Laurea magistrale in Matematica

Programma di Analisi Funzionale – a.a. 2014/2015

Dott.ssa Francesca Prinari

(1) Spazi vettoriali di dimensione finita. Seminorme e norme. Equivalenza tra norme, completezza rispetto a qualunque norma, teorema di Bolzano-Weistrass e compattezza della palla chiusa. Esempio di norme su spazi infinito dimensionali. Esempio di norme non equivalenti. Teorema di Rietz. Criterio di Weirstrass per serie.

(2) Esempi di spazi normati:
   (a) spazi di successioni c_0, c_{00}, spazi l^p (disuguaglianza di Holder e di Minkoskii, completezza);
   (b) spazio $C^0(\Omega)$. Teorema di Ascoli Arzela';
   (c) spazi L^p. Disuguaglianza di Holder e disuguaglianza di Minkoskii. Completezza.

(3) Operatori lineari tra spazi normati: caratterizzazione della loro continuita'. Norma di un operatore. Operatore trasposto. Completezza dello spazio degli operatori $L(X, Y)$. Duali degli spazi l^p: teorema di rappresentazione.

(4) Lemma di Zorn, basi di Hamel. Teorema di Hanh-Banach (forma analitica reale). Costruzione di funzionali lineari e non continui in spazi di dimensione infinita. Estensione di operatori lineari, reali e continui definiti su sottospazi di spazi normati. Corollari del teorema di Hanh Banach. Funzionali lineari e complessi. Forma analitica complessa del teorema di Hanh Banach. Caratterizzazione degli iperpiani chiusi. Gauge associata ad un insieme convesso. Forme geometriche del teorema di Hanh Banach: separazione di insiemi convessi. Polare di un insieme. Ortogonale di un sottospazio.

(5) Lemma di Baire e forme equivalenti. Spazi di prima e seconda categoria. Teorema di Banach Steinhaus. Insiemi debolmente chiusi. Teorema dell'applicazione aperta e suoi corollari. Teorema del grafico chiuso.

(6) Topologia debole e topologia debole *. Convergenza debole e debole*. Chiusura di un insieme convesso. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Spazi riflessivi. Teorema di Kakutani. Semicontinuita' e Teoremi di esistenza di punti di minimo. Spazi separabili. Spazi uniformente convessi.

(7) Gli spazi di Hilbert. Prodotto interno. Identita' del parallelelogramma. Teorema delle proiezioni su un convesso. Riflessivita' degli spazi di Hilbert. Teorema di Rietz-Frechet.

(8) Spazi L^p: uniforme convessita' (con dimostrazione nel caso $2 \leq p < \infty$), riflessivita' nel caso $1 < p < +\infty$ (con dimostrazione) e separabilita' nel caso $1 \leq p < +\infty$) (senza dimostrazione). Duali degli spazi L^p (con la dimostrazione che $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$). Teoremi di rappresentazione di Riesz (con dimostrazione nel caso $1 < p < \infty$) . Caratterizzazione delle convergenza debole e debole*.

(9) Cenni di teoria delle distribuzioni: definizione di distribuzione, ordine di una distribuzione, derivata distribuzionale. Esempi.

Testi consigliati:

(1) Analisi funzionale di H. Brezis (Liguori editore)

(2) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations di H. Brezis (Springer)
(3) Analisi 3 di G. Gilardi (Mc Graw Hill)
(4) Appunti del corso
(5) Dispensa sugli spazi di Hilbert di Damiano Foschi e dispensa sulle distribuzioni di L. Zanghirati.