Laurea magistrale in Matematica

Programma di Analisi Funzionale – a.a. 2017/2018
Dott.ssa Francesca Prinari

(1) Richiami di topologia: basi e sistema fondamentale di intorni. Successioni convergenti. Insiemi chiusi e sequenzialmente chiusi. Spazi separati, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$. Spazi compatti. Spazi sequenzialmente compatti. Spazi separabili. Equivalenza tra compattezza e sequenziale compattezza in spazi metrici. Funzioni continue e semicontinue. Teorema di Weistrass (versione sequenziale e topologica). Confronto tra topologie. Costruzione di una topologia su un insieme X che renda continua un'assegnata famiglia di funzioni su spazi topologici. Topologia prodotto.

(2) In spazi vettoriali: definizione di seminorma e di norma, di successione di Cauchy e di spazi di Banach. Norme equivalenti. Spazi vettoriali di dimensione finita: equivalenza tra norme, completezza rispetto a qualunque norma, teorema di Bolzano-Weistrass e compattezza della palla chiusa. Esempio di norme su spazi infinito-dimensionali. Esempio di uno spazio normato non completo: $C[0,1]$ rispetto la norma integrale. Esempio di norme non equivalenti. Teorema di Riesz. Criterio di Weirstrass per serie.

(3) Esempi di spazi di Banach di dimensione infinita:
   (a) lo spazio $B(X,Y)$ delle funzioni limitate;
   (b) lo spazio $B_c(X,Y)$ delle funzioni continue e limitate;
   (c) gli spazi di successioni c_0 ed l^p (disuguaglianza di Holder e di Minkoskii, completezza). Immersione continua di l^p in l^r per $p<r$. Densità di c_{00} in l^p per $p \neq +\infty$; densità di c_{00} in c_0 rispetto la norma del sup;
   (d) lo spazio $C^0(\Omega)$ e Teorema di Ascoli Arzelà;
   (e) lo spazio $C^k(\Omega)$;
   (f) gli spazi L^p. Disuguaglianza di Hölder e disuguaglianza di Minkoskii. Completezza.

(4) Operatori lineari tra spazi normati: caratterizzazione della loro continuità. Continuità degli operatori lineari definiti su spazi di dimensione finita. Norma di un operatore. Esempio di un operatore lineare non continuo. Esempio di un operatore la cui norma non è un massimo. Completezza dello spazio degli operatori $\mathcal{L}(X,Y)$. Duali degli spazi l^p: immersione isometrica di $l^{p'}$ in $(l^p)'$. Teorema di rappresentazione di $(l^p)'$ per $p \neq \infty$.

(5) Lemma di Zorn, basi di Hamel. Teorema di Hahn-Banach (forma analitica reale). Costruzione di funzionali lineari e non continui in spazi di dimensione infinita. Corollari del teorema di Hahn Banach. Estensione di operatori lineari, reali e continui definiti su sottospazi di spazi normati. Dimostrazione che $l^1 \subsetneq (l^\infty)'$. Funzionali lineari e complessi. Forma analitica complessa del teorema di Hahn-Banach. Caratterizzazione degli iperpiani chiusi. Gauge associata ad un insieme convesso. Forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: separazione di insiemi convessi. Polare di un insieme. Ortogonale di un sottospazio.

(6) Lemma di Baire e forme equivalenti. Spazi di prima e seconda categoria. Teorema di Banach-Steinhaus. Insiemi limitati e caratterizzazione attraverso i corollari del Teorema di Banch-Steinhaus. Teorema dell'applicazione aperta e suoi corollari. Teorema del grafico chiuso.
(7) Topologia debole e topologia debole *. Convergenza debole e debole*. Chiusura di un insieme convesso. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Spazi riflessivi. Teorema di Kakutani. Semicontinuità debole delle funzioni semicontinue forti e convesse. Teoremi di esistenza di punti di minimo in spazi riflessivi. Spazi separabili. Spazi uniformente convessi. Riflessività degli spazi uniformemente convessi (senza dimostrazione).
(8) Gli spazi di Hilbert. Prodotto interno. Identità del parallelelogramma. Teorema delle proiezioni su un convesso e su un sottospazio. Riflessività degli spazi di Hilbert. Teorema di Rietz-Frechet.
(9) Spazi L^p: uniforme convessità (con dimostrazione nel caso $2 \leq p < \infty$, riflessività nel caso $1 < p < +\infty$ (con dimostrazione) e separabilità nel caso $1 \leq p < +\infty$). L^∞ non separabile. Duali degli spazi L^p (con la dimostrazione che $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$). Teoremi di rappresentazione di Riesz (con dimostrazione nel caso $1 < p < \infty$). Caratterizzazione delle convergenza debole in L^p e debole* in L^∞. Esempio di una successione limitata di $L^1(0,1)$ che non ammette una estratta debolmente convergente.
(10) Cenni di teoria delle distribuzioni: definizione di distribuzione, ordine di una distribuzione, derivata distribuzionale. Esempi.
(11) Cenni sugli spazi di Sobolev: definizione e principali proprietà (completezza per ogni p, riflessività se $1 < p < +\infty$, separabilità se $1 \leq p < \infty$). Spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Definizione di operatori compatti. Immersioni di Sobolev e disuguaglianza di Poincare' (senza dimostrazione). Definizione di funzione armonica in senso debole e di soluzione debole dell'equazione di Poisson. Metodo degli spazi di Hilbert per la dimostrazione dell' esistenza di una soluzione debole per il problema di Diriclet associato all' equazione di Poisson in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Testi consigliati:

(1) Analisi funzionale di H. Brezis (Liguori editore)
(2) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations di H. Brezis (Springer)
(3) Analisi 3 di G. Gilardi (Mc Graw Hill)
(4) Appunti del corso
(5) Raccolta dei testi di esame
(6) Dispensa sugli spazi di Hilbert di Damiano Foschi e dispensa sulle distribuzioni di L. Zanghirati.