

Programma di Analisi Funzionale – a.a. 2015/2016

Dott.ssa Francesca Prinari

- (1) Richiami di topologia: basi e sistema fondamentale di intorni. Spazi separati, \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 . Spazi compatti. Spazi sequenzialmente compatti. Spazi separabili.
- (2) Spazi vettoriali di dimensione finita. Seminorme e norme. Equivalenza tra norme, completezza rispetto a qualunque norma, teorema di Bolzano-Weistrass e compattezza della palla chiusa. Esempio di norme su spazi infinito dimensionali. Esempio di norme non equivalenti. Teorema di Riesz. Criterio di Weirstrass per serie.
- (3) Esempi di spazi normati:
 - (a) spazi di successioni c_0 , c_{00} , spazi l^p (disuguaglianza di Holder e di Minkoskii, completezza);
 - (b) spazio $C^0(\Omega)$. Teorema di Ascoli Arzelá.
 - (c) spazi L^p . Disuguaglianza di Holder e disuguaglianza di Minkoskii. Completezza.
- (4) Operatori lineari tra spazi normati: caratterizzazione della loro continuitá. Norma di un operatore. Operatore trasposto. Completezza dello spazio degli operatori $L(X, Y)$. Duali degli spazi l^p : teorema di rappresentazione.
- (5) Lemma di Zorn, basi di Hamel. Teorema di Hanh-Banach (forma analitica reale). Costruzione di funzionali lineari e non continui in spazi di dimensione infinita. Estensione di operatori lineari, reali e continui definiti su sottospazi di spazi normati. Corollari del teorema di Hanh Banach. Caratterizzazione degli iperpiani chiusi. Gauge associata ad un insieme convesso. Forme geometriche del teorema di Hanh Banach: separazione di insiemi convessi. Polare di un insieme. Ortogonale di un sottospazio.
- (6) Lemma di Baire e forme equivalenti. Spazi di prima e seconda categoria. Teorema di Banach Steinhaus. Insiemi debolmente chiusi. Teorema dell'applicazione aperta e suoi corollari. Teorema del grafico chiuso.
- (7) Topologia debole e topologia debole *. Convergenza debole e debole*. Chiusura di un insieme convesso. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Spazi riflessivi. Teorema di Kakutani. Semicontinuita' e Teoremi di esistenza di punti di minimo. Spazi separabili. Spazi uniformemente convessi. Riflessivita' degli spazi uniformemente convessi (senza dimostrazione).
- (8) Gli spazi di Hilbert. Prodotto interno. Identita' del parallelelogramma. Teorema delle proiezioni su un convesso. Riflessivita' degli spazi di Hilbert. Teorema di Rietz-Frechet.
- (9) Spazi L^p : uniforme convessita' (con dimostrazione nel caso $2 \leq p < \infty$), riflessivita' nel caso $1 < p < +\infty$ (con dimostrazione) e separabilita' nel caso $1 \leq p < +\infty$ (senza dimostrazione). Duali degli spazi L^p (con la dimostrazione che $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$). Teoremi di rappresentazione di Riesz (con dimostrazione nel caso $1 < p < \infty$). Caratterizzazione delle convergenza debole e debole*.
- (10) Cenni di teoria delle distribuzioni: definizione di distribuzione, ordine di una distribuzione, derivata distribuzionale. Esempi. Prodotto di una funzione per una distribuzione. Convoluzione. Operatori differenziali a coefficienti costanti. Definizione di soluzione fondamentale. Teorema di Ehrenpreis-Malgrange (senza dimostrazione).

- (11) Cenni sugli spazi di Sobolev: definizione e principali proprietà (completezza per ogni p , riflessività se $1 < p < +\infty$, separabilità se $1 \leq p < \infty$). Definizione di operatori compatti. Immersioni di Sobolev in dimensione 1 (dimostrazione solo che l'immersione di $W^{1,p}(I)$ è compatta in $C(I)$ se I è limitato). Spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ e immersioni di Sobolev nel caso $N > 1$ (senza dimostrazione). Disuguaglianza di Poincaré (senza dimostrazione). Definizione di funzione armonica in senso debole e di soluzione debole dell'equazione di Poisson. Metodo degli spazi di Hilbert per la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione debole per il problema di Dirichlet associato all'equazione di Poisson in $W^1,2_0(\Omega)$.

Testi consigliati:

- (1) Analisi funzionale di H. Brezis (Liguori editore)
- (2) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations di H. Brezis (Springer)
- (3) Analisi 3 di G. Gilardi (Mc Graw Hill)
- (4) Appunti del corso
- (5) Dispensa sugli spazi di Hilbert di Damiano Foschi e dispensa sulle distribuzioni di L. Zanghirati.