+\mu y_{2n+1})\alpha^n, 0, 0, \cdots)$$
$$= \lambda(x_1, 0, x_3\alpha, 0, \cdots, x_{2n+1}\alpha^n, 0, 0, \cdots)+\mu(y_1, 0, y_3\alpha, 0, \cdots, y_{2n+1}\alpha^n, 0, 0, \cdots)$$
$$= \lambda T_n(x) + \mu T_n(y).$$

Poi per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ applicando la disuguaglianza di Holder, vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_{2k+1}\alpha^k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} (|\alpha|^k)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p$$

se $1 < p \le \infty$, mentre se $p = 1$ vale che

$$\|T_n(x)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_{2k+1}\alpha^k| \le \|x\|_1 \sup_{1\le k\le n} |\alpha|^k$$

da cui segue che

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \le \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} (|\alpha|^{kp'}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } 1 < p \le \infty \\ \sup_{0\le k\le n} |\alpha|^k & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

Viceversa, vale che

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} = \sup_{x\in l^p} \frac{\|T_n(x)\|_1}{\|x\|_p} = \sup_{x\in l^p} \frac{\sum_{k=1}^{n} |x_{2k+1}||\alpha|^k}{\|x\|_p}$$
$$\ge \sup_{x\in l^p} \frac{|\sum_{k=1}^{n} x_{2k+1}\alpha^k|}{\|x\|_p} = \sup_{x\in l^p} \frac{|S_n(x)|}{\|x\|_p} = ||S_n||_{(l^p)'}$$

dove $S_n \in (l^p)'$ é l'operatore definito da

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{2k+1}\alpha^k.$$

L'operatore S_n é associato all'elemento

$$b_n = (1, 0, \alpha, 0, \alpha^2, 0, \cdot, \alpha^n, 0, 0, \cdots) \in l^{p'}$$

e quindi se $1 < p \le \infty$ vale

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \ge ||b||_{p'} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha|^{kp'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

mentre se $p = 1$ vale

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,\ l^1)} \geq \sup_{0 \leq k \leq n} |\alpha|^k.$$

(b) Se $|\alpha| < 1$ allora $b = (1, 0, \alpha, 0, \alpha^2, 0, \cdot, 0, \alpha^n, 0, \alpha^{n+1}, 0, \cdots) \in l^p$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$. In particolare per ogni $x \in l^p$ vale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k+1}||\alpha|^k \leq \|x\|_p \|b\|_{p'} < +\infty$$

e quindi posto

$$T(x) := (x_1, 0, \alpha x_3, 0, \alpha^2 x_5, 0, \cdot, 0, \alpha^n x_{2n+1}, 0, \alpha^{n+1} x_{2n+2}, 0, \cdots)$$

vale che $T(x) \in l^1$. Inoltre se $1 < p \leq \infty$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha|^{kp'} \right)^{1/p'}$$

e per il criterio di Cauchy per le serie si ottiene che per $n \to \infty$ $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} \to 0$. Se $p = 1$

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1, l^1)} \leq \sup_{k \geq n+1} |\alpha|^k$$

ed essendo $|\alpha| < 1$ si ottiene che $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(l^1)} \to 0$. (In particolare si riottiene per ogni $x \in l^p$ vale che $\|T_n(x) - T(x)\|_1 \to 0$.)

(c) Sia $p = 1$. Se per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora per il Teorema di Banach-Steinhaus vale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} < +\infty.$$

Essendo

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(l^p, l^1)} = \sup_{n \geq 0} |\alpha|^n < +\infty$$

segue che la successione $(|\alpha|^n)_n$ deve essere limitata e quindi $|\alpha| \leq 1$.

(2) poiche' la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é di Cauchy in Y e Y é uno spazio completo segue che per ogni $x \in X$ la successione $T_n(x)$ converge in Y. Per un corollario al Teorema di Banach-Steinhaus vale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

(3) Applichiamo il criterio di Weistrass sulla convergenza totale di una serie. Poiche' vale che $||T^n||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||T||^n_{\mathcal{L}(X)}$ segue che per ogni $x \in X$

$$\sum_{i=0}^{n} ||\frac{T^i(x)}{i}||_X \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{||T^i||_{\mathcal{L}(X)}||x||_X}{i}$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} \frac{||T||^i_{\mathcal{L}(X)}}{i})||x||_X \leq \frac{||T||_{\mathcal{L}(X)}}{1-||T||_{\mathcal{L}(X)}}||x||_X.$$

Questo implica che

(a) la serie $\sum_{i=0}^{\infty} ||\frac{T^i(x)}{i}||_X$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach X) segue che la successione $S_n(x)$ converge in X;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} ||\frac{T^i}{i}||_{\mathcal{L}(X)} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{||T||^i}{i}) = -\log(1-||T||).$$

Quindi la serie $\sum_{i=0}^{\infty} ||\frac{T^i}{i}||_{\mathcal{L}(X)}$ converge e per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$) segue che la successione S_n converge in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore $S(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i(x)}{i}$ di norma

$$||S||_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n\to\infty} ||S_n||_{\mathcal{L}(X)} \leq -\log(1-||T||).$$

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 21.6.2016

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da
$$T_n(x) := (x_1\beta, 0, x_3\beta^3, 0, \cdots, x_{2n+1}\beta^{2n+1}, 0, 0, \cdots).$$
  (a) (**2 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to l^1$ é lineare e continuo;
  (b) (**5 punti**) Dimostrare che se $1 < p \leq \infty$
$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} = |\beta| \left(\frac{1 - \beta^{2p'(n+1)}}{1 - \beta^{2p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$
  mentre se $p = 1$
$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^1)} = \sup_{0 \leq k \leq n} |\beta|^{2k+1}.$$
  (c) (**5 punti**) Si supponga $|\beta| < 1$. Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1. Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$;
  (d) (**3 punti**) sia $p = 1$. Si dimostri che se per ogni $x \in l^1$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1 allora $|\beta| \leq 1$.

(2) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in L(X, Y)$ e sia $B_X := \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$. Si dimostri che
  (a) (**4 punti**) se T é un'isometria allora $T(B_X)$ é fortemente chiuso e debolmente chiuso in Y;
  (b) (**3 punti**) se T é un'isometria e se Y é riflessivo allora $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y;
  (c) (**4 punti**) se X é riflessivo allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se e solo se $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y.

(3) (**5 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
$\forall\, x_0 \in X$ e $\forall\, (x_n)_n \subseteq X$, se $(x_n)_n$ converge fortemente a x_0 in X allora $(T(x_n))_n$ converge debolmente a $T(x_0)$ in Y.
Provare che T é continuo.

Secondo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 21.6.2016

(1) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in L(X, Y)$ e sia $B_X := \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$. Si dimostri che
  (a) (**8 punti**) se T é un'isometria allora $T(B_X)$ é fortemente chiuso e debolmente chiuso in Y;
  (b) (**6 punti**) se T é un'isometria e se Y é riflessivo allora $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y;
  (c) (**7 punti**) se X é riflessivo allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se e solo se $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y.

(2) (**10 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
$\forall\, x_0 \in X$ e $\forall\, (x_n)_n \subseteq X$, se $(x_n)_n$ converge fortemente a x_0 in X allora $(T(x_n))_n$ converge debolmente a $T(x_0)$ in Y.
Provare che T é continuo.

Risoluzione

Esercizio 1.

(1) se T é un'isometria allora $T(B_X)$ é fortemente chiuso: infatti se $(x_n) \subset B_X$ é tale che (Tx_n) é convergente, allora dalla relazione
$$||T(x_n) - T(x_m)||_Y = ||x_n - x_m||_X$$
segue che la successione (x_n) é di Cauchy in X che e' di Banach. Pertanto esiste $x \in X$ tale che $||x_n - x||_X \to 0$. Poiche' B_X é chiusa, segue che $x \in B_X$ ed essendo T continua, otteniamo che $T(x_n) \to T(x) \in T(B_X)$ in Y. Quindi $T(B_X)$ é fortemente chiuso. Inoltre essendo B_X convesso e T lineare, segue che $T(B_X)$ é un convesso fortemente chiuso. Quindi $T(B_X)$ é anche debolmente chiuso.

(2) Essendo T un'isometria, vale che $T(B_X) \subseteq B_Y$ e B_Y é debolmente compatto in quanto Y é riflessivo. Essendo $T(B_Y)$ un sottoinsieme debolmente chiuso contenuto in un insieme debolmente compatto, segue che $T(B_X)$ é un un insieme debolmente compatto di Y.

(3) se X é riflessivo allora B_X é un sottoinsieme debolmente compatto di Y. Se T é continuo forte-forte, vale che T é continuo debole-debole. In particolare $T(B_X)$ é debolmente compatto in Y. Viceversa, se T é tale che $T(B_X)$ é debolmente compatta, segue che $T(B_X)$ é limitata e quindi T é continuo.

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 8.7.2016

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da

$$T_n(x) := (x_1 y_1, x_2 y_2, \cdots, x_n y_n, 0, 0, \cdots).$$

(a) (**8 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to l^1$ é lineare e continuo e calcolarne la norma (al variare di p) ;

(b) (**7 punti**) Sia $1 \leq p < +\infty$. Si dimostri che sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente in l^1;

(ii) $y \in l^{p'}$.

(2) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un'applicazione biettiva. Sia $B_X := \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_X$. Si provi che

(a) (**3 punti**) se $T(x_n) \to y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \to x \in X$;

(b) (**3 punti**) se $T(x_n) \rightharpoonup y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightharpoonup x \in X$;

(c) (**5 punti**) $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y se e solo se X é riflessivo.

(3) (**5 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X' \to Y'$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
$\forall (f_n)_n \subseteq X'$, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente* a $0_{X'}$ in X' allora $(T(f_n)(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 per ogni $y \in Y$.
Provare che T é continuo.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Secondo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 8.7.2016

(1) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un'applicazione biettiva. Sia $B_X := \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_X$. Si provi che
   (a) (**6 punti**) se $T(x_n) \to y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \to x \in X$;
   (b) (**6 punti**) se $T(x_n) \rightharpoonup y \in Y$ allora esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightharpoonup x \in X$;
   (c) (**9 punti**) $T(B_X)$ é un sottoinsieme debolmente compatto di Y se e solo se X é riflessivo.

(2) (**10 punti**) Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X' \to Y'$ un operatore lineare che soddisfa la seguente proprieta':
$\forall\, (f_n)_n \subseteq X'$, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente* a $0_{X'}$ in X' allora $(T(f_n)(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 per ogni $y \in Y$.
Provare che T é continuo.

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 20.7.2016

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in l^p$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ la successione definita da
$$T_n(x) := (\beta x_1, \frac{\beta^2}{2} x_2, \frac{\beta^3}{3!} x_3, \cdots, \frac{\beta^n}{n!} x_n, 0, 0, \cdots).$$
  (a) (**6 punti**) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to l^1$ é lineare e continuo e se ne calcoli la norma;
  (b) (**2 punti**) Si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente in l^1.
  (c) (**6 punti**) Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, provare che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(l^p, l^1)$. Calcolare la norma di T.

(2) (**4 punti**) Sia $(a_n)_n$ una successione tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \in \mathbb{R}$ per ogni $(b_n)_n \in l^\infty$. Provare che $(a_n)_n \in l^1$.

(3) Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in L(X,Y)$ tale che $T(B_X)$ sia (fortemente) compatta in Y. Si provi che
  (a) (**4 punti**) T é continuo;
  (b) (**4 punti**) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge debolmente a $x \in X$ allora $(T(x_n))_n$ converge debolmente a $T(x)$ in Y;
  (c) (**5 punti**) se X é riflessivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é limitata, allora esiste $x \in X$ ed una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_{k_n} \rightharpoonup x$ in X e $T(x_{k_n}) \to T(x)$ in Y.

Esame scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 23.9.2016

(1) Sia $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in l^p$ sia

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^k}{k!} x_k.$$

(a) (**6 punti**) Si dimostri che $T_n \in (l^p)'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e si calcoli la sua norma;
(b) (**2 punti**) si dimostri che per ogni $x \in l^p$ la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente;
(c) (**3 punti**) Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, provare che $T \in (l^p)'$;
(d) (**4 punti**) Nel caso $p > 1$ si dimostri che $(T_n)_n$ converge a T in $(l^p)'$ e si calcoli la norma di T.

(2) Siano X, Y spazi di Banach, sia $B_X := \{x \in X : ||x|| \le 1\}$ e sia $T \in L(X, Y)$ tale che $T(B_X)$ sia debolmente compatta in Y. Si provi che

(a) (**5 punti**) T é continuo;
(b) (**5 punti**) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge debolmente a $x \in X$ allora $(T(x_n))_n$ é una successione limitata che converge debolmente a $T(x)$ in Y;
(c) (**6 punti**) se esiste $r > 0$ tale che $\{y \in Y : \ ||y||_Y \le r\} \subset T(B_X)$ allora Y é riflessivo.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 02.12.2016

(1) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ poniamo $T_n(x) = (T_k^n(x))_{k\in\mathbb{N}}$ dove

$$T_k^n(x) := \begin{cases} \frac{a^k}{k} x_k & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad .$$

(a) (**8 punti**) Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to l^1$ é lineare e continuo e calcolarne la norma;

(b) (**12 punti**) Provare che se

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n(x)||_1 < +\infty \ \forall x \in l^p$$

allora

(i) $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$;

(ii) $\forall x \in l^p$ esiste $T(x) \in l^1$ tale che $||T_n(x) - T(x)||_{l^1} \to 0$;

(iii) $T \in \mathcal{L}(l^p, l^1)$ ed è tale che $||T_n - T||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \to 0$. Si calcoli la norma di T nel caso $p = 1$.

(2) (**10 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $B \subseteq l^p$. Provare che B é limitato in l^p se e solo se per ogni $a \in l^{p'}$ l'insieme $B_a := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \ : \ b \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$.

Risoluzione

(1) (a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ é facile provare che l'operatore T_n é lineare. Inoltre, se definiamo $b_n = (b_k^n)_k \in c_{00}$ definito da

$$b_k^n := \begin{cases} \frac{a^k}{k} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

applicando la disuguaglianza di Holder si ha che $\forall x \in l^p$

$$||T_n(x)||_{l^1} \leq ||b_n|_{p'}||x||_p.$$

Quindi l'operatore T_n é continuo con

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \leq ||b_n|_{p'}.$$

Inoltre

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} = \sup_{x \in l^p, ||x||_p \leq 1} ||T(x)||_{l^1} \geq ||S_n||_{(l^p)'}$$

dove

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k} x_k.$$

Dal teorema di rappresentazione di $(l^p)'$ si ha che che $S_n \in (l^p)'$ con norma

$$||S_n||_{l^{p'}} = ||b_n||_{p'}$$

Mettendo insieme le due disuguglianze ottenute segue che

$$||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} = ||b_n||_{p'} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |\frac{a^k}{k}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } p \neq 1 \\ \sup_{1 \leq k \leq n} |\frac{a^k}{k}| & \text{se } p = 1 \end{cases}.$$

(b) (i) se $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n(x)||_1 < +\infty$ $\forall x \in l^p$ allora per il Teorema di Banach-Steinhaus

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n||_{(l^p)'} < +\infty$$

da cui se $p >= 1$ allora

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{a^k}{k}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\frac{a^k}{k}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$$

mentre se $p = 1$ allora

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\frac{a^n}{n}| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{1 \leq k \leq n} |\frac{a^k}{k}| < +\infty.$$

ossia, per ogni p fissato, $(\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$; in particolare se $p = 1$ allora $|a| \leq 1$ (altrimenti la successione $(\frac{a^k}{k})_k$ non é limitata) mentre se $p > 1$ allora $|a| < 1$ (altrimenti la successione $(\frac{a^k}{k})_k$ non é infinitesima).

(ii) - (iii) Poiché $a = (\frac{a^k}{k})_k \in l^{p'}$, per la disuguaglianza di Holder si ha che $\forall x = (x_k)_k \in l^p$ la successione $(\frac{a^k}{k}x_k)_k \in l^1$. Per ogni $x \in l^p$ definiamo $T(x) = (\frac{a^k}{k}x_k)_k$. Allora T é lineare e

$$||T(x)|| \leq ||a||_{p'}||x||_p,$$

quindi $T \in \mathcal{L}(l^p, l^1)$. Proviamo che $||T_n - T||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \to 0$. Questo implicherá anche che $||T_n(x) - T(x)||_{l^1} \to 0$ per ogni $x \in l^p$ e che

$$||T||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} = \lim_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} = \lim_{n\to\infty} ||b_n||_{p'} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{a^k}{k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se } p > 1 \\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |\frac{a^k}{k}| = |a| & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

in quanto nel caso $p = 1$ si ha che $|a| < 1$ e quindi la successione $|a|^k \cdot \frac{1}{k}$ é decrescente.
Osserviamo che per ogni $x \in l^p$ si ha che se $p > 1$ allora

$$||T_n(x) - T(x)||_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\frac{a^k}{k}x_k| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\frac{a^k}{k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} ||x||_p$$

In particolare segue che $||T_n - T||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\frac{a^k}{k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ che tende a zero per $n \to \infty$ essendo la serie convergente.
Se $p = 1$ allora

$$||T_n(x) - T(x)||_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\frac{a^k}{k}x_k| \leq \left(\sup_{k\geq n+1} |\frac{a^k}{k}|\right)||x||_1$$

In particolare, tenendo che $|a| < 1$,

$$||T_n - T||_{\mathcal{L}(l^p,l^1)} \leq \sup_{k\geq n+1} |\frac{a^k}{k}| \leq \sup_{k\geq n+1} |\frac{1}{k}| = \frac{1}{n+1}$$

che tende a zero per $n \to \infty$.

(2) $'' \Longrightarrow ''$

(a) Sia $1 \leq p < \infty$. Per uno dei corollari di Banach-Steinhaus per provare che B é limitato in l^p è sufficiente provare che per ogni $f \in (l^p)'$ l'insieme $f(B) = \{f(b) \ : \ b \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$. Sia $f \in (l^p)'$. Dal teorema di rappresentazione del duale di l^p esiste $a \in l^{p'}$ tale che $f(x) = T_a(b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ per ogni $x = (x_n)_n \in l^p$. In particolare l'insieme $f(B)$ coincide con l'insieme $\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \ : \ b \in B\} = B_a$ che è limitato per ipotesi. Segue quindi che B é limitato in l^p.

(b) Sia $p = \infty$. Sia

$$B' = \{T_b \in (l^1)' : \ b \in B\}$$

dove T_b é l'operatore definito da $T_b(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ per ogni $a = (a_n)_n \in l^1$.
Dal teorema di rappresentazione di $(l^1)'$ sappiamo che per ogni $x \in l^\infty$

$$||T_x||_{(l^1)'} = ||x||_{l^\infty}$$

per cui

$$B \text{ é limitato in } l^\infty \Longleftrightarrow B' \text{ é limitato in } (l^1)'.$$

Allo scopo di verificare che B' é limitato in $(l^1)'$ applichiamo uno dei corollari di Banach-Steinhaus ad $X = l^1$ e $B' \subseteq (l^1)'$. Poiché per ogni $a \in l^1$

$$\{f(a) : \ f \in B'\} = \{T_b(a) : \ b \in B\} = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \ : \ b \in B\} = B_a$$

è limitato per ipotesi, segue che B' è limitato in $(l^1)'$ e quindi B in l^∞.

$'' \Longleftarrow''$ Dal teorema di rappresentazione del duale di l^p sappiamo che per ogni $a \in l^{p'}$ l'applicazioni $T_a : l^p \to \mathbb{R}$ definita da $T_a(b) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ é lineare e continua. In particolare T_a trasforma sottoinsiemi limitati di l^p in sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$. Se B é limitato in l^p allora, per ogni $a \in l^p$, l'insieme $T_a(B) = B_a$ è limitato in $\mathbb{R}$.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Primo parziale-Secondo parziale-Totale di Analisi Funzionale
Ferrara, 20.01.2017

(1) (**Primo P=21 punti, T=11 punti**) Sia $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_kb_k, 0, 0, 0, \cdots)(\in c_{00})$$

per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

(a) (**P=7+6 punti, T=4+3 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e che $||T_k||_{\mathcal{L}(X,X)} = \sup_{1\leq i\leq k} ||b_i||$;

(b) (**P=8 punti, T=4**) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X. Dimostrare che $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.

(c) (**P=3 punti, T=2**) Provare che se $(b_k)_k \in l^\infty$ allora per ogni $a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ converge (in X) a $T(a) := (a_kb_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(2) (**Primo P= 10 punti, T=5 punti**) Sia $1 \leq p < \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Supponiamo che per ogni $a \in l^p$ $\exists \lim_{n\to\infty} T_n(a) \in \mathbb{R}$. Provare che $\exists\, b \in l^{p'}$ tale che

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} T_n(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i \quad \forall\, a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$$

$$(2) \quad ||b||_{p'} \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{(l^p)'} < +\infty.$$

(3) (**Secondo P=21 punti; T=10 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e

$$B_{L^{p'}} := \{g \in L^{p'}(0,1) : \ ||g||_{L^{p'}(0,1)} \leq 1\}.$$

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(0,1)$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{g\in B_{L^{p'}}} |\int_0^1 g(x)f_n(x)dx| \leq 2.$$

Provare che

(a) (**P=6 punti; T=3 punti**) $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_p \leq 2$;

(b) (**P=10 punti; T=5 punti**) se $1 < p < +\infty$ esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^p(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole ad f in $L^p(0,1)$ (se $p = \infty$ esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^\infty(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole* ad f);

(c) (**P=5 punti; T=2 punti**) $||f||_p \leq 2$.

(4) (**Secondo P=10 punti; T=5 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su $\mathbb{R}$ e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare tale che se $x_n \rightharpoonup 0$ in X allora $||Tx_n||_Y \to 0$. Provare che T é continuo.

(1) Sia $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_k b_k, 0, 0, 0, \cdots)(\in c_{00})$$

per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

(a) La linearitá è facile. Riguardo la continuitá osservare che per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$

$$||T_k(a)||_\infty = \sup_{1\le i\le k} |a_i b_i| \le \sup_{1\le i\le k} |a_i| \cdot \sup_{1\le i\le k} |b_i|$$

da cui segue che T_k è continuo e che $||T_k||_{\mathcal{L}(X,X)} \le \sup_{1\le i\le k} |b_i|$; Inoltre, fissato $1 \le j \le k$ tale che

$$\sup_{1\le i\le k} |b_i| = b_j$$

e posto $e_j = (\delta_n^j)_n$, si ha che $||e_j||_\infty = 1$ e $T_k(e_j) = b_j$ da cui

$$||T_k||_{\mathcal{L}(X,X)} \ge |b_j| = \sup_{1\le i\le k} |b_i|;$$

(b) se $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X, si ha che $\forall a \in X$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} ||T_k(a)||_\infty < +\infty.$$

Essendo X uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$, applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, segue che

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} ||T_k||_{\mathcal{L}(X,X)} < +\infty$$

ossia $\sup_{k\in\mathbb{N}} |b_k| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{1\le i\le k} |b_i| < +\infty$. Quindi $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.

(c) Se $(b_k)_k \in l^\infty$ allora $T(a) := (a_k b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ per ogni $a \in X$ e

$$||T_k(a) - T(a)||_\infty = \sup_{n\ge k} |a_n b_n| \le ||b||_\infty \sup_{n\ge k} |a_n|.$$

Poichè $a \in c_0$, per ogni $\epsilon > 0$ si ha che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \le \frac{\epsilon}{||b||_\infty}$ per ogni $n \ge n_0$. In particolare per ogni $k \ge n_0$ segue che

$$||T_k(a) - T(a)||_\infty \le \epsilon.$$

Questo implica che la successione $(T_k(a))_k$ converge (in X) a $T(a)$.

(2) Poichè per ogni $a \in l^p$ $\exists \lim_{n\to\infty} T_n(a) \in \mathbb{R}$, applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, vale che l'operatore $T(a) := \lim_{n\to\infty} T_n(a)$ (limite puntuale di operatori lineari e continui su l^p) é esso stesso lineare e continuo, ossia $T \in (l^p)'$, e

$$||T||_{(l^p)'} \le \liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{(l^p)'} < +\infty.$$

Dal teorema di rappresentazione del duale di l^p, si ha che $\exists\, b \in l^{p'}$ tale che $T = T_b$ e $||T||_{(l^p)'} = ||b||_{p'}$. In particolare

$$\lim_{n\to\infty} T_n(a) = T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \quad \forall\, a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$$

e

$$||b||_{p'} = ||T||_{(l^p)'} \le \liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{(l^p)'} < +\infty.$$

(3) (a) Si osservi che, definito $T_n : l^{p'} \to \mathbb{R}$ come $T_n(g) = \int_0^1 g(x) f_n(x) dx$, dal teorema di immersione di l^p in $(l^{p'})'$, si ha che T_n è un operatore lineare e continuo di norma

$$(1)\ ||T_n||_{(l^{p'})'} = ||f_n||_p.$$

Inoltre, per definizione di norma di un operatore, vale che

$$(2)\ ||T_n||_{(l^{p'})'} = \sup_{g\in B_{L^{p'}}} |T_n(g)| = \sup_{g\in B_{L^{p'}}} |\int_0^1 g(x) f_n(x) dx|.$$

Mettendo insieme (1) e (2) si ottiene che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_p = \sup_{g\in B_{L^{p'}}} |\int_0^1 g(x) f_n(x) dx| \le 2.$$

(b) se $1 < p < +\infty$, essendo L^p uno spazio riflessivo, esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^p(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole ad f in $L^p(0,1)$. See $p = \infty$, essendo L^∞ il duale di L^1 che é uno spazio separabile, esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ed esiste $f \in L^\infty(0,1)$ tale che $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole* ad f;

(c) Poichè $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole o debole * ad f si che

$$||f||_p \le \liminf_{n\to\infty} f_{k_n} \le 2.$$

(4) Applichiamo il teorema del grafico chiuso. Sia $x_n \to 0$ in X e $Tx_n \to y \in Y$ in Y. Allora $x_n \rightharpoonup 0$ in X e quindi $||Tx_n||_Y \to 0$. Poichè $||Tx_n||_Y \to ||y||_Y$ otteniamo che $||y|| = 0$ ossia $y = 0$. Quindi T è continuo.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Secondo parziale-Totale di Analisi Funzionale
Ferrara, 2.02.2017

(1) (**T=13 punti**) Sia $b \in \mathbb{R}$ un numero reale. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to X$ il funzionale definito da
$$T_k(a) = (a_1 b, a_2 b^2, \cdots, a_k b^k, 0, 0, 0, \cdots)(\in c_{00})$$
per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.
   (a) (**T=7 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e calcolare la sua norma al variare di $b \in \mathbb{R}$;
   (b) (**T=4**) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X. Dimostrare che $|b| \leq 1$.
   (c) (**T=2**) Provare che se $|b| \leq 1$ allora per ogni $a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ converge (in X) a $T(a) := (a_k b^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(2) (**T=3 punti**) Siano X e Y spazi di Banach e sia $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$, $T_\alpha : X \to Y$, una famiglia di funzionali lineari e continui. Supponiamo che $\forall x \in B_X$ esista $c_x \in \mathbb{R}^+$ tale che
$$\sup_{\alpha\in I} ||T_\alpha(x)||_Y \leq c_x.$$
Si provi che esiste $C \in \mathbb{R}^+$ tale che
$$\sup_{\alpha\in I} ||T_\alpha||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C.$$

(3) (**Secondo P=8+6+6 punti; T=4+3+2 punti**) Sia $1 < p \leq \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in L^p(0,1)$ e sia $T_n : L^{p'}(0,1) \to \mathbb{R}$ definito da
$$T_n(g) := \int_0^1 g(x) f_n(x)dx.$$
Supponiamo che $\forall\, g \in L^{p'}(0,1)\ \exists \lim_{n\to\infty} T_n(g) \in \mathbb{R}$.

Provare che $\exists\, f \in L^p(0,1)$ tale che

   (a) $\lim_{n\to\infty} T_n(g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx\ \forall\, g \in L^{p'}(0,1)$;
   (b) se $p < +\infty$ allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$, mentre se $p = \infty$ allora $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(0,1)$;
   (c) $||f||_p \leq \liminf_{n\to\infty} ||f_n||_p < +\infty$.

(4) (**Secondo P=11 punti; T=6 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su $\mathbb{R}$ e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Provare che se X è riflessivo allora T è continua se e solo se $T(B_X)$ è $\sigma(Y, Y')$-compatto.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale
Ferrara, 21.02.2017

(1) (**T=13 punti**) Sia $b \in \mathbb{R}$ un numero reale. Sia $X = c_0$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to X$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = (\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b^2}, \cdots, \frac{a_k}{b^k}, 0, 0, 0, \cdots)(\in c_{00})$$

per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

(a) (**T=7 punti**) Dimostrare che T_k è lineare e continuo e calcolare la sua norma al variare di $b \in \mathbb{R}$;

(b) (**T=4**) supponiamo che $\forall a \in X$ la successione $(T_k(a))_k$ sia convergente in X. Dimostrare che $|b| \geq 1$.

(c) (**T=2**) Provare che se $|b| > 1$ allora esiste $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} ||T_k - T||_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

(2) (**T=3 punti**) Siano X e Y spazi di Banach e sia $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$, $T_\alpha : X \to Y$, una famiglia di funzionali lineari e continui. Supponiamo che esista U intorno di 0 tale che $\forall x \in U$ $\exists$ $c_x \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha\in I} ||T_\alpha(x)||_Y \leq c_x.$$

Si provi che esiste $C \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\sup_{\alpha\in I} ||T_\alpha||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C.$$

(3) (**Secondo P=8+6+6 punti; T=4+3+2 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $g \in\in L^{p'}(0,1)$. Sia

$$K_g := \{f \in L^p(0,1) : \ |\int_0^1 f(x)g(x)dx| \leq 1, ||f||_p \leq 1\}.$$

Provare che K_g é convesso, chiuso e é debolmente compatto.

(4) (**T=6 punti**) Siano X, Y spazi di Banach su $\mathbb{R}$ e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Provare che se X è riflessivo allora T è continua se e solo se $T(B_X)$ è $\sigma(Y, Y')$-compatto.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 18.07.2017

(1) (**16 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta^k x_k.$$

(a) (**6 punti**) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ è lineare e continuo e se ne calcoli la norma al variare di $1 \leq p \leq \infty$;

(b) (**6 punti**) si provi che se $|\beta| < 1$ allora, per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, dimostrare che $T : l^p \to \mathbb{R}$ è un operatore lineare e continuo;

(c) (**4 punti**) Sia $p > 1$. Si provi che se per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora $|\beta| < 1$.

(2) (**15 punti**) Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia K un sottoinsieme convesso e chiuso di E tale che $K \cap B_1$ è non vuoto. Provare che

(a) (**6 punti**) $\forall n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K \cap B_1$ é convesso e debolmente compatto in E;

(b) (**5+4 punti**) se F è uno spazio di Banach e $T : E \to F$ é lineare e continuo vale che $T(K \cap B_1)$ é debolmente compatto in F ed esiste il $\min_{x\in K\cap B_1} ||T(x)||$.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Totale di Analisi Funzionale

Ferrara, 12.09.2017

(1) (**16 punti**) Sia $1 \leq p \leq \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p$ sia

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k k!} x_k.$$

(a) (**5 punti**) Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ è lineare e continuo e si esprima la sua norma;

(b) (**6 punti**) si provi che per ogni $x \in l^p$ la successione reale $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. Posto $T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, dimostrare che $T : l^p \to \mathbb{R}$ è un operatore lineare e continuo. Si calcoli la norma di T nel caso $p = \infty$;

(c) (**5 punti**) dimostrare che $||T_n - T||_{(l^p)'} \to 0$ per $n \to \infty$.

(2) (**15 punti**) Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ lineare, continuo e biettivo e $K \subseteq E$ un sottoinsieme convesso e chiuso. Provare che

(a) (**4 punti**) $T(K)$ é chiuso in F;

(b) (**3 punti**) $T(K)$ é convesso;

(c) (**4 punti**) $T(K)$ é debolmente chiuso in F;

(d) (**4 punti**) se F é riflessivo e K é limitato, allora $T(K)$ é debolmente compatto in F.

Primo Parziale di Analisi Funzionale

Ferrara, 27.11.2017

(1) (**21 punti**) Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $|a| < 1$. Per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ sia

$$T(x) := (a^k x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

(a) (**8 punti**) si dimostri che $T \in \mathcal{L}(l^\infty, l^1)$ e si calcoli la norma $||T||_{\mathcal{L}(l^\infty,l^1)}$;

(b) (**7 punti**) si dimostri che $T \in \mathcal{L}(l^\infty)$ e si calcoli la norma $||T||_{\mathcal{L}(l^\infty)}$;

(c) (**6 punti**) considerando $T : l^\infty \to l^\infty$ si definisca l'operatore

$$T^n(x) := T(T^{n-1}(x)).$$

Si provi che $T^n \to 0$ in $\mathcal{L}(l^\infty)$ e che la successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita come

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} T^k$$

converge nello spazio $\mathcal{L}(l^\infty)$.

(2) (**10 punti**) Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $(x_n)_n \in l^1$ la successione $(a^n x_n)_n \in l^1$. Dedurre che $|a| \leq 1$.

Suggerimento: si studi la convergenza puntuale degli operatori $T_n : l^1 \to \mathbb{R}$ definiti come

$$T_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a^k x_k$$

Compito scritto di Analisi Funzionale

Ferrara, 16.01.2018

(1) (**Primo P=23 punti; T=11 punti**.) Si munisca lo spazio c_0 della norma $||\cdot||_\infty$. Sia $a = (a_n)_n$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ sia $T_n(x) \in c_{00}$ definito come

$$T_n(x) := (a_1x_1, \cdots, a_nx_n, 0, 0, \cdots).$$

(a) (**Primo P=7 punti; T=4 punti)**. Si dimostri che $T_n \in \mathcal{L}(c_0, l^1)$ e si calcoli la norma $||T_n||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)}$;

(b) si supponga che per ogni $x = (x_n)_n \in c_0$ la successione $(a_nx_n)_n \in l^1$. Posto $T(x) := (a_nx_n)_n$, si dimostri che

(i) **(Primo P=8 punti; T=4 punti)** per ogni $x \in c_0$ vale $||T_n(x) - T(x)||_1 \to 0$ e $T \in \mathcal{L}(c_0, l^1)$;

(ii) **(Primo P=8 punti; T=4 punti)** $a \in l^1$ e $||T||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} \leq ||a||_1$.

(2) (**Primo P=8 punti; T=4 punti**.) Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $||T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si definisca $T^0 = Id$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $T^n := T \circ T^{n-1}$. Provare che la successione $S_n : X \to X$ definita da

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} T^k(x)$$

é convergente in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore S di cui si chiede di stimare la norma.

(3) (**Secondo P=8+8+6+5+4 punti; T=5+4+3+2+2 punti**) Sia $1 < p < \infty$ e $f, g \in L^{p'}(0,1)$. Posto $T : L^p(0,1) \to \mathbb{R}$

$$T(\varphi) := \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \|\varphi\|_p$$

e

$$K_n := \{\varphi \in L^p(0,1) : \ |\int_0^1 \varphi(x)g(x)dx| \leq 1 + \frac{1}{n}, ||\varphi||_p \leq 1\},$$

provare che

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ l'insieme K_n é non vuoto, convesso e debolmente compatto;

(b) l'operatore T é convesso e semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole;

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, \varphi_n \in K_n$ tale che $T(\varphi_n) = \min_{\varphi\in K_n} T(\varphi)$

(d) $(\varphi_n)_n$ ammette un'estratta debolmente convergente in $L^p(0,1)$;

(e) se $(\varphi_{k_n})_n$ converge debolmente a $\bar\varphi$ in $L^p(0,1)$ allora $T(\bar\varphi) = \min_{\varphi\in K_0} T(\varphi)$ dove

$$K_0 := \{\varphi \in L^p(0,1) : \ |\int_0^1 \varphi(x)g(x)dx| \leq 1, ||\varphi||_p \leq 1\}.$$

(1) (a) La linearitá dell'operatore T_n è facile. Riguardo la continuitá osservare che per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$

$$||T_n(x)||_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i| \leq \big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\big)||x||_\infty$$

da cui segue che T_n è continuo e che $||T_n||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|$; Inoltre, scelto $1_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, \dots)(\in c_0))$ si ha che $||1_n||_\infty = 1$ e $T_n(1_n) = (\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{n}, 0, \dots)$ da cui

$$||T_n||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} \geq ||T_n(1_n)||_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Quindi $||T_n||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} = \sum_{i=1}^n |a_i|$.

(b) (i) se per ogni $x = (x_n)_n \in c_0$ la successione $(a_n x_n)_n \in l^1$, si ha che

$$||T_n(x) - T(x)||_1 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i x_i| \to 0$$

per $n \to \infty$ perche' coda di una serie convergente. Da uno dei corollari del Teorema di Banach-Steinhaus, si ha che l'operatore T é un operatore lineare e continuo tra gli spazi di Banach c_0 e l^1, ossia $T \in \mathcal{L}(c_0, l^1)$;

(ii) Applicando il Teorema di Banach-Steinhaus, si ha che $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} < +\infty$ da cui

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_i| < +\infty$$

ossia $\sum_{i=1}^\infty |a_i| < +\infty$. Quindi $a \in l^1$. Dal Corollario di BS, segue che

$$||T||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(c_0,l^1)} = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i| = ||a||_1$$

(2) Applichiamo il criterio di Weistrass sulla convergenza totale di una serie. Poiche' vale che $||T^n||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||T||^n_{\mathcal{L}(X)}$ ed osservando che $|\frac{k}{k+1}| < 1$ segue che

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\frac{k}{k+1} T^k||_X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} ||T^k||_X \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||T||^k_{\mathcal{L}(X)} = \frac{||T||_{\mathcal{L}(X)}}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(X)}}$$

Per il criterio di Weistrass (applicato nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$) segue che la successione S_n converge in $\mathcal{L}(X)$ all' operatore

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} T^k(x)$$

di norma

$$||S||_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n\to\infty} ||S_n||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{||T||_{\mathcal{L}(X)}}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(X)}}.$$

(3) (a) È facile osservare che $0 \in K_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ e pertanto l'insieme K_n é non vuoto. Sia S_g il funzionale lineare e continuo su L^p dato da

$$S_g(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) g(x) dx$$

e sia

$$E_n := \{\varphi \in L^p(0,1) : \; |S_g(\varphi)| \leq 1 + \frac{1}{n}\}.$$

Essendo E_n un sottolivello del funzionale convesso $|S_g|$ vale che E_n è convesso. Essendo $K_n = B_{L^p} \cap E_n$ dove B_{L^p} è la palla unitaria (convessa!) di L^p, segue che K_n è convesso. Inoltre S_g é continuo forte. Pertanto anche $|S_g|$ é continuo forte (la composizione di funzioni continue è continua) e pertanto $K_n = |S_g|^{-1}([0, \frac{1}{n}]) \cap B_{L^p}$ è chiuso fortemente. Siccome K_n è convesso, chiuso fortemente e limitato in L^p che è riflessivo, segue che é debolmente compatto.

(b) l'operatore T é convesso e continuo in quanto somma di un operatore lineare e continuo su L^p (per il teorema di rappresentazione) e della norma che é convessa e continua. Quindi, essendo T continuo fortemente e convesso, T è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole;

(c) basta applicare il Teorema di Weiestrass su spazi riflessivi (con K_n convesso, chiuso, non vuoto e limitato);

(d) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $\varphi_n \in E_n \subseteq B_{L^p}$. Quindi $(\varphi_n)_n$ é una successione limitata in L^p che é uno spazio riflessivo e pertanto ammette un'estratta debolmente convergente in $L^p(0,1)$;

(e) supponiamo che $(\varphi_{k_n})_n$ converge debolmente a $\bar{\varphi} \in B_{L^p}$ in $L^p(0,1)$. Prima di tutto osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|S_g(\varphi_{k_n})| \leq 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Pertanto (sfruttando il fatto che anche $|S_g|$ é continuo debolmente) vale che

$$|S_g(\bar{\varphi})| = \lim_{n\to\infty} |S_g(\varphi_n)| \leq 1$$

ossia

$$\bar{\varphi} \in K_0. \tag{5}$$

Inoltre osserviamo che $K_0 \subseteq K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e pertanto per ogni $\varphi \in K_0$ vale che

$$T(\varphi) \geq \min_{\varphi \in K_n} T = T(\varphi_n).$$

Passando al liminf (e sapendo che T è semicontinuo debolmente) vale che

$$T(\varphi) \geq \liminf_{n\to\infty} T(\varphi_n) \geq T(\bar{\varphi}). \tag{6}$$

Le proprietá (5) e (6) implicano la tesi.