Analisi Funzionale

Luisa Zanghirati

Indice

CAPITOLO 1

Spazi di Banach

1. Alcuni importanti teoremi negli spazi di Banach

Molti problemi dell'Analisi possono essere affrontati più facilmente qualora vengano posti in un contesto astratto scelto opportunamente. La teoria degli spazi di Hilbert non sempre è opportuna poiché la nozione di ortogonalità è qualcosa di molto particolare. La classe degli spazi di Banach si adatta ad un maggior numero di situazioni. Qui di seguito studieremo alcune proprietà fondamentali di tali spazi.

Definizione 1.1.1. *Siano X, Y due spazi lineari normati e sia Λ un'applicazione lineare da X in Y. Chiamasi* norma *di Λ:*

$$\|\Lambda\| = \sup\left\{\frac{\|\Lambda\, x\|}{\|x\|},\quad x \in X,\quad x \neq 0\right\}. \tag{1.1}$$

Se $\|\Lambda\| < +\infty$, Λ si dice "applicazione lineare limitata".

In (1.1), $\|x\|$ è la norma di x in X, $\|\Lambda\, x\|$ è la norma di $\Lambda\, x$ in Y. Capiterà sovente di avere a che fare con norme diverse; il contesto indicherà chiaramente a quale ci si riferisce.

Osservazione.

- *È semplice verificare che $\Lambda : X \to Y$ è limitata se e solo se Λ è continua o se e solo se Λ è continua in 0.*
- *Notiamo che per la linearità di Λ si ha:*

$$\left\{\frac{\|\Lambda\, x\|}{\|x\|},\quad x \in X \setminus \{0\}\right\} = \left\{\|\Lambda\, \widetilde{x}\|,\quad \widetilde{x} \in X,\quad \|\widetilde{x}\| = 1\right\},$$

sicchè

$$\|\Lambda\| = \sup\left\{\|\Lambda\, x\|,\quad x \in X,\quad \|x\| = 1\right\}.$$

- *Osserviamo inoltre che* $\|\Lambda\|$ *è la più piccola costante* c *tale che la disuguaglianza*

$$\|\Lambda\, x\| \le c\, \|x\|$$

  valga per ogni $x \in X$.
- *È talvolta utile ricordare la seguente interpretazione geometrica:* Λ *applica la sfera chiusa unitaria, ossia l'insieme* $\{x \in X \ : \ \|x\| \le 1\}$, *nella sfera chiusa in* Y *con centro* 0 *e raggio* $\|\Lambda\|$.
- *Quando* Y *è* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, *una trasformazione lineare limitata da* X *in* Y *si suole chiamare "funzionale lineare limitato".*

L'utilizzazione della completezza negli spazi di Banach è spesso collegata al seguente teorema (di Baire) riguardante gli spazi metrici completi, teorema che ha altresì molte applicazioni in altri rami della matematica. Esso implica due dei tre più importanti teoremi che rendono gli spazi di Banach un utile strumento in Analisi: il teorema di Banach–Steinhaus ed il teorema dell'applicazione aperta. Il terzo è il teorema di prolungamento di Hahn–Banach, nel quale la completezza non giuoca alcun ruolo.

Teorema 1.1.2 (di Baire)**.** *Se* X *è uno spazio metrico completo, l'intersezione di ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi di* X *aperti e densi è densa in* X.

In particolare, salvo il caso banale $X = \emptyset$, l'intersezione non è vuota. Questa immediata conseguenza del teorema di Baire è utilizzata più frequentemente del teorema stesso, quindi la chiamiamo:

Teorema 1.1.3 (di Baire in "forma debole")**.** *In uno spazio metrico non vuoto e completo ogni successione di aperti densi ha intersezione non vuota.*

Ricordiamo che A si dice *denso* in B se $\overline{A} \supset B$. In particolare, A è denso in X se $\overline{A} = X$, ossia se ogni aperto non vuoto ha intersezione non vuota con A.

Dimostrazione del Teorema di Baire. Sia $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi aperti e densi in X. Sia W un arbitrario sottoinsieme di X aperto e non vuoto. Dobbiamo provare che $\bigcap V_j$ ha un punto in W.

Sia d la metrica di X; indichiamo

(1.2)
$$S(x,r) = \{y \in X \ : \ d(y,x) < r\}; \quad \overline{S(x,r)} = \overline{\{y \in X \ : \ d(y,x) < r\}}.$$

Osserviamo che, in generale, abbiamo

$$\overline{S(x,r)} = \overline{\{y \in X \ : \ d(y,x) < r\}} \neq \{y \in X \ : \ d(y,x) \leq r\}.$$

Poiché V_1 è denso, $W \cap V_1$ è un insieme aperto non vuoto, possiamo quindi trovare x_1 ed r_1 tali che:

$$\overline{S(x_1,r_1)} \subset W \cap V_1; \tag{1.3}$$

non è restrittivo supporre $0 < r_1 < 1$.

Poiché V_2 è denso, l'insieme $V_2 \cap S(x_1,r_1)$ è aperto non vuoto, esistono quindi $x_2 \in V_2 \cap S(x_1,r_1)$ ed $r_2 > 0$ tali che $\overline{S(x_2,r_2)} \subset V_2 \cap S(x_1,r_1)$; non è restrittivo supporre $r_2 < \frac{1}{2}$.

Supponiamo $n > 2$ e che $x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}$ siano stati scelti in modo tale che:

$$\overline{S(x_l,r_l)} \subset V_l \cap S(x_{l-1},r_{l-1}); \qquad r_l < \frac{1}{l}; \qquad l = 2, \ldots, n-1.$$

Poiché V_n è denso, l'insieme $V_n \cap S(x_{n-1},r_{n-1})$ è un aperto non vuoto, esistono quindi $x_n \in V_n \cap S(x_{n-1},r_{n-1})$ e $r_n > 0$ tali che

$$\overline{S(x_n,r_n)} \subset V_n \cap S(x_{n-1},r_{n-1}); \qquad 0 < r_n < \frac{1}{n}. \tag{1.4}$$

Per induzione questo procedimento fornisce una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

Se $i > j \geq n$ la costruzione di $\{x_n\}$ mostra che

$$\overline{S(x_i,r_i)} \subset S(x_j,r_j) \subset S(x_n,r_n) \subset \ldots \subset S(x_1,r_1) \subset W$$

e che x_i e x_j giacciono entrambi in $S(x_n,r_n)$, sicchè $x_i \in S(x_j,r_j)$ e

$$d(x_i,x_j) < r_j < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{n}.$$

Quindi $\{x_j\}$ è una successione di Cauchy. Poiché X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Se $i > n$, $x_i \in S(x_n,r_n)$. Quindi x appartiene ad ogni $\overline{S(x_n,r_n)}$ e (1.4) mostra che x appartiene ad ogni V_n. D'altra parte, per (1.3), $x \in W$. Con ciò la dimostrazione è completa. □

Definizione 1.1.4. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme E di X si dice "mai denso" se la sua chiusura $\overline{E}$ non contiene alcun sottoinsieme aperto non vuoto di X.*

Proposizione 1.1.5. *Siano X uno spazio topologico ed E un suo sottoinsieme. Valgono le seguenti proprietà:*

a) *se E è mai denso, anche $\overline{E}$ gode della stessa proprietà;*
b) *se E è chiuso, E è mai denso se e solo se il suo complementare $\complement E$ è denso in X.*

Dimostrazione. La proprietà a) è immediata conseguenza della definizione di "insieme mai denso".
Verifichiamo la proprietà b).
Ipotesi: E è chiuso;
Tesi: E è mai denso se e solo se $\complement E$ è denso.

Se E è mai denso, allora $\overline{E}$ non contiene nessun aperto non vuoto. Poiché per ipotesi $E = \overline{E}$, E non contiene nessun aperto A non vuoto. Ciò è quanto dire che ogni aperto A non vuoto interseca $\complement E$. Quindi $\complement E$ è denso.

Viceversa, se $\complement E$ è denso, allora per ogni aperto A non vuoto si ha $\complement E \cap A \neq \emptyset$, ossia E non contiene nessun insieme aperto A non vuoto. Essendo $E = \overline{E}$, allora $\overline{E}$ non contiene nessun insieme A aperto non vuoto; ciò è quanto asserire che E è mai denso. □

Definizione 1.1.6. *Ogni unione numerabile di insiemi mai densi in X si dice di "prima categoria". Tutti gli altri sottoinsiemi sono di "seconda categoria" (terminologia di Baire).*

Il teorema di Baire è talvolta chiamato "Teorema della categoria". Ciò perché vale la seguente:

Proposizione 1.1.7. *Il "Teorema di Baire in forma debole"* (Teorema 1.1.3) è *equivalente all'affermazione:*

(1.5) *ogni spazio metrico completo è di seconda categoria.*

Dimostrazione. Se (1.5) non fosse vera esisterebbe uno spazio metrico completo X di prima categoria e quindi esisterebbe una successione $\{E_j\}$ di sottoinsiemi mai densi tali che

$$\bigcup E_j = X.$$

Allora
$$\bigcup \overline{E}_j = X$$
e, passando al complementare, si avrebbe:
$$\bigcap \complement \, \overline{E}_j = \emptyset. \tag{1.6}$$

E_j è mai denso e quindi tale è anche $\overline{E}_j$ (cfr. Proposizione 1.1.5 a)), onde $\complement \, \overline{E}_j$ è un aperto denso (cfr. Proposizione 1.1.5 b)), quindi se (1.6) fosse vera, nello spazio metrico completo X si avrebbe una successione di aperti densi con intersezione vuota, ma ciò è assurdo, perché contrasterebbe con il teorema di Baire (e con la sua forma debole).

Viceversa, supponiamo che non valga il teorema di Baire in forma debole. Esiste allora una successione $\{A_j\}$ di sottoinsiemi aperti e densi in X tali che $\bigcap A_j = \emptyset$. Allora $\bigcup \complement \, A_j = X$. Per b) della Proposizione 1.1.5, $E_j := \complement \, A_j$ è mai denso. Quindi X è di prima categoria; ciò contraddice (1.5) e completa la dimostrazione della Proposizione. □

Nel seguito dimostreremo due importanti teoremi, il "Teorema di Banach–Steinhaus" ed il "Teorema dell'applicazione aperta" che si fondano sul teorema di Baire.

Teorema 1.1.8 (di Banach–Steinhaus)**.** *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio lineare normato e $\{\Lambda_\alpha\}$ una famiglia di applicazioni limitate di X in Y, dove α varia in un insieme di indici A. Allora o esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che:*
$$\|\Lambda_\alpha\| \leq M \qquad \forall \, \alpha \in A \tag{1.7}$$
oppure
$$\sup_\alpha \|\Lambda_\alpha(x)\| = +\infty \tag{1.8}$$
per tutti gli x appartenenti ad un sottoinsieme denso in X.

Un'altra formulazione (ovviamente equivalente) della tesi è:
$$\text{o} \qquad \sup_\alpha \|\Lambda_\alpha\| < +\infty$$
$$\text{oppure} \qquad \left\{ x \ : \ \sup_\alpha \|\Lambda_\alpha(x)\| = +\infty \right\} \quad \text{è denso in } X.$$

In termini geometrici, le alternative sono le seguenti: denotiamo con $\mathcal{U}$ la sfera unitaria di X centrata nello 0. Allora o esiste una sfera B in Y (di raggio H e centro 0) tale che $\Lambda_\alpha(\mathcal{U}) \subset B$, per ogni α, oppure esiste un x_0 (in effetti vi è un insieme denso di x siffatti) tale che nessuna sfera di Y contiene $\{\Lambda_\alpha(x_0);\ \alpha \in A\}$.

Il teorema viene talvolta chiamato "Principio di uniforme limitatezza" o anche "Teorema dell'alternativa".

Dimostrazione. Poniamo:

$$\varphi(x) = \sup_\alpha \|\Lambda_\alpha(x)\|_Y, \qquad x \in X$$

e

$$V_n = \{x \in X \ : \ \varphi(x) > n\}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Poiché Λ_α è continua da X in Y e poiché $y \to \|y\|_Y$ è continua da Y in $\mathbb{R}$, allora $x \to \|\Lambda_\alpha(x)\|_Y$ è una funzione continua da X in $\mathbb{R}$ e quindi è semicontinua inferiormente. Ricordiamo che l'estremo superiore di una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente è una funzione semicontinua inferiormente, pertanto φ è inferiormente semicontinua e ogni V_n è aperto.

Si presenta ora l'alternativa:

a) uno degli spazi V_n, denotiamolo V_N, non è denso in X;
b) ogni V_n è denso in X.

Nel caso a), ossia V_N non è denso in X, esiste un aperto $W \neq \emptyset$ in X disgiunto da V_N e quindi esistono un $x_0 \in W$ ed un $r > 0$ tali che

$$\|x\| \leq r \quad \Rightarrow \quad x_0 + x \in W \quad \Rightarrow \quad x_0 + x \notin V_N.$$

Ciò significa che $\varphi(x_0 + x) \leq N$, per ogni $\|x\| \leq r$, ossia:

$$\|\Lambda_\alpha(x_0 + x)\| \leq N,$$

per ogni $\alpha \in A$ e per ogni x con $\|x\| \leq r$. Poiché $x = (x_0 + x) - x_0$, abbiamo

$$\|\Lambda_\alpha(x)\| \leq \|\Lambda_\alpha(x_0 + x)\| + \|\Lambda_\alpha(x_0)\| \leq 2\,N, \tag{1.9}$$

per ogni $\alpha \in A$ e per ogni x con $\|x\| \leq r$. Scriviamo ogni $x \neq 0$ nella forma:

$$x = r\,\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{r} \qquad \text{e} \qquad \Lambda_\alpha(x) = \frac{\|x\|}{r}\,\Lambda_\alpha\Big(r\,\frac{x}{\|x\|}\Big)$$

$$\|\Lambda_\alpha(x)\|_Y = \frac{\|x\|}{r}\,\Big\|\Lambda_\alpha\Big(r\,\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|_Y. \tag{1.10}$$

Poiché $\Big\|r\,\frac{x}{\|x\|}\Big\| = r$, da (1.9) segue $\Big\|\Lambda_\alpha\Big(r\,\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|_Y \leq 2\,N$ e quindi da (1.10):

$$\|\Lambda_\alpha(x)\|_Y \leq \frac{2\,N}{r}\|x\|_X \quad \forall\ x.$$

La (1.7) è così provata con $M = \dfrac{2N}{r}$.
L'altra possibilità è che si verifichi b), ossia che ogni V_n sia denso in X. In questo caso, per il teorema di Baire, $\bigcap V_n$ è un sottoinsieme denso di X. Poiché

$$\bigcap V_n = \{x \ : \ \varphi(x) > n, \ \forall\, n\} = \{x \ : \ \varphi(x) = +\infty\}$$

la dimostrazione è completa. □

Dal teorema di Banach–Steinhaus seguono i seguenti due corollari.

Corollario 1.1.9 (Principio dell'uniforme limitatezza)**.** *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di applicazioni lineari limitate di X in Y. Se per ogni $x \in X$ si ha che $\{\Lambda_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$ è un sottoinsieme limitato in Y, allora esiste M tale che $\|\Lambda_\alpha\| \le M$, per ogni α. Sia $x_0 \in X$; se l'insieme $\{\Lambda_\alpha(x_0)\}_{\alpha\in A}$ non è limitato in Y, allora un M siffatto non esiste.*

Dimostrazione. La frase "per ogni x l'insieme $\{\Lambda_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$ è limitato in Y" significa:

$$\sup_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha(x)\| = M(x) < \infty,$$

quindi la frase nega (1.8) e, per il teorema di Banach–Steinhaus, vale (1.7).

Se per un $x_0 \in X$ si ha $\sup\limits_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha(x_0)\| = +\infty$, allora (1.7) non può valere: se fosse

$$\|\Lambda_\alpha\| \le M \quad \forall\, \alpha,$$

si avrebbe

$$\|\Lambda_\alpha(x_0)\| \le \|\Lambda_\alpha\| \cdot \|x_0\| \le M \cdot \|x_0\| \quad \forall\, \alpha$$

e quindi $\sup\limits_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha(x_0)\| < \infty$, contro l'ipotesi. □

Corollario 1.1.10. *Sia $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di applicazioni lineari continue su uno spazio di Banach X a valori in uno spazio normato Y. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n(x) = \Lambda(x)$. Allora Λ è un operatore lineare limitato su X a valori in Y e*

$$\|\Lambda\| \le \min \lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\|. \tag{1.11}$$

Dimostrazione. È immediato verificare che Λ è lineare.

In uno spazio metrico ogni successione puntualmente convergente è limitata. Per il Corollario 1.1.9, esiste allora M tale che

$$\sup_n \|\Lambda_n\| \leq M. \tag{1.12}$$

Da

$$\|\Lambda_n(x)\| \leq \|\Lambda_n\| \cdot \|x\|$$

segue

$$\min \lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n(x)\| \leq \min \lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\| \cdot \|x\|$$

e, poiché $\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n(x)\| = \|\Lambda(x)\|$, si ha

$$\|\Lambda(x)\| \leq \min \lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\| \cdot \|x\|.$$

La (1.12) assicura che $\min \lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\| \leq M$. Quindi, per la definizione di norma di un operatore

$$\|\Lambda\| \leq \min \lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\| < \infty.$$

□

Osservazione 1.1.11. *Il* Teorema 1.1.8 *ed i* Corollari 1.1.9, 1.1.10 *sono falsi se si toglie l'ipotesi che X sia completo, come è provato dal seguente esempio.*

Sia X lo spazio dei polinomi $x = x(t) = \sum_{j\geq 0} a_j\, t^j$, con $a_j \in \mathbb{C}$, $a_j = 0$ eccetto un numero finito. Denotiamo con $m(x)$ il grado del polinomio x. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$\|x\| = \max_j |a_j|,$$

dove $x \to \|x\|$ è una norma su X.

Definiamo una successione di applicazioni $\Lambda_n : X \to \mathbb{C}$ ponendo per ogni $x = x(t) = \sum_{j\geq 0} a_j\, t^j$:

$$\Lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$

È immediato verificare che Λ_n è lineare, inoltre Λ_n è limitata, in effetti:

$$|\Lambda_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \leq \max_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \cdot n = n \cdot \|x\|.$$

Quindi $\|\Lambda_n\| \leq n$.

Se si considera il polinomio $x_0(t) = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1}$ *si ha:*

$$\|x_0\| = 1; \qquad \Lambda_n(x_0) = n,$$

quindi

$$\frac{|\Lambda_n(x_0)|}{\|x_0\|} = n, \quad \textit{sicchè} \quad \|\Lambda_n\| = n.$$

È dunque $\sup \|\Lambda_n\| = +\infty$. *La condizione* (1.7) *del teorema di Banach–Steinhaus è violata; "dovrebbe" quindi valere la* (1.8), *ma così non è: fissato un arbitrario polinomio* $x \in X$ *e denotato con* $m(x)$ *il suo grado, si ha*

$$|\Lambda_n(x)| = \Big|\sum_{j=0}^{n-1} a_j\Big| \le \sum_{j=0}^{m(x)} |a_j| \le (m(x)+1) \sup_j |a_j| = (m(x)+1)\|x\| < \infty.$$

Ciò non contraddice il teorema di Banach–Steinhaus *poiché* $(X, \| \, \|)$ *non è completo. Per provare ciò basta considerare la successione di polinomi* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *con*

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}.$$

Se $h > k$ *si ha* $\; x_h - x_k = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{h} \frac{t^j}{j!}$, *onde:*

$$\|x_h - x_k\| = \max\left\{\frac{1}{j!}, \; k+1 \le j \le h\right\} = \frac{1}{(k+1)!} \longrightarrow 0, \quad \textit{per } h, k \to \infty.$$

Dunque $\{x_k\}$ *è di Cauchy in* X, *ma* x_k *non converge in* $(X, \| \, \|)$ *a nessun polinomio. Infatti per ogni* $x = x(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m_0} a_j t^j \in X$, *supposto* $k > m_0$, *si ha:*

$$\|x_k - x\| = \max\left\{\Big|\frac{1}{j!} - a_j\Big|, \; \frac{1}{l!}; \; 0 \le j \le m_0; \; m_0+1 \le l \le k\right\} \ge \frac{1}{(m_0+1)!}.$$

Dunque x_k *non converge ad* x. X *non è completo!*

Definizione 1.1.12 (Serie). *Sia* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una successione di operatori*[1] *continui da* X *in* Y, *con* X *e* Y *spazi normati. Si dice che la serie*

---

[1]Qui e nel seguito "operatore"="applicazione lineare"

$\sum_{j\geq 0} T_j$ *converge se per ogni* $x \in X$*, posto* $S_N = \sum_{j=0}^{N} T_j$*, esiste in* Y *il limite*

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) =: S(x).$$

L'operatore S *si dice "somma della serie* $\sum_{j\geq 0} T_j$*" e si scrive*

$$\sum_{j\geq 0} T_j = S.$$

Senza ulteriori ipotesi sulla topologia di X, non si può affermare che S sia continuo. Ciò è vero se X è completo (vedi Corollario 1.1.10). In ogni caso S è lineare.

Proposizione 1.1.13 (Serie di Neumann)**.** *Sia* T *un operatore lineare continuo da uno spazio di Banach in sè. Se* $\|T\| < 1$*, allora* $I - T$ *ammette inverso continuo in* X *dato da*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k\geq 0} T^k. \tag{1.13}$$

T^k *è definito induttivamente da:*

$$T^k(x) = T(T^{k-1}(x)), \quad k = 2, 3, \dots$$
$$T^0(x) = x, \quad i.e. \;\; T^0 = I$$
$$T^1(x) = T(x)$$

È

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}. \tag{1.14}$$

La serie a secondo membro di (1.13) *si dice "Serie di Neumann".*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che:

i) $\sum_{k\geq 0} T^k$ converge. Sia $S = \sum_{k\geq 0} T^k$;

ii) S è continuo e $\|S\| \leq \dfrac{1}{1 - \|T\|}$;

iii) $S(I - T) = (I - T)S = I$.

Dalla definizione di T^k segue

$$\|T^k(x)\| \leq \|T\| \cdot \|T^{k-1}(x)\|$$

e, per induzione
$$\|T^k(x)\| \leq \|T\|^k \cdot \|x\|.$$
Quindi T^k è continuo e $\|T^k\| \leq \|T\|^k$.

Posto $S_N = \sum_{k\geq 0}^{N} T^k$, per ogni $x \in X$ si ha (per $N > M$):

(1.15)
$$\|S_N(x) - S_M(x)\| = \Big\| \sum_{M+1}^{N} T^k(x) \Big\| \leq \sum_{M+1}^{N} \|T^k(x)\| \leq \Big(\sum_{M+1}^{N} \|T\|^k \Big) \|x\|.$$

Poiché $\|T\| < 1$, l'ultima somma tende a zero per $M, N \to +\infty$. Quindi $S_N(x)$ è di Cauchy e, poiché X è completo, ha limite

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = S(x). \tag{1.16}$$

Per il Corollario 1.1.10, S è un'applicazione lineare continua e $\sum_{k\geq 0} T^k = S$. Da (1.16) segue (continuità della norma):

$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N(x)\| = \|S(x)\|. \tag{1.17}$$

D'altro canto, procedendo come per la (1.15), si ha
$$\|S_N(x)\| \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|T\|^k \Big) \|x\|,$$
quindi
$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N(x)\| \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k \Big) \|x\| = \frac{1}{1 - \|T\|} \cdot \|x\|.$$
Da qui e dalla (1.17) segue
$$\|S(x)\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \cdot \|x\|,$$
ossia
$$\|S\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$
Resta da provare iii). Posto $T^0 = I$, abbiamo
$$S(I - T)(x) = S(x) - (S\,T)(x) = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} T^k(x) - \sum_{k=0}^{N} T^{k+1}(x) \Big) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\Big(x+\sum_{k=1}^{N}T^k(x)-\sum_{h=1}^{N+1}T^h(x)\Big)=x;$$

quindi

$$S(I-T)=I.$$

In modo analogo si prova che $(I-T)S=I$. La dimostrazione è completa.
□

Teorema 1.1.14 (dell'applicazione aperta)**.** *Siano X ed Y spazi di Banach e $\Lambda : X \to Y$ un'applicazione lineare continua suriettiva. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\Lambda\,\mathcal{U} \supset \delta\,\mathcal{V}, \tag{1.18}$$

dove si sono denotate con $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ le sfere unitarie aperte in X e Y rispettivamente.

Da (1.18) e dalla linearità di Λ segue che l'immagine di ogni insieme aperto è un insieme aperto. Ciò giustifica il nome del teorema. Osserviamo inoltre che (1.18) equivale a:

(1.19)
"per ogni y con $\|y\| < \delta$ esiste un x con $\|x\| < 1$ tale che $\Lambda\,x = y$".

Dimostrazione. Poiché Λ è suriettiva, dato $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $\Lambda\,x = y$. Sia k un numero naturale tale che $\|x\| < k$, allora $x \in k\,\mathcal{U}$ e quindi

$$y = \Lambda\,x \in \Lambda(k\,\mathcal{U}) \ \text{ e } \ Y \subset \bigcup_k \Lambda(k\,\mathcal{U}).$$

Essendo l'inclusione opposta ovvia, si ha:

$$Y = \bigcup_k \Lambda(k\,\mathcal{U}). \tag{1.20}$$

Poiché Y è completo, per il teorema di Baire, Y è di seconda categoria, vale a dire Y non è unione numerabile di insiemi mai densi. Poiché in (1.20) Y è scritto come unione numerabile di insiemi, uno di questi, $\Lambda(k_0\,\mathcal{U})$, non è mai denso[2]. Dunque esiste un aperto $W \neq \emptyset$ tale che $W \subset \overline{\Lambda(k_0\,\mathcal{U})}$. Scegliamo un $y_0 \in W$ ed un $\eta > 0$ tali che

$$\overline{S(y_0,\eta)} \subset W.$$

Quindi

$$\|y\| \le \eta \quad \Rightarrow \quad y_0 + y \in W.$$

[2] E è mai denso se nessun aperto diverso dal vuoto è contenuto in $\overline{E}$

Per ogni y siffatto si ha

$$\{y_0 + y,\, y_0\} \subset W \subset \overline{\Lambda(k_0\,\mathcal{U})};$$

esistono allora due successioni $\{x'_j\}$, $\{x''_j\} \subset k_0\,\mathcal{U}$ tali che

$$\Lambda\, x'_j \longrightarrow y_0; \qquad \Lambda\, x''_j \longrightarrow y_0 + y.$$

Posto $x_j = x''_j - x'_j$ si ha $\|x_j\| < 2\,k_0$ e $\Lambda\, x_j \longrightarrow y$. Abbiamo così provato:

$$\forall\; y \text{ con } \|y\| \le \eta, \;\; \exists\; \{x_j\} \subset 2\,k_0\,\mathcal{U} \;\text{ t.c. }\; \Lambda\, x_j \longrightarrow y. \tag{1.21}$$

Posto:

$$y' = \eta\,\frac{y}{\|y\|}; \qquad \varepsilon' = \eta\,\frac{\varepsilon}{\|y\|}; \qquad y \in Y \setminus \{0\},\, \varepsilon > 0, \tag{1.22}$$

risulta $\|y'\| = \eta$ e quindi per (1.21)

$$\exists\;\; x' \;\text{ t.c. }\; \|x'\| < 2\,k_0 \;\text{ e }\; \|\Lambda\,(x') - y'\| < \varepsilon'. \tag{1.23}$$

Moltiplicando ambo i termini dell'ultima disuguaglianza per $\dfrac{\|y\|}{\eta}$, la (1.23) si riscrive nella forma:

$$\exists\;\; x' \;\text{ t.c. }\; \|x'\| < 2\,k_0 \;\text{ e }\; \left\|\Lambda\Big(\frac{\|y\|}{\eta}\,x'\Big) - y\right\| < \varepsilon.$$

Posto

$$x = \frac{\|y\|}{\eta}\,x', \qquad \delta = \frac{\eta}{2\,k_0}$$

si ha

$$\exists\;\; x \;\text{ t.c. }\; \|x\| < \delta^{-1}\,\|y\| \;\text{ e }\; \|\Lambda(x) - y\| < \varepsilon. \tag{1.24}$$

Abbiamo così provato che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall\; y \ne 0, \;\; \forall\; \varepsilon > 0 \;\; \exists\;\; x \;\text{ t.c. }\; \|x\| < \delta^{-1}\,\|y\| \;\text{ e }\; \|y - \Lambda\, x\| < \varepsilon. \tag{1.25}$$

Questa è quasi la tesi enunciata nella forma (1.19). Sarebbe esattamente (1.19) se fosse lecito $\varepsilon = 0$.

Fissiamo $y \in \delta\, Y$ ed un ε positivo. Per (1.25), con $\dfrac{\varepsilon\,\delta}{2}$ in luogo di ε, esiste x_1 tale che

$$\|x_1\| < 1 \;\text{ e }\; \|y - \Lambda\, x_1\| < \frac{1}{2}\,\delta\,\varepsilon. \tag{1.26}$$

Ancora per (1.25), con $y-\Lambda\, x_1$ in luogo di y ed $\dfrac{\varepsilon\,\delta}{2^2}$ in luogo di ε, esiste x_2 tale che

$$\|x_2\| < \delta^{-1}\,\|y-\Lambda\, x_1\| \quad \text{e} \quad \|y-\Lambda\, x_1-\Lambda\, x_2\| < \frac{\varepsilon\,\delta}{2^2}. \tag{1.27}$$

Tenendo conto di (1.26), da (1.27) segue:

$$\|x_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|y-\Lambda(x_1+x_2)\| < \frac{\varepsilon\,\delta}{2^2}. \tag{1.28}$$

Supponiamo che siano stati scelti $x_1,\dots,x_n$ tali che

$$\|y-\Lambda(x_1+\cdots+x_n)\| < \frac{\varepsilon\,\delta}{2^n}. \tag{1.29}$$

Utilizzando (1.25) con $y-\Lambda(x_1+\cdots+x_n)$ in luogo di y e con $\varepsilon\,\delta\,2^{-(n+1)}$ in luogo di ε, si ottiene l'esistenza di x_{n+1} tale che:

$$\|x_{n+1}\| \le \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{e} \quad \|y-\Lambda(x_1+\cdots+x_{n+1})\| < \frac{\varepsilon\,\delta}{2^{n+1}}.$$

Per induzione si costruisce così una successione $\{x_n\}_{n\ge 1}\subset X$ tale che:

$$\|x_n\| \le \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \quad \text{e} \quad \|y-\Lambda(x_1+\cdots+x_n)\| < \frac{\varepsilon\,\delta}{2^n}. \tag{1.30}$$

Posto $s_n = x_1+\cdots+x_n$, la prima di (1.30) mostra che $\{s_n\}$ è di Cauchy in X. Poiché X è completo, esiste x tale che

$$s_n \longrightarrow x. \tag{1.31}$$

Per (1.26) e (1.30) si ha

$$\|s_n\| \le \|x_1\| + \sum_{j=2}^{n} \|x_j\| < 1 + \varepsilon \sum_{j=2}^{n} 2^{-j+1},$$

quindi

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| < 1+\varepsilon. \tag{1.32}$$

Per (1.31) e per la continuità di Λ

$$\Lambda\, s_n \longrightarrow \Lambda\, x,$$

mentre per la seconda in (1.30)

$$\Lambda\, s_n \longrightarrow y,$$

dunque

$$y = \Lambda\, x.$$

Ricordando che $y\in\delta\, Y$ e (1.32), abbiamo provato che

$$\forall\ y \ \text{ con } \ \|y\|<\delta \ \text{ e } \ \forall\ \varepsilon>0 \ \ \exists\ x \ \text{ t.c. } \ \|x\|<1+\varepsilon \ \text{ e } \ \Lambda\, x = y,$$

i.e.

$$\delta\,\mathcal{V} \subset \Lambda((1+\varepsilon)\,\mathcal{U}) \quad \Leftrightarrow \quad (1+\varepsilon)^{-1}\delta\,\mathcal{V} \subset \Lambda(\mathcal{U}),$$

quindi

$$\bigcup_{\varepsilon>0}(1+\varepsilon)^{-1}\delta\,\mathcal{V} \subset \Lambda(\mathcal{U}).$$

Poiché

$$\bigcup_{\varepsilon>0}(1+\varepsilon)^{-1}\delta\,\mathcal{V} = \delta\,\mathcal{V}, \tag{1.33}$$

la tesi è completa.

L'uguaglianza (1.33) è di semplice verifica: si deve provare che

$$\bigcup_{\varepsilon>0}(1+\varepsilon)^{-1}\delta\,\mathcal{V} \supset \delta\,\mathcal{V},$$

ossia che

$$\forall\ y \ \text{ con } \ \|y\| < \delta \ \ \exists\ \varepsilon > 0 \ \text{ t.c. } \ \|y\| < \frac{\delta}{1+\varepsilon}.$$

Basta per questo prendere $\varepsilon = \dfrac{\delta}{a} - 1$, con $a \in \mathbb{R}$ tale che $\|y\| < a < \delta$. □

Corollario 1.1.15. *Siano X e Y due spazi di Banach e Λ una trasformazione lineare limitata da X in Y biettiva. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\|\Lambda\, x\| \geq \delta\, \|x\|. \tag{1.34}$$

Ossia Λ^{-1} è un'applicazione lineare limitata da Y in X e $\|\Lambda^{-1}\| \leq \delta^{-1}$.

Dimostrazione. Il teorema dell'applicazione aperta assicura che esiste un $\delta > 0$ tale che $\Lambda(\mathcal{U}) \supset \delta\,\mathcal{V}$. Quindi per ogni y, con $\|y\| < \delta$, esiste $x \in \mathcal{U}$ tale che $\Lambda\, x = y$. Per l'iniettività di Λ, tale x è unico. Dunque

$$x \in X \ : \ \|\Lambda\, x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x\| < 1,$$

i.e.

$$\|x\| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \|\Lambda\, x\| \geq \delta.$$

Per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ è dunque

$$\|\Lambda\, x\| = \|x\| \cdot \left\|\Lambda\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\right\| \geq \|x\|\, \delta.$$

Resta così provata la (1.34). La trasformazione Λ^{-1} è definita su Y da

$$\text{“}\Lambda^{-1}\, y = x \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda\, x = y\text{”}.$$

Λ^{-1} è lineare e (1.34) implica che $\|\Lambda^{-1}\| \leq \delta^{-1}$. □

Teorema 1.1.16 (del grafo chiuso)**.** *Siano X e Y due spazi di Banach e Λ un'applicazione lineare di X in Y. Condizione sufficiente affinché Λ sia continua è che valga la seguente proprietà.*

"Per ogni successione $\{x_k\} \subset X$ per la quale esistono i limiti

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} \Lambda\, x_n = y \tag{1.35}$$

è vero che $y = \Lambda\, x$".

Dimostrazione. Sia $X \times Y = \{(x, y) : x \in X;\ y \in Y\}$ il prodotto cartesiano di X e di Y. In $X \times Y$ definiamo l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare come al solito (per componenti) e definiamo una norma ponendo

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|, \qquad \forall\ (x, y) \in X \times Y.$$

Si verifica allora agevolmente che $X \times Y$ è uno spazio di Banach. Il grafo G di Λ è il sottoinsieme di $X \times Y$ formato dalle coppie $(x, \Lambda\, x)$, con $x \in X$. Dalla linearità di Λ segue che G è un sottospazio. La condizione (1.35) dice che G è chiuso. Poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio completo è completo, G con la topologia indotta da $X \times Y$ è uno spazio di Banach. Indichiamo con P e Q le applicazioni:

$$P\ :\ \begin{array}{ccc} G & \to & X \\ (x, \Lambda\, x) & \mapsto & x \end{array}; \qquad Q\ :\ \begin{array}{ccc} G & \to & Y \\ (x, \Lambda\, x) & \mapsto & \Lambda\, x \end{array}$$

È immediato verificare che P e Q sono continue, P è inoltre biettiva. Per il Corollario 1.1.15, P^{-1} è allora continua. Essendo inoltre $\Lambda = Q \circ P^{-1}$ si conclude che Λ è continua. $\square$

2. Il teorema di Hahn–Banach

Teorema 1.2.1 (di Hahn–Banach)**.** *Se G è un sottospazio di uno spazio vettoriale normato E e se g è un funzionale lineare limitato su G, allora g può essere esteso ad un funzionale lineare f su E tale che $\|f\| = \|g\|$.*

Alla dimostrazione premettiamo alcuni commenti. Innanzitutto dire (nella situazione più generale) che una funzione f è una estensione di g significa che l'insieme di definizione di f include l'insieme di definizione di g e che $f(x) = g(x)$, per ogni x nel dominio di g. In secondo luogo le norme $\|g\|$ ed $\|f\|$ sono calcolate rispetto ai domini di g ed f;

esplicitamente:

$$\|g\| = \sup\left\{\frac{|g(x)|}{\|x\|} \,:\, x \in G\right\}, \qquad \|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} \,:\, x \in E\right\}.$$

Dimostreremo il teorema di Hahn–Banach in due passi, supponendo in successione:

i) siano E uno spazio vettoriale reale, g un'applicazione lineare a valori reali soddisfacente opportune condizioni;

ii) siano E uno spazio vettoriale reale normato, g un'applicazione lineare continua a valori reali.

Il "cuore" della dimostrazione del teorema è nel primo passo i), il punto ii) è un importante corollario di i).

Per la dimostrazione del teorema si fa ricorso al lemma di Zorn che ricordiamo qui di seguito dopo aver ricordato alcune nozioni della teoria degli insiemi ordinati.

- Sia $(P, \leq)$ un insieme munito di una relazione d'ordine (parziale). Diciamo che un sottoinsieme $Q \subset P$ è *totalmente ordinato* se per ogni $a, b \in Q$ si ha almeno una delle relazioni $a \leq b$ o $b \leq a$.
- Sia Q un sottoinsieme di P, diciamo che $c \in P$ è un *maggiorante* di Q se per ogni $a \in Q$ si ha $a \leq c$.
- Diciamo che $m \in P$ è un *elemento massimale* di P se, per ogni $x \in P$ tale che $m \leq x$, si ha $x = m$.
- Infine diciamo che P è *induttivo* se ogni sottoinsieme totalmente ordinato di P ammette un maggiorante.

Lemma 1.2.2 (di Zorn). *Ogni insieme ordinato, induttivo, non vuoto ammette elemento massimale*[3].

Teorema 1.2.3 (di Hahn–Banach - forma analitica). *Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $p : E \to \mathbb{R}$ un'applicazione per la quale valgano le seguenti condizioni:*

$$p(\lambda x) = \lambda\, p(x) \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda > 0 \tag{2.1}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\, x, y \in E. \tag{2.2}$$

Sia inoltre $G \subset E$ un sottospazio vettoriale e $g : G \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che:

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in G. \tag{2.3}$$

[3]Si può trovare una dimostrazione del lemma di Zorn a partire dall'assioma della scelta in N. Dunford–J. Schwart, "Linear operation" vol. 1, Teorema 1.2.7

Allora esiste $f : E \to \mathbb{R}$ lineare che prolunga g, cioè

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in G$$

e tale che

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

Dimostrazione. Un'applicazione lineare h a valori reali definita su un sottospazio di E è completamente individuata da tale sottospazio, che denoteremo $D(h)$, e dalla legge $h : D(h) \to \mathbb{R}$. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{P} = \left\{ \quad h : D(h) \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{array}{l} \text{i) } D(h) \text{ è un sottospazio vettoriale di } E; \\ \text{ii) } G \subset D(h); \\ \text{iii) } h \text{ è lineare;} \\ \text{iv) } h \text{ prolunga } g; \\ \text{v) } h(x) \leq p(x), \text{ per ogni } x \in D(h) \end{array} \right\}$$

Muniamo $\mathcal{P}$ della relazione d'ordine:

$$h_1 \leq h_2 \quad \Leftrightarrow \quad D(h_1) \subset D(h_2) \;\; \text{e} \;\; h_2 \;\; \text{prolunga} \;\; h_1. \tag{2.4}$$

È chiaro che $\mathcal{P}$ non è vuoto poiché $g \in \mathcal{P}$. Proviamo che $\mathcal{P}$ è induttivo.

Sia $Q = \{h_i\}_{i \in I}$, dove I è un arbitrario insieme di indici, un insieme totalmente ordinato di elementi di $\mathcal{P}$. Definiamo

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \;\; \text{e} \;\; h(x) = h_i(x) \;\; \text{se} \;\; x \in D(h_i).$$

Si verifica che questa definizione ha senso, i.e. che $D(h)$ è un sottospazio di E, $h(x)$ è univocamente definito per ogni $x \in D(h)$, h appartiene a $\mathcal{P}$ ed è un maggiorante di Q.
Per il lemma di Zorn, $\mathcal{P}$ ammette un elemento massimale che denotiamo f. Proviamo che il dominio di f è E; ciò completerà la dimostrazione.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $\mathcal{D}(f) \subsetneqq E$. Sia $x_0 \in E \setminus \mathcal{D}(f)$. Definiamo un'applicazione h ponendo:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(h) & = \quad \mathcal{D}(f) + \mathbb{R}\, x_0; \\ h(x + t\, x_0) & = \quad f(x) + t\, \alpha, \qquad x \in \mathcal{D}(f),\; t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ove α è una costante che sarà scelta in modo tale che $h \in \mathcal{P}$. A tal fine dovrà essere:

$$h(x + t\, x_0) \leq p(x + t\, x_0) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(f),\; \forall\, t \in \mathbb{R},$$

vale a dire

$$f(x) + t\, \alpha \leq p(x + t\, x_0) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(f),\; \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Grazie all'ipotesi (2.1), è sufficiente verificare che (2.5) vale per $t = 1$ e per $t = -1$, ossia che:

$$\begin{cases} f(x) + \alpha & \leq & p(x + x_0), & \forall\, x \in \mathcal{D}(f) \\ f(x) - \alpha & \leq & p(x - x_0), & \forall\, x \in \mathcal{D}(f). \end{cases} \tag{2.6}$$

Resta così da provare che è possibile scegliere α in modo tale che

$$f(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \qquad \forall\, y \in \mathcal{D}(f),$$

$$\alpha \leq p(x + x_0) - f(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(f).$$

Quindi

$$\sup_{y \in \mathcal{D}(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in \mathcal{D}(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}.$$

Una tale scelta è possibile poiché vale

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(f),\ \forall\, y \in \mathcal{D}(f);$$

infatti, grazie a (2.2), risulta:

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Si conclude che f è maggiorata da h e che $f \neq h$; ciò contraddice la massimalità di f. $\square$

Notazioni. *Indichiamo con E' il duale topologico di E, cioè lo spazio delle applicazioni $E \to \mathbb{R}$ lineari e continue. E' è munito della norma*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|_E} \right) \right| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \tag{2.7}$$

Corollario 1.2.4. *Sia G un sottospazio vettoriale di E e sia $g : G \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare continua di norma $\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\|=1}} g(x)$. Allora esiste $f \in E'$ che prolunga g e tale che $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Dimostrazione. Applicare il Teorema 1.2.3 con $p(x) = \|g\|_{G'} \cdot \|x\|$. $\square$

Corollario 1.2.5. *Per ogni $x_0 \in E$ esiste $f_0 \in E'$ tale che*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \ \text{ e } \ \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$$

(ricordiamo che $\langle f_0, x_0 \rangle := f_0(x_0)$).

Dimostrazione. Applicare il Corollario 1.2.4 con $G = \mathbb{R}\, x_0$ e $g(t\, x_0) = t\, \|x_0\|^2$, con $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Corollario 1.2.6. *Per ogni $x \in E$ si ha:*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E'\\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{f\in E'\\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x\rangle|. \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Supponiamo $x_0 \neq 0$. Evidentemente da

$$|\langle f, x_0\rangle| \le \|f\| \cdot \|x_0\| \qquad \forall\, f \in E',\ \forall\, x_0 \in E$$

segue

$$\sup_{\substack{f\in E'\\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x_0\rangle| \le \|x_0\|.$$

D'altra parte, per il Corollario 1.2.5, sappiamo che esiste $f_0 \in E'$ tale che $\|f_0\| = \|x_0\|$ e $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$. Poniamo:

$$f_1 = \|x_0\|^{-1} f_0$$

di modo che

$$\|f_1\| = 1$$

e $\langle f_1, x_0\rangle = \|x_0\|^{-1}\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|$. □

Forme geometriche del teorema di Hahn–Banach

Sia E uno spazio vettoriale normato.

Definizione 1.2.7. *Chiamasi "iperpiano" un insieme della forma*

$$H = \{x \in E \,:\, f(x) = \alpha\},$$

dove f è una forma lineare (non necessariamente continua: quando $\dim E = +\infty$ *esistono sempre delle forme lineari non continue) su E, non identicamente nulla ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dice che H è l'iperpiano di equazione* $[f = \alpha]$.

Proposizione 1.2.8. *L'iperpiano di equazione* $[f = \alpha]$ *è chiuso se e solo se f è continua.*

Dimostrazione. È chiaro che se f è continua l'insieme $H = f^{-1}\{\alpha\}$ è chiuso. Reciprocamente, supponiamo che l'iperpiano $H = [f = \alpha]$ sia chiuso, allora il complementare $\complement H$ è aperto e non vuoto ($f \not\equiv 0$).

Sia $x_0 \in \complement H$ e supponiamo (per fissare le idee) che $f(x_0) < \alpha$. Poiché $\complement H$ è aperto, esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset \complement H$, dove $B(x_0, r) = \{x \in E \,:\, \|x - x_0\| < r\}$. Proveremo che

$$f(x) < \alpha \ \ \forall\, x \in B(x_0, r). \tag{2.9}$$

Se così non fosse, esisterebbe $x_1 \in B(x_0, r)$ tale che $f(x_1) > \alpha$; allora il segmento

$$\{x_t = (1-t)\,x_0 + t\,x_1;\ t \in [0,1]\}$$

sarebbe contenuto in $B(x_0, r)$ e dunque $f(x_t) \neq \alpha$, per ogni $t \in [0,1]$. Ma l'equazione $f(x_t) = \alpha$, i.e.

$$(1-t)\,f(x_0) + t\,f(x_1) = \alpha$$

è risolubile[4]:

$$t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \in [0,1].$$

Si è pervenuti ad un assurdo negando (2.9). Quindi (2.9) è provata. Poiché

$$B(x_0, r) = x_0 + r\,B(x_0, 1),$$

la (2.9) si riscrive nella forma:

$$f(x_0) + r\,f(\widetilde{x}) < \alpha \qquad \forall\,\widetilde{x} \in B(0,1),$$

$$f(\widetilde{x}) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r} \qquad \forall\,\widetilde{x} \in B(0,1)$$

e allora

$$\|f\| \leq \frac{\alpha - f(x_0)}{r}.$$

□

Lemma 1.2.9 (Jauge di un covesso)**.** *Sia $C \subset E$ un convesso aperto con $0 \in C$. Per ogni $x \in E$ si pone*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0\ :\ \alpha^{-1}\,x \in C\}$$

(p si dice la jauge di C). Allora p verifica:

1) *$p(\lambda\,x) = \lambda\,p(x)$, per ogni $\lambda > 0$;*
2) *$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, per ogni $x, y \in E$;*
3) *esiste M tale che $0 \leq p(x) \leq M\,\|x\|$, per ogni $x \in E$;*
4) *$C = \{x \in E\ :\ p(x) < 1\}$.*

Dimostrazione.

[4]Osserviamo che $f(x_1) > \alpha$ e $f(x_0) < \alpha$ implicano

$$0 < \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{\alpha - f(x_0)}{(f(x_1) - \alpha) + (\alpha - f(x_0))} < 1$$

1) Sia $\lambda > 0$. Allora

$$p(\lambda\, x) = \inf\{\alpha > 0\,:\,\alpha^{-1}\,\lambda\, x \in C\} =$$
$$(\text{poniamo } \alpha^{-1}\,\lambda = \beta^{-1},\ \text{dunque } \alpha = \lambda\,\beta)$$
$$= \inf\{\lambda\,\beta > 0\,:\,\beta^{-1}\,x \in C\} =$$
$$= \lambda \inf\{\beta > 0\,:\,\beta^{-1}\,x \in C\} = \lambda\, p(x).$$

3) Poiché C è un aperto contenente 0, esiste $r > 0$ tale che $B_r = \{\|x\| < r\} \subset C$. Quindi

$$\inf\{\alpha > 0\,:\,\alpha^{-1}\,x \in C\} \leq \inf\{\alpha > 0\,:\,\|\alpha^{-1}x\| < r\} =$$
$$= \inf\left\{\alpha > 0\,:\,\alpha > \frac{\|x\|}{r}\right\} = \frac{\|x\|}{r}.$$

Dunque $p(x) \leq \dfrac{\|x\|}{r} = M\,\|x\|$, $M = \dfrac{1}{r}$.

4) Sia $x \in C$, poiché C è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(1+\varepsilon)\,x \in C \;\Rightarrow\; (1+\varepsilon)^{-1} \in \{\alpha\,:\,\alpha^{-1}\,x \in C\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1,$$

quindi

$$x \in C \;\Rightarrow\; p(x) < 1.$$

Viceversa:

$$p(x) < 1 \;\Rightarrow\; \inf\{\alpha > 0\,:\,\alpha^{-1}\,x \in C\} < 1 \;\Rightarrow$$

(per la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore)

$$\Rightarrow\; \exists\; \alpha > 0,\ \alpha < 1\ \text{ tale che}$$
$$\alpha^{-1}\,x \in C; \qquad 0 \in C \text{ convesso.}$$

Dalle due ultime relazioni segue

$$x = \alpha\,(\alpha^{-1}\,x) + (1-\alpha)\cdot 0 \in C,$$

quindi

$$p(x) < 1 \;\Rightarrow\; x \in C$$

e 4) è provato.

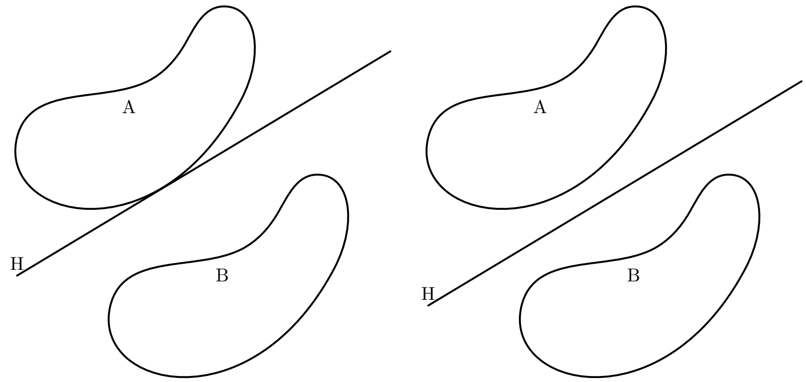
2) Siano $x, y \in E$, $\varepsilon > 0$, consideriamo $p\Big(\dfrac{x}{p(x)+\varepsilon}\Big)$ e $p\Big(\dfrac{y}{p(y)+\varepsilon}\Big)$.

Per il punto 1) abbiamo

$$p\Big(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\Big) = \frac{1}{p(x)+\varepsilon}\,p(x) < 1$$

e
$$p\Big(\frac{y}{p(y)+\varepsilon}\Big) = \frac{1}{p(y)+\varepsilon}\, p(y) < 1,$$
allora, per il punto 4)
$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon},\ \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C,$$
inoltre, poiché C è connesso, abbiamo
$$\frac{t\,x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)\,y}{p(y)+\varepsilon} \in C, \quad 0 \le t \le 1. \tag{2.10}$$
Scegliendo
$$t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\,\varepsilon}$$
da (2.10) segue:
$$\frac{1}{p(x)+p(y)+2\,\varepsilon}\, x + \frac{1}{p(x)+p(y)+2\,\varepsilon}\, y \in C \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\,\varepsilon} \in C.$$
Per il punto 4)
$$p\Big(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\,\varepsilon}\Big) < 1,$$
quindi per il punto 1)
$$\frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\,\varepsilon} < 1.$$
Per l'arbitrarietà di ε:
$$p(x+y) \le p(x) + p(y).$$
La dimostrazione è conclusa. □

Definizione 1.2.10. *Siano A e B sottoinsiemi di uno spazio vettoriale normato E. Si dice che l'iperpiano H di equazione $[f=\alpha]$ "separa A e B in senso debole" se:*
$$f(x) \le \alpha \ \ \forall\, x \in A; \qquad f(x) \ge \alpha \ \ \forall\, x \in B.$$
Si dice che H "separa A e B in senso forte" se esiste $\varepsilon > 0$ tale che:
$$f(x) \le \alpha - \varepsilon \ \ \forall\, x \in A; \qquad f(x) \ge \alpha + \varepsilon \ \ \forall\, x \in B.$$



A e B separati debolmente *A e B separati fortemente*

Lemma 1.2.11. *Sia $C \subset E$, C convesso, aperto e non vuoto e sia $x_0 \in E$, con $x_0 \notin C$. Allora esiste $f \in E'$ tale che $f(x) < f(x_0)$, per ogni $x \in C$. In particolare l'iperpiano H di equazione $[f(x) = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ e C in senso debole.*

Dimostrazione. Per traslazione possiamo sempre supporre che $0 \in C$ e introdurre la jauge di C, che denoteremo p.

Consideriamo $G = \mathbb{R}\, x_0$ e la forma lineare g definita su G da

$$g(t\,x_0) = t, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Proviamo che:

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in G, \quad \text{i.e.} \quad g(t\,x_0) \leq p(t\,x_0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Infatti, se $t < 0$, $g(t\,x_0) = t < 0$ mentre $p(t\,x_0) \geq 0$, essendo $p(t\,x_0)$ l'estremo inferiore di un insieme di α positivi. Se $t \geq 0$, $p(t\,x_0) = t\,p(x_0)$ (proprietà 1) del Lemma 1.2.9), ove $p(x_0) \geq 1$ poiché $x_0 \notin C$ (proprietà 4) del Lemma 1.2.9). Quindi

$$p(t\,x_0) \geq t = g(t\,x_0),$$

(2.12) è dunque provata.

Per il teorema di Hahn–Banach esiste una forma lineare f su E che prolunga g e tale che:

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in E. \tag{2.13}$$

La forma lineare f è continua per (2.12) e per la proprietà 3) del Lemma 1.2.9 si ha

$$f(x) \leq p(x) \leq M\,\|x\|, \quad \forall\, x \in E.$$

Resta da provare che $f(x) \leq f(x_0)$, per ogni $x \in C$, cioè che $H = [f = f(x_0)]$ separa in senso debole $\{x_0\}$ e C. Per (2.13), per la proprietà 4) del Lemma 1.2.9 e poiché f prolunga g, abbiamo

$$f(x) \leq p(x) < 1 = g(x_0) = f(x_0), \quad \forall x \in C.$$

□

Teorema 1.2.12 (di Hahn–Banach - prima forma geometrica)**.** *Sia E uno spazio vettoriale normato. Siano $A \subset E$, $B \subset E$ due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti. Supponiamo A aperto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso debole.*

Dimostrazione. Poniamo $C = A \setminus B$. Abbiamo:
- C è convesso (banale verifica).
- C è aperto, perché $C = \bigcup_{y \in B} (A \setminus \{y\})$.
- $0 \notin C$, perché $A \cap B = \emptyset$.

Per il Lemma 1.2.11, esiste $f \in E'$ tale che

$$f(z) \leq 0 \quad \forall z \in C,$$

vale a dire

$$f(x - y) \leq 0 \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B$$

i.e.

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B.$$

Si sceglie ora $\alpha \in \mathbb{R}$ soddisfacente:

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Resta così provato che l'iperpiano H di equazione $[f = \alpha]$ separa A e B in senso debole. □

Teorema 1.2.13 (di Hahn–Banach - seconda forma geometrica)**.** *Siano $A \subset E$ e $B \subset E$ due insiemi convessi, non vuoti e disgiunti. Si suppone che A sia chiuso e che B sia compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso forte.*

Dimostrazione. Per $\varepsilon > 0$ si pone

$$A_\varepsilon = A + S(0, \varepsilon), \qquad B_\varepsilon = B + S(0, \varepsilon)$$

di modo che A_ε e B_ε sono aperti, convessi e non vuoti. Inoltre, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, A_ε e B_ε sono disgiunti. Per il teorema di

Hahn–Banach - prima forma geometrica, esiste un iperpiano chiuso di equazione $[f=\alpha]$ che separa A_ε e B_ε in senso debole. Si ha dunque:

$$f(x+\varepsilon\, z)\le\alpha\le f(y+\varepsilon\,\widetilde{z}),\quad \forall\, x\in A,\ \forall\, y\in B,\ \forall\,\varepsilon>0,\ \forall\, z,\widetilde{z}\in B(0,1).$$

Quindi, poiché

$$\sup_{\|z\|\le 1} f(x+\varepsilon\, z)=f(x)+\varepsilon\sup_{\|z\|\le 1} f(z);$$

$$\inf_{\|z\|\le 1} f(x+\varepsilon\, z)=\inf_{\|z\|\le 1}(f(x)+\varepsilon\, f(z))=f(x)-\varepsilon\sup_{\|z\|\le 1} f(z),$$

abbiamo

$$f(x)+\varepsilon\,\|f\|\le\alpha\le f(y)-\varepsilon\,\|f\|\quad \forall\, x\in A,\ \forall\, y\in B.$$

Poiché $\|f\|\neq 0$ questa stima prova che A e B sono separati in senso forte dall'iperpiano $f=\alpha$. □

Corollario 1.2.14. *Sia $F\subset E$ un sottospazio vettoriale tale che $\overline{F}\neq E$. Allora esiste $f\in E'$, $f\neq 0$ tale che*

$$\langle f,x\rangle=0,\qquad \forall\, x\in F.$$

Dimostrazione. Sia $x_0\notin\overline{F}$. Si applica il Teorema 1.2.13 con $A=\overline{F}$, $B=\{x_0\}$. Dunque esiste $f\in E'$, $f\neq 0$ tale che l'iperpiano di equazione $[f=\alpha]$ separa in senso forte $\overline{F}$ e $\{x_0\}$. Si ha:

$$\langle f,x\rangle<\alpha<\langle f,x_0\rangle,\qquad \forall\, x\in F;$$

quindi

$$\langle f,\lambda\, x\rangle<\alpha,\qquad \forall\, x\in F,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R};$$

i.e.

$$\lambda\,\langle f,x\rangle<\alpha,\qquad \forall\, x\in F,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}.$$

Ciò implica che $\langle f,x\rangle=0$, per ogni $x\in F$. □

CAPITOLO 2

Teoria elementare delle distribuzioni

Verso la fine del 1800 l'ingegnere Heaviside presentò le sue regole di "calcolo simbolico" in un'audace memoria in cui calcoli matematici assai poco giustificati vengono utilizzati per risolvere problemi di fisica.

Questo "calcolo simbolico" o "operazionale" non ha cessato di svilupparsi in seguito ed è servito di base agli studi teorici dell'elettricità.

Gli ingegneri l'utilizzavano sistematicamente, ciascuno secondo una personale concezione, con la coscienza più o meno tranquilla: era diventata una tecnica "che non era rigorosa, ma che riusciva bene". Dopo l'introduzione, per opera di Dirac, della famosa "funzione" $\delta(x)$ che sarebbe nulla ovunque eccetto che per $x = 0$, infinito per $x = 0$ ed inoltre tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$, le formule del "calcolo simbolico" divennero ancora più inaccettabili per i matematici. Scrivere che la funzione di Heaviside $H(x)$ uguale a 0 per $x < 0$ e ad 1 per $x \geq 0$, ha per derivata la funzione di Dirac $\delta(x)$, la cui definizione è essa stessa contraddittoria, e parlare delle derivare $\delta'(x)$, $\delta''(x), \ldots$ di questa funzione priva di esistenza reale, non è cosa consentita al rigore matematico. D'altro canto, come poteva spiegarsi il successo di questi calcoli?

Quando si presenta una situazione di questo genere è ben difficile che non nasca una nuova teoria matematica che giustifica, in una forma modificata, il linguaggio dei fisici. Si ha così un importante progresso sia nella matematica che nella fisica.

In effetti furono date numerose giustificazioni del calcolo simbolico, ma se erano matematicamente rigorose non soddisfacevano i fisici perché o passavano attraverso la trasformata di Laplace, modificando la questione completamente, oppure eliminavano la funzione δ e le sue derivate rendendo impossibili procedimenti il cui successo era incontestabile.

La "teoria delle distribuzioni", elaborata da Laurent Schwartz nel 1950–51, ha finalmente messo ordine nell'intrigata materia: è una teoria matematica rigorosa che ha giustificato il "calcolo simbolico" degli ingegneri e dei fisici e che è stata, ed è tutt'ora, utilizzata in numerosi rami della matematica pura ed applicata.

1. Definizioni e proprietà di base

Definizione 2.1.1. *$\mathcal{D}(\Omega)$, dove Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, denota lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni a valori complessi definite in Ω, indefinitamente derivabili, a supporto compatto, munito della topologia che induce la seguente nozione di convergenza: una successione $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}(\Omega)$ converge ad una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se*

i) *i supporti delle φ_j sono contenuti in uno stesso insieme compatto indipendente da j;*
ii) *le derivate di ogni ordine delle φ_j convergono uniformemente alle derivate corrispondenti di φ.*

Osservazione 2.1.2. *$\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ coincidono come insiemi. Si usa la scrittura $\mathcal{D}(\Omega)$ per ricordare che si dota questo insieme di una topolgia, quella che induce la nozione di "convergenza per successioni" definita da* i) *e* ii). *Ovviamente è possibile definire esplicitamente la topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$; ciò però richiede conoscenze approfondite di topologia (quali ad esempio i limiti induttivi di limiti proiettivi di spazi numerabilmente normati) che non rientrano fra i requisiti di questo Corso.*

D'altro canto, la sola nozione di "convergenza per successioni" ci consente di acquisire una conoscenza delle distribuzioni tale da affrontare con disinvoltura questioni, anche molto delicate, di teoria delle equazioni alle derivate parziali.

Lo spazio $\mathcal{D}$ non è vuoto: un esempio di funzione $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & se \quad |x| \geq 1 \\ c\, e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & se \quad |x| < 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

È immediato verificare che $\mathcal{D}$ è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{C}$ ed è anche un'algebra per la moltiplicazione ordinaria, poiché se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$, allora $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{D}$.

Più generalmente, se $\varphi \in \mathcal{D}$ e ψ è una funzione indefinitamente derivabile a supporto non necessariamente limitato, allora $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{D}$ ed il prodotto $\varphi \cdot \psi$ ha supporto contenuto nell'intersezione dei supporti di φ e *ψ.*

Esempio 2.1.3. *Sia φ la funzione definita in* (1.1). *La successione* $\varphi_\nu = \dfrac{1}{\nu}\varphi$ *converge a* 0 *in* $\mathcal{D}$. *La successione* $\psi_\nu(x) = \dfrac{1}{\nu}\varphi\Big(\dfrac{x}{\nu}\Big)$ *converge uniformemente a* 0 *insieme a tutte le sue derivate su tutto* $\mathbb{R}^n$, *ma non converge a* 0 *in* $\mathcal{D}$, *poiché non esiste un compatto* K *contenente il supporto di tutte le* ψ_ν.

Proposizione 2.1.4. *Lo spazio* $\mathcal{D}$ *non è metrizzabile.*

In altre parole non si può definire in $\mathcal{D}$ una funzione distanza $d(\varphi, \psi)$ con le proprietà standard tale che la convergenza di una successione $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a φ in $\mathcal{D}$ sia equivalente alla relazione $\lim\limits_{j\to+\infty} d(\varphi, \varphi_j) = 0$.

La dimostrazione di questa affermazione si fonda sul seguente teorema.

Teorema 2.1.5. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico. Se per ogni* $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = \{x_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *è una successione di elementi di* E *soddisfacente*

i) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$, $x_j^{(k)} \longrightarrow \widetilde{y}_k$ *in* (E, d) *per* $j \to +\infty$;
ii) $\widetilde{y}_k \longrightarrow y$ *in* (E, d) *per* $k \to +\infty$;

allora è possibile scegliere in $\{x_j^{(1)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un elemento* $x_{j_1}^{(1)}$, *in* $\{x_j^{(2)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un elemento* $x_{j_2}^{(2)}$, ..., *in* $\{x_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un elemento* $x_{j_k}^{(k)}$, *etc., in modo tale che la successione* $\{x_{j_k}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converga in* (E, d) *ad* y.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left(x_j^{(1)}\right)_{j\in\mathbb{N}} & = & x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_j^{(1)}, \dots & \longrightarrow & \widetilde{y}_1 & \text{per } j \to +\infty \\
\left(x_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}} & = & x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_j^{(2)}, \dots & \longrightarrow & \widetilde{y}_2 & \text{per } j \to +\infty \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\left(x_j^{(k)}\right)_{j\in\mathbb{N}} & = & x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_j^{(k)}, \dots & \longrightarrow & \widetilde{y}_k & \text{per } j \to +\infty \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \downarrow & \\
 & & & & y &
\end{array}
$$

Dimostrazione. Lasciata come esercizio. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 2.1.4. Supponiamo che lo spazio vettoriale topologico $\mathcal{D}$ sia metrizzabile: sia d una metrica in $\mathcal{C}_c^\infty$ tale che

$$(\mathcal{C}_c^\infty, d) = \mathcal{D}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\varphi_j^{(k)}(x) = \frac{1}{j}\,\varphi\Big(\frac{x}{k}\Big),$$

dove φ è la funzione (1.1). Per quanto osservato nell'Esempio 2.1.3:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Big\{\varphi_j^{(1)}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} & = & \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_j^{(1)}, \dots & \longrightarrow & 0 & \text{in } \mathcal{D} \\
\Big\{\varphi_j^{(2)}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} & = & \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_j^{(2)}, \dots & \longrightarrow & 0 & \text{in } \mathcal{D} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Big\{\varphi_j^{(k)}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} & = & \varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \dots, \varphi_j^{(k)}, \dots & \longrightarrow & 0 & \text{in } \mathcal{D} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \downarrow & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Poiché abbiamo supposto che $\mathcal{D}$ sia metrizzabile, esiste una distanza d tale che

$$\begin{array}{ccccccc}
\Big\{\varphi_j^{(1)}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} & = & \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_j^{(1)}, \dots & \longrightarrow & 0 & \text{in } (\mathcal{C}_c^\infty, d) \\
\Big\{\varphi_j^{(2)}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} & = & \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_j^{(2)}, \dots & \longrightarrow & 0 & \text{in } (\mathcal{C}_c^\infty, d) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Big\{\varphi_j^{(k)}\Big\}_{j\in\mathbb{N}} & = & \varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \dots, \varphi_j^{(k)}, \dots & \longrightarrow & 0 & \text{in } (\mathcal{C}_c^\infty, d) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \downarrow & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Per il Teorema 2.1.5, esiste $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\varphi_{j_k}^{(k)} \longrightarrow 0, \quad \text{in } (\mathcal{C}_c^\infty, d)$$

e quindi

$$\varphi_{j_k}^{(k)} \longrightarrow 0, \quad \text{in } \mathcal{D}.$$

Ma quest'ultima relazione è falsa poiché:

$$\operatorname{supp} \varphi_{j_k}^{(k)} = \overline{S(0,k)},$$

quindi non esiste un compatto che contenga il supporto di $\varphi_{j_k}^{(k)}$ per ogni k, come richiesto dalla convergenza in $\mathcal{D}$. $\square$

Definizione 2.1.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si chiama "distribuzione in Ω" ogni funzionale T lineare continuo sullo spazio vettoriale topologico $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Ciò significa che una distribuzione T associa ad ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ un numero complesso $T(\varphi)$, che denoteremo anche $\langle T, \varphi\rangle$, con le proprietà:

i) $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$, *per ogni* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$;
ii) $T(\lambda\,\varphi) = \lambda\, T(\varphi)$, *per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *per ogni* $\lambda \in \mathbb{C}$;
iii) *se* $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ *in* $\mathcal{D}$, *la successione di numeri complessi* $T(\varphi_j)$ *converge al numero complesso* $T(\varphi)$.

Le distribuzioni su Ω costituiscono a loro volta uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, denotato $\mathcal{D}'(\Omega)$.[1] *La somma $T_1 + T_2$ di due elementi di $\mathcal{D}'(\Omega)$ ed il prodotto λT, dove $\lambda \in \mathbb{C}$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sono definiti da:*

i') $\langle T_1 + T_2, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle$;
ii') $\langle \lambda\, T, \varphi\rangle = \lambda\,\langle T, \varphi\rangle$.

Osserviamo che per i), ii), i'), ii') *l'applicazione:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ (T, \varphi) & \mapsto & \langle T, \varphi\rangle \end{array}$$

è una forma bilineare.

Lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ è una parte dello spazio $\mathcal{D}^*(\Omega)$ duale di $\mathcal{D}(\Omega)$, insieme di tutti i funzionali lineari, continui o no, su $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mediante l'assioma della scelta si può dimostrare l'esistenza di funzionali lineari discontinui su $\mathcal{D}(\Omega)$, ma non se ne può citare esplicitamente alcuno.

Esempi.

i) ***La distribuzione δ di Dirac***. *Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ poniamo:*

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

L'applicazione $\delta_{x_0} : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ è lineare. Sia $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}$, $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}$. Allora, in particolare si ha $\varphi_j(x_0) \longrightarrow 0$. Quindi

$$\delta_{x_0}(\varphi_j) = \varphi_j(x_0) \longrightarrow 0.$$

Si è così provato che δ_{x_0} è una distribuzione, detta "distribuzione di Dirac a x_0". Per $x_0 = 0$ si pone $\delta_0 = \delta$.

---

[1] Lo zero di $\mathcal{D}'(\Omega)$ è l'applicazione che mappa ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nel numero zero. Inoltre $T_1 = T_2$ se e solo se $T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

ii) ***Distribuzione funzione***. *Sia f una funzione localmente sommabile: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo*

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

L'integrale ha senso poiché in realtà si integra non su $\mathbb{R}^n$, ma sul supporto compatto di φ_ν; su tale supporto f è sommabile e φ è limitata. Dunque $f \cdot \varphi$ è una funzione sommabile. D'altro canto $\varphi \to T_f(\varphi)$ è un funzionale lineare. Resta da vedere che questo funzionale è continuo su $\mathcal{D}$. Supponiamo che $\{\varphi_j\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}$, convergente a 0 in $\mathcal{D}$. Esiste quindi un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ tale che supp $\varphi_j \subset K$, per ogni j. Si ha quindi:

$$|T_f(\varphi_j)| = \left| \int f(x)\,\varphi_j(x)\,dx \right| \leq \int_K |f(x)|\,dx \cdot \max|\varphi_j|.$$

Poiché $\max|\varphi_j| \longrightarrow 0$, il secondo membro tende a 0. Resta così provato che $T_f \in \mathcal{D}'$. Si scriverà anche $f(\varphi)$ in luogo di $T_f(\varphi)$. Sicchè, per esempio, $1(\varphi) = \int \varphi$.

Osservazione 2.1.7. *Proveremo, vedi il teorema successivo, che l'applicazione:*

$$\begin{array}{cccc} i & : & L^1_{loc}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & & f & \mapsto & T_f \end{array}$$

è iniettiva. Ciò consente di identificare $L^1_{loc}(\Omega)$ col sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ costituito dalle distribuzioni T_f, cioè dalle distribuzioni funzione.

Teorema 2.1.8. *Due funzioni $f_1, f_2 \in L^1_{loc}$ definiscono la stessa distribuzione se e solo se $f_1 = f_2$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Se $f_1 = f_2$ q.o. allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:[2]

$$f_1\,\varphi = f_2\,\varphi \qquad \text{q.o.}$$

e quindi

$$\int f_1\,\varphi = \int f_2\,\varphi, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ciò è quanto dire

$$T_{f_1}(\varphi) = T_{f_2}(\varphi), \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di φ: $T_{f_1} = T_{f_2}$.

[2]Si omette talvolta Ω, qualora non essenziale

Abbiamo così provato che

$$f_1, f_2 \in L^1_{\rm loc}(\Omega), \quad f_1 = f_2 \ \text{ q.o.} \quad \Rightarrow \quad T_{f_1} = T_{f_2} \ \text{ in } \mathcal{D}'.$$

Dimostriamo ora il viceversa:

$$T_{f_1} = T_{f_2} \ \text{ in } \ \mathcal{D}' \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2 \ \text{ in } \ L^1_{\rm loc},$$

ossia

$$\int f_1\,\varphi = \int f_2\,\varphi, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2 \quad \text{q.o.}$$

Posto $f_1 - f_2 = f$, ciò equivale a provare che

$$f \in L^1_{\rm loc}, \quad \int f\,\varphi = 0 \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \text{q.o.} \tag{1.2}$$

Poniamo $\Lambda = \{\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \text{misurabili, limitate, supp } \lambda \text{ compatto}\}$. Evidentemente:

$$\mathcal{D} \subset \Lambda \subset L^1.$$

Come primo passo verso la dimostrazione di (1.2), proviamo:

$$f \in L^1_{\rm loc}, \quad \int f\,\varphi = 0 \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \int f\,\lambda = 0 \quad \forall\,\lambda \in \Lambda. \tag{1.3}$$

Sia dunque $\lambda \in \Lambda$. Indicato con J_ε un mollificatore, poniamo:

$$\lambda_h = \lambda * J_{\frac{1}{h}}, \qquad h \in \mathbb{N}.$$

Allora è ben noto che

j) $\lambda_h \in \mathcal{C}^\infty_c$;
jj) $\lambda_h \longrightarrow \lambda$ in L_1;
jjj) $|\lambda_h(x)| = \left| \int \lambda(x-y)\, J_{\frac{1}{h}}(y)\,dy \right| \leq \sup|\lambda| \left[\int J_{\frac{1}{h}} \right] = \sup|\lambda|$;
jv) supp $\lambda_h \subset$ supp $\lambda + S\Big(0, \dfrac{1}{h}\Big) \subset$ supp $\lambda + \overline{S(0,1)} := K$.

Per jj) esiste una sottosuccessione $\{\lambda_{h_\nu}\}$ di $\{\lambda_h\}$ tale che $\lambda_{h_\nu} \longrightarrow \lambda$ quasi ovunque. Inoltre per jjj) e jv):

$$|\lambda_{h_\nu}(x)| \leq \sup|\lambda|\,\chi_K(x)$$

e

$$|f(x)\,\lambda_{h_\nu}(x)| \leq |f(x)|\,\sup|\lambda|\,\chi_K(x);$$

si noti che il termine a destra appartiene a L^1 e non dipende da h_ν. Quindi per il teorema della convergenza dominata e per jj)

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int f\,\lambda_{h_\nu} = \int f\,\lambda. \tag{1.4}$$

Poiché, per j), $\{\lambda_{h_\nu}\} \subset \mathcal{D}$ e, per ipotesi $\int f\,\varphi = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\int f\,\lambda_{h_\nu} = 0 \qquad \forall\ \nu.$$

Dunque il termine a sinistra in (1.4) è zero. Rimane così provato che $\int f\,\lambda = 0$, cioè (1.3) è vera; dimostriamo ora la (1.2).

Sia $f \in L^1_{\text{loc}}$ tale che $\int f\,\varphi = 0$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$. Indicato con $r(x)$ il modulo e con $\omega(x)$ l'argomento del numero complesso $f(x)$, cosicchè:

$$f(x) = r(x)\,e^{\imath\,\omega(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

e fissato $a > 0$, sia λ la funzione così definita:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| > a \text{ oppure } f(x) = 0 \\ e^{-\imath\,\omega(x)} & \text{se} \quad |x| \leq a \text{ e } f(x) \neq 0 \end{cases}$$

La funzione λ è misurabile, $|\lambda(x)| \leq 1$, supp $\lambda \subset \overline{S(0,a)}$. Quindi $\lambda \in \Lambda$ e per (1.3)

$$\int f(x)\,\lambda(x)\,dx = 0.$$

Da (1.5):

$$\int f(x)\,\lambda(x)\,dx = \int_{|x|\leq a} r(x)\,dx = \int_{|x|\leq a} |f|,$$

dunque

$$\int_{|x|\leq a} |f| = 0.$$

Se l'integrale di una funzione non negativa è nullo, la funzione è uguale a zero quasi ovunque nell'insieme di integrazione. Quindi:

$$f(x) = 0 \ \text{ q.o. in } \overline{S(0,a)}.$$

Per l'arbitrarietà di a, $f(x) = 0$ quasi ovunque. □

Conseguenze

Se si conviene di identificare due funzioni localmente sommabili f e g allor quando sono uguali quasi ovunque, le distribuzioni costituiscono una generalizzazione della nozione di funzione localmente sommabile. Per questa ragione nel seguito "identifichiamo una funzione f localmente sommabile con il funzionale T_f che essa definisce" e scriveremo:

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle = \int f\,\varphi, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

In particolare il funzionale che ad ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ fa corrispondere il suo integrale $\int \varphi$ è una distribuzione che noi identifichiamo con la funzione $f(x) = 1$ per ogni x.

Osserviamo che non tutte le distribuzioni sono distribuzioni funzioni: "la distribuzione δ non è una distribuzione funzione".

Per provare questa affermazione è sufficiente provare che "non esiste una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}$ tale che $f = \delta$ in $\mathcal{D}'$", cioè tale che

$$\int f\,\varphi = \varphi(0), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Infatti, se esistesse una f siffatta, considerata una funzione $\psi \in \mathcal{D}$ soddisfacente:

$$\psi(x) = 0 \ \text{ se } \ |x| > 2; \ \ \psi(x) = 1 \ \text{ se } \ |x| < 1; \ \ 0 \le \psi(x) \le 1$$

e posto $\psi_\varepsilon(x) = \psi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, si avrebbe:

$$\int f(x)\,\psi_\varepsilon(x)\,dx = 1 \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \tag{1.6}$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f\,\psi_\varepsilon = 1,$$

mentre, essendo $|f(x)\,\psi_\varepsilon(x)| \le |f(x)|\,\chi_{S(0,2)}(x)$, dal teorema della convergenza dominata si ottiene:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f(x)\,\psi_\varepsilon(x)\,dx = \int f(x)\,\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(x)\,dx = 0,$$

contraddicendo così la (1.6).

Altri esempi di distribuzioni sono:

a) sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, il funzionale

$$T(\varphi) = \int f(x)\partial^\alpha \varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

è una distribuzione.

b) Se $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il funzionale

$$T(\varphi) = (\partial^\alpha\,\varphi)(x_0), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

è una distribuzione.

c) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ponga:

$$T(\varphi) = \sum_{j \ge 0} j!\varphi^{(j)}(j),$$

allora $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Nell'esempio c), si noti che, avendo φ supporto compatto, i termini della serie sono tutti nulli da un certo indice in poi, quindi la serie si riduce ad una somma finita, quale che sia $\varphi \in \mathcal{D}$; il numero degli addendi dipende ovviamente da φ.

La linearità di T è di immediata verifica. Resta da provare la continuità. Sia $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi_\nu \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Esiste allora un compatto di $\mathbb{R}$ che contiene il supporto di tutte le φ_ν; esiste quindi un intervallo $[-h, h]$ tale che

$$\text{supp } \varphi_\nu \subset [-h, h], \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Allora:

$$|T(\varphi_\nu)| = \Big| \sum_{j \le h} j! \varphi_\nu^{(j)}(j) \Big| \le h! \sum_{j \le h} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_\nu^{(j)}(x)|.$$

Poiché per ogni j, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_\nu^{(j)}(x)| \longrightarrow 0$ per $\nu \to \infty$, la somma tende a 0 per $\nu \to \infty$ e ciò prova la continuità di T.

2. Supporto e caratterizzazione

Definizione 2.2.1 (Restrizione di una distribuzione ad un aperto)**.** *Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia Ω' un sottoinsieme aperto di Ω. Chiamasi restrizione di T a $\mathcal{D}(\Omega')$ e scriveremo $T_{|\Omega'}$ l'applicazione $\mathcal{D}(\Omega') \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto T(\varphi)$.*

Definizione 2.2.2. *Siano $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e Ω' un sottoinsieme aperto di Ω. T è nulla in Ω', o, equivalentemente, la restrizione di T a Ω' è zero, se $T(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$. Scriveremo in tal caso:*

$$T_{|\Omega'} = 0.$$

Definizione 2.2.3. *Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si chiama "supporto di T" e verrà denotato supp T l'insieme:*

$$\complement \bigcup \Big\{ \Omega' \subset \Omega,\ \Omega' \text{ aperto},\ T_{|\Omega'} = 0 \Big\}.$$

Pertanto $x_0 \in \text{supp } T$ se e solo se non esiste un aperto $\Omega' \subset \Omega$ e contenente x_0 tale che $T_{|\Omega'} = 0$, ossia tale che $T(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$.

Ciò è quanto dire che $x_0 \in \text{supp } T$ se e solo se per ogni aperto $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' \supset \{x_0\}$, esiste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ tale che $T(\varphi) \neq 0$.

Si noti che supp T è un insieme chiuso: è il complementare di una unione di insiemi aperti.

Osservazione 2.2.4. *Dalla definizione di supporto di una distribuzione segue:*

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \textit{supp}\, T \cap \textit{supp}\, \varphi = \emptyset \quad \Rightarrow \quad T(\varphi) = 0.$$

Proposizione 2.2.5. *Se $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, allora supp $f =$ supp T_f.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega;\ \ f(x) \neq 0\}}$. Allora per ogni aperto Ω' contenente x_0 esiste $x_1 \in \Omega'$ tale che $f(x_1) \neq 0$. Supponiamo $\Re f(x_1) > 0$. Poiché f è continua esiste $\delta > 0$ tale che $\Re f(x) > 0$ per ogni $x \in S(x_1, \delta)$. Non è restrittivo supporre $S(x_1, \delta)$ contenuto in Ω'. Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}$ con supp φ contenuto in $S(x_1, \delta)$, $\varphi(x) = 1$ per ogni $x \in S\Big(x_1, \dfrac{\delta}{2}\Big)$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, per ogni x. Dunque:

$$\int \varphi(x)\, \Re f(x)\, dx = \int_{|x-x_1|<\delta} \varphi(x)\, \Re f(x)\, dx \geq$$

$$\geq \int_{|x-x_1|<\frac{\delta}{2}} \varphi(x)\, \Re f(x)\, dx = \int_{|x-x_1|<\frac{\delta}{2}} \Re f(x)\, dx > 0;$$

quindi

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int \varphi(x)\, \Re f(x)\, dx + \imath \int \varphi(x)\, \Im f(x)\, dx \neq 0.$$

Si è così provato che per ogni Ω' aperto, $\Omega' \ni x_0$, esiste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ tale che $T(\varphi) \neq 0$, ossia $x_0 \in \operatorname{supp} T_f$. Pertanto

$$\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} T_f.$$

Viceversa, se $x_0 \notin \operatorname{supp} f$ allora esiste un intorno aperto Ω' di x_0 tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega'$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ si ha quindi:

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0.$$

Dunque

$$T_{f|\Omega'} = 0: \qquad x_0 \notin \operatorname{supp} T_f.$$

$\square$

Osservazione 2.2.6. *Se $f \in L^1_{loc}$ il supporto di f come funzione non è definito. Non ha quindi senso chiedersi se il supporto di f come funzione è uguale al supporto di f come distribuzione.*

Esempi 2.2.7.

i) *supp* $\delta_{x_0} = \{x_0\}$.

ii) *Se per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *si pone:*

$$T(\varphi) = \int \varphi(x,x)\,dx,$$

allora si prova facilmente che $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ *e che* $\operatorname{supp} T = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$.

Teorema 2.2.8 (Caratterizzazione dei funzionali in $\mathcal{D}'$)**.** *Un funzionale lineare* T *su* $\mathcal{D}(\Omega)$ *è una distribuzione se e solo se per ogni compatto* $K \subset \Omega$ *esistono due costanti* c, h *tali che*

$$|T(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq h} \sup |D^\alpha \varphi(x)|, \tag{2.1}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *con supp* $\varphi \subset K$.

Se l'intero h può essere scelto indipendentemente dal compatto K, la distribuzione T si dice "di ordine finito" ed il più piccolo intero h per cui vale la stima del teorema si dice "ordine" di T.

Ad esempio, le distribuzioni degli esempi a) e b) nelle Conseguenze del Teorema 2.1.8, la distribuzione δ, la distribuzione ii) negli Esempi 2.2.7 hanno tutte ordine finito. La distribuzione c) nelle Conseguenze del Teorema 2.1.8 non ha ordine finito.

Dimostrazione. Proviamo che se T è un funzionale lineare su $\mathcal{D}$ soddisfacente (2.1), allora T è una distribuzione: per ipotesi T è un funzionale lineare su $\mathcal{D}'$; dobbiamo quindi solo provare che T è continuo. Sia $\{\varphi_\nu\}$ una successione convergente a 0 in $\mathcal{D}$. Esiste allora un compatto $K \subset \Omega$ tale che supp $\varphi_\nu \subset K$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ ed inoltre:

$$\sup |D^\alpha \varphi_\nu| \longrightarrow 0, \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Poiché vale (2.1) esistono costanti c ed h dipendenti da K e non da ν tali che

$$|T(\varphi_\nu)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq h} \sup |D^\alpha \varphi_\nu|.$$

Quando ν tende a $+\infty$, c e h rimangono fissi mentre $\sup |D^\alpha \varphi_\nu| \longrightarrow 0$. Ne segue che $T(\varphi_\nu)$ tende a 0.

Dimostriamo ora che se un funzionale T non soddisfa (2.1) allora T non è una distribuzione. L'ipotesi "T non soddisfa (2.1)" è equivalente a:

esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni scelta delle costanti c, h

esiste una funzione $\varphi_{c,h} \in \mathcal{D}$ con supp $\varphi_{c,h} \subset K$ per la quale vale

$$|T(\varphi_{c,h})| > c \sum_{|\alpha| \le h} \sup |D^\alpha \varphi_{c,h}|.$$

Scelto pertanto $c = h = j$, esiste $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con

$$\text{supp } \varphi_j \subset K \qquad \text{e} \qquad |T(\varphi_j)| \ge j \sum_{|\alpha| \le j} \sup |D^\alpha \varphi_j|. \tag{2.2}$$

Poniamo

$$\psi_j = \frac{\varphi_j}{T(\varphi_j)},$$

si ha allora

$$T(\psi_j) = 1 \ \ \forall\, j \qquad \text{e} \qquad D^\alpha \psi_j(x) = \frac{D^\alpha \varphi_j(x)}{T(\varphi_j)} \ \ \forall\, \alpha;\ \forall\, j. \tag{2.3}$$

Dalla seconda relazione in (2.2), dividendo ogni termine per $j\,T(\varphi_j)$ segue:

$$\frac{1}{j} \ge \sum_{|\alpha| \le j} \sup |D^\alpha \psi_j|.$$

Dunque per ogni fissato $|\alpha|$:

$$\sup |D^\alpha \psi_j| \le \frac{1}{j}, \qquad \forall\, j > |\alpha|.$$

Ciò significa che $\{D^\alpha \psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 per $j \to \infty$. Essendo inoltre

$$\text{supp } \psi_j = \text{supp } \varphi_j \subset K, \qquad \forall\, j$$

la successione $\{\psi_j\}_j$ converge a 0 in $\mathcal{D}$. Se T fosse una distribuzione la successione $T(\psi_j)$ dovrebbe quindi convergere a zero contro $T(\psi_j) = 1$ per ogni j (cfr. la prima in (2.3)). Resta così provato che T non è una distribuzione. $\square$

Osservazione 2.2.9. *Se una distribuzione T ha ordine finito h, allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ vale la stima (2.1) con la stessa costante h. Poiché le derivate di ordine superiore ad h non vengono utilizzate per nessuna φ, il funzionale T può essere esteso a tutte le funzioni $\varphi \in \mathcal{C}_c^{(h)}(\Omega)$, munendo questo spazio della topologia che induce la seguente nozione di convergenza: una successione $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a φ se*

- i) *i supporti di tutte le φ_j sono contenuti in un medesimo compatto indipendente da j;*

ii) *le derivate* $\{\varphi_j^{(\alpha)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *convergono uniformemente alle derivate corrispondenti di* φ *per* $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots, h$.

Lo spazio $\mathcal{C}_c^{(h)}(\Omega)$ *munito di tale topologia viene denotato* $\mathcal{D}^{(h)}(\Omega)$.

3. Prodotto e derivazione

Prodotto di una distribuzione per una funzione

La moltiplicazione $S \cdot T$ di due distribuzioni S e T non è in generale possibile: quanto più T è "irregolare" tanto più S deve essere "regolare" se si vuole che il prodotto abbia senso.

Noi ci accontenteremo di definire il prodotto allor quando una delle due distribuzioni è arbitraria e l'altra una funzione indefinitamente differenziabile.

Sia dunque $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ci proponiamo di definire $a\,T$ in modo che risulti una distribuzione. Supponiamo dapprima $T = T_f$, $f \in L^1_{\text{loc}}$; vogliamo in questo caso che $a \cdot T_f$ sia la distribuzione associata alla funzione $a\,f \in L^1_{\text{loc}}$. Poiché

$$\langle T_{a\,f}, \varphi\rangle = \int a(x)\, f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int f(x)\, (a\,\varphi)(x)\, dx = T_f(a \cdot \varphi),$$

siamo portati a definire $a\,T$, per $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ponendo:

$$(a\,T)(\varphi) = T(a\,\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.1}$$

Teorema 2.3.1. *Se* $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *il funzionale* $a\,T$ *definito in* (3.1) *è una distribuzione su* Ω *ed è detta "prodotto di a per T".*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che per $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, risulta $a\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; quindi $T(a\,\varphi)$ è ben definita. Resta da provare che il funzionale $\varphi \longrightarrow T(a\,\varphi)$ è lineare e continuo da $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathbb{C}$; la linearità è banale, resta da provare la continuità. A tale scopo sia K un compatto contenuto in Ω e φ una funzione di $\mathcal{D}(\Omega)$ con supp $\varphi \subset K$. Allora anche $a\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e supp $(a\,\varphi) \subset K$. Per il teorema di caratterizzazione delle distribuzioni esistono "due costanti c ed h dipendenti da K tali che":

$$|(a\,T)(\varphi)| = |T(a\,\varphi)| \le c \sum_{|\alpha|\le h} \sup_x |D^\alpha(a\,\varphi)|. \tag{3.2}$$

Per la formula di Leibniz:

$$D^\alpha(a\,\varphi) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}a \cdot D^\beta\varphi;$$

(3.3)
$$\sup |D^\alpha(a\,\varphi)| \le c_\alpha \sum_{\beta\le\alpha} \sup |D^\beta\varphi|, \quad c_\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{x\in K} |D^{\alpha-\beta}a(x)|.$$

Da (3.2) e (3.3) segue:
$$|(a\,T)(\varphi)| \le \widetilde{c}_h \sum_{|\beta|\le h} \sup |D^\beta\varphi|,$$
dove $h = h_K$, $\widetilde{c}_h = c \sup_{|\alpha|\le h} c_\alpha$. Per il Teorema di caratterizzazione dei funzionali appartenenti a $\mathcal{D}'$, questa maggiorazione assicura che il funzionale $a\,T$ è continuo. Quindi $a\,T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

Osservazione 2.3.2.

i) *La dimostrazione mostra che l'ipotesi $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ è in generale essenziale.*
ii) *Se T è una distribuzione di ordine minore o uguale ad h, anche $a\,T$ ha lo stesso ordine e si potrà calcolare $a\,T$ sotto la sola ipotesi che a sia una funzione derivabile fino all'ordine h.*

Esempio 2.3.3. *Sia $a \in \mathcal{C}^\infty$, allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$*
$$(a\,\delta)(\varphi) = \delta(a\,\varphi) = a(0)\,\varphi(0) = a(0)\,\delta(\varphi);$$
quindi
$$a\,\delta = a(0)\,\delta.$$
Osserviamo che δ è una distribuzione di ordine zero; quindi $a\,\delta$ è definita per ogni funzione a continua in un intorno dell'origine.

Il risultato ottenuto afferma che il prodotto di una qualunque funzione continua per δ è proporzionale a δ.

In particolare, per $n = 1$
$$x\,\delta = 0.$$

Derivata di una distribuzione

La nozione di derivata giuoca un ruolo centrale nella teoria delle distribuzioni. Essa risponde a due esigenze:

i) ogni distribuzione ammette derivate di ogni ordine;
ii) se $T = T_f$, $f \in \mathcal{C}^1$, allora $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$, per $j = 1, \ldots, n$.

La i) è soddisfatta se si definisce $\partial_j T$ in modo tale che $\partial_j T$ esista quale che sia $T \in \mathcal{D}'$ e risulti $\partial_j T \in \mathcal{D}'$. La ii) "impone" la definizione di $\partial_j T$.

Infatti la ii) richiede che sia:

$$(\partial_j T_f)(\varphi) = (T_{\partial_j f})(\varphi) = \int \partial_j f \cdot \varphi, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Quindi, integrando per parti:

$$(\partial_j T_f)(\varphi) = -\int f \cdot \partial_j \varphi = -T_f(\partial_j \varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.4}$$

Questa uguaglianza è soddisfatta se si definisce la derivata "$\partial_j T$ di una qualunque $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$" ponendo:

$$(\partial_j T)(\varphi) = -T(\partial_j \varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definizione 2.3.4. *Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ chiameremo "derivata rispetto x_j di T" il funzionale $(\partial_j T)$ definito da:*

$$(\partial_j T)(\varphi) = -T(\partial_j \varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.5}$$

Proposizione 2.3.5. *La derivata di una distribuzione è una distribuzione. Ogni distribuzione ammette derivate di qualunque ordine e l'ordine di derivazione può essere invertito. Si ha:*

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Alla dimostrazione della Proposizione 2.3.5 premettiamo la seguente osservazione.

Osservazione 2.3.6. *Ogni funzione continua e anche solo localmente sommabile ha derivate successive (nel senso delle distribuzioni) di ogni ordine, che però, in generale, non sono funzioni.*

Se f è una funzione differenziabile con continuità, le sue derivate prime nel senso delle distribuzioni coincidono con le sue derivate usuali, modulo l'isomorfismo di $L^1_{loc}(\Omega)$ con il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ costituito dalle distribuzioni funzioni (vedi Teorema 2.1.8*).*

Quindi "le distribuzioni permettono il calcolo delle derivate delle funzioni non continue".

Dimostrazione della Proposizione 2.3.5. Dobbiamo come prima cosa provare che $\partial_j T$ definito da (3.5) è una distribuzione.

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $\partial_j \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; inoltre la mappa

$$\begin{array}{rccc} \partial_j : & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathcal{D}(\Omega) \\ & \varphi & \mapsto & \partial_j \varphi \end{array}$$

è lineare (banale) e continua. Infatti, sia $\varphi_h \longrightarrow 0$, per $h \to \infty$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che supp $\varphi_h \subset K$ per ogni h e $\sup|\partial^\alpha \varphi_h| \longrightarrow 0$, per $h \to \infty$, per ogni α. Pertanto:

$$\text{supp } \partial_j \varphi_h \subset K, \ \forall\, h \ \text{ e } \ \sup|\partial^\alpha \partial_j \varphi_h| \longrightarrow 0, \ \text{per } h \to \infty, \ \forall\, \alpha.$$

Ciò prova che ∂_j è continua da $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, quindi è continua anche la mappa:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & -T(\partial_j \varphi) \end{array}$$

in quanto composta di applicazioni continue. La dimostrazione che $\partial_j T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è completa.

Poiché $\partial_j T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\partial_j T$ ammette derivate prime date da:

$$(\partial_h(\partial_j T))(\varphi) = -(\partial_j T)(\partial_h \varphi) = (-1)^2 T(\partial_j \partial_h \varphi). \tag{3.6}$$

Si ha quindi:

$$(\partial_j(\partial_h T))(\varphi) = (-1)^2 T(\partial_h \partial_j \varphi). \tag{3.7}$$

Poiché per il teorema di Schwartz $\partial_j \partial_h \varphi = \partial_h \partial_j \varphi$, i secondi membri in (3.6) e (3.7) coincidono e dunque coincidono anche i primi:

$$(\partial_h(\partial_j T))(\varphi) = (\partial_j(\partial_h T))(\varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Per l'arbitrarietà di φ:

$$\partial_h(\partial_j T) = \partial_j(\partial_h T).$$

Una semplice induzione prova ora che per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $\partial^\alpha T$ è una ben definita distribuzione: è la distribuzione definita da

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$$

e vale

$$\partial^\alpha \partial^\beta T = \partial^\beta \partial^\alpha T, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+.$$

□

Esempi 2.3.7.

1) *Consideriamo la funzione di Heaviside:*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad (x \le 0) \\ 1 & x \ge 0 \quad (x > 0) \end{cases}$$

H è la funzione caratteristica della semiretta $[0; +\infty[$. H è localmente sommabile e quindi è una distribuzione. Calcoliamo la sua derivata prima:

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \delta(\varphi), \quad \forall\, \varphi;$$

quindi

$$H' = \delta.$$

Le derivate successive di H sono:

$$H'' = \delta', \quad H''' = \delta'', \ \ldots, \ H^{(m)} = \delta^{(m-1)},$$

i.e.

$$H''(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$$
$$H^{(m)}(\varphi) = \delta^{(m-1)}(\varphi) = (-1)^{m-1}\delta(\varphi^{(m-1)}) = (-1)^{m-1}\varphi^{(m-1)}(0).$$

2) *Generalizziamo l'esempio precedente: sia f una funzione appartenente a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ tale che nel punto x_0 esistano le derivate $f_+^{(m)}(x_0)$, $f_-^{(m)}(x_0)$ finite quale che sia $m \geq 0$. Allora, posto*

$$\sigma_m = f_+^{(m)}(x_0) - f_-^{(m)}(x_0), \quad m \in \mathbb{N}$$

si ha:

$$(T_f)^{(m)} = T_{f^{(m)}} + \sum_{j=0}^{m-1} \sigma_j \delta_{x_0}^{(m-1-j)}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (il lettore dia una giustificazione di tale affermazione!) e quindi $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Scriveremo nel seguito T_f in luogo di f per tenere distinte le derivate di f definite in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ che denoteremo $f^{(m)}$ dalle derivate di f in $\mathcal{D}'$ che denoteremo $T_f^{(m)}$. Abbiamo per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \\
= -\Big(\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\Big) = \\
= -\Big(f(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + \\
f(x)\,\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\Big).
\end{aligned}$$

$$T_f'(\varphi) = -\Big(f_-(x_0)\,\varphi(x_0) - f_+(x_0)\,\varphi(x_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\Big) =$$
$$= \sigma_0\,\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$
$$= \sigma_0\,\delta_{x_0}(\varphi) + T_{f'}(\varphi), \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Quindi

$$T_f' = \sigma_0\,\delta_{x_0} + T_{f'} \tag{3.8}$$

$$T_f'' = \sigma_0\,\delta_{x_0}' + (T_{f'})' \tag{3.9}$$

$T_{f'}$ è una distribuzione funzione con le stesse proprietà di T_f e dunque da (3.8) con f' in luogo di f:

$$(T_{f'})' = \sigma_1\,\delta_{x_0} + T_{f''}.$$

Inserendo questa uguaglianza in (3.9) otteniamo

$$T_f'' = \sigma_0\,\delta_{x_0}' + \sigma_1\,\delta_{x_0} + T_{f''},$$

che è la tesi con $m = 2$.

È semplice ora ottenere la tesi per ogni m procedendo per induzione rispetto ad m. □

4. Topologia nello spazio delle distribuzioni

Definizione 2.4.1. *Sia $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Si dice che T_j tende alla distribuzione T per $j \to \infty$ se, quale che sia $\varphi \in \mathcal{D}$, la successione (di numeri complessi) $\langle T_j, \varphi\rangle$ converge verso il numero complesso $T(\varphi)$ per $j \to \infty$. Questo tipo di convergenza è detta "convergenza semplice" o "convergenza debole".*

Analogamente, si dirà che una serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j$ converge debolmente verso la distribuzione T se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ la serie numerica $\sum_{j\in\mathbb{N}} \langle T_j, \varphi\rangle$ converge a $\langle T, \varphi\rangle$.

Teorema 2.4.2.

a) *Se $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di distribuzioni tali che per $j \to \infty$, $\langle T_j, \varphi\rangle$ ha limite, quale che sia $\varphi \in \mathcal{D}$, la successione $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite in $\mathcal{D}'$.*

b) *Se* $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j$ *è una serie di distribuzioni tali che, per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}$, *la serie* $\sum_{j\in\mathbb{N}} \langle T_j, \varphi\rangle$ *sia convergente, la serie* $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j$ *è convergente in* $\mathcal{D}'$.

Gli enunciati a) e b) sono, ovviamente, equivalenti. Consideriamo il primo. Se $\langle T_j, \varphi\rangle$ ha limite per $j \to \infty$, possiamo chiamare questo limite $\langle T, \varphi\rangle$. Si definisce così un funzionale T su $\mathcal{D}$. Questo funzionale è evidentemente lineare. Se si potrà dimostrare che è continuo sarà una distribuzione e siccome T_j converge a T in $\mathcal{D}'$ il teorema sarà dimostrato. Ma la continuità di T è un fenomeno molto particolare che discende, oltre che dalla continuità dei funzionali T_j, anche dalle particolari proprietà della topologia dello spazio $\mathcal{D}$: in generale non è vero che il limite debole di funzionali continui sia continuo (in uno spazio normato ciò è vero grazie al teorema di Banach–Steinhaus se lo spazio è di Banach).

Noi ammetteremo la continuità di T che è di dimostrazione delicata.

Proposizione 2.4.3. *Sia* $\{f_j\}$ *una successione di funzioni in* L^1_{loc} *tali che:*

i) $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$, *q.o.* $x \in \mathbb{R}^n$;
ii) $|f_j| \le g$, *dove* $g \in L^1_{loc}$.

Allora la distribuzione f_j *converge in* $\mathcal{D}'$ *alla distribuzione* f.

Dimostrazione. La proposizione è conseguenza immediata del teorema della convergenza dominata. □

Proposizione 2.4.4. *Se* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}$ *e la successione* f_j *converge ad* f *uniformemente su ogni insieme limitato, allora* $f \in L^1_{loc}$ *e le distribuzioni* f_j *convergono verso la distribuzione* f.

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata come esercizio. □

Proposizione 2.4.5. *La derivazione è un'operazione lineare continua in* $\mathcal{D}'$.

Dimostrazione. La linearità è di banale verifica. Per provare la continuità occorre dimostrare che se $T_j \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'$, allora $\partial^\alpha T_j \longrightarrow \partial^\alpha T$ in $\mathcal{D}'$, per $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Si ha per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle \partial^\alpha T_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_j, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle.$$

Dunque $\partial^\alpha T_j \longrightarrow \partial^\alpha T$. □

Osservazione 2.4.6. *La* Proposizione 2.4.5 *assicura che se $T_j \longrightarrow T$ allora $\partial^\alpha T_j \longrightarrow \partial^\alpha T$ e che ogni serie $\sum T_j$ convergente in $\mathcal{D}'$ è derivabile sotto il segno di sommatoria.*

D'altra parte si sa che, se una successione $\{f_j\}$ di funzioni continue e derivabili nel senso usuale converge uniformemente ad f, f non è necessariamente derivabile nel senso usuale e che, anche se lo è, le $\partial^\alpha f_j$ non convergono necessariamente a $\partial^\alpha f$.

Ma nel senso delle distribuzioni, $\partial^\alpha f$ esiste sempre e le $\partial^\alpha f_j$ convergono sempre a $\partial^\alpha f$ in $\mathcal{D}'$.

5. Distribuzioni a supporto limitato

Definizione 2.5.1. *Indichiamo con $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a valori complessi indefinitamente differenziabili in $\mathbb{R}^n$, munito della seguente nozione di convergenza:*

una successione $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{E}$ tende a zero in $\mathcal{E}$ se per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, le successioni $\{\partial^\alpha \varphi_j\}_j$ convergono a 0 uniformemente su ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Ovviamente $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ e se una successione $\{\varphi_j\}$ converge a zero in $\mathcal{D}$ a maggior ragione converge a zero in $\mathcal{E}$.

Definizione 2.5.2. *Indichiamo con $\mathcal{E}'$ lo spazio dei funzionali lineari e continui su $\mathcal{E}$. Dunque $L \in \mathcal{E}'$ se e solo se*

i) *$L : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ è lineare;*
ii) *se $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}$ allora $L(\varphi_j) \longrightarrow 0$ in $\mathbb{C}$.*

Teorema 2.5.3. *Sia T una distribuzione a supporto compatto K. Allora esiste un unico funzionale L lineare e continuo su $\mathcal{E}$ tale che:*

i) *$L(\varphi) = T(\varphi)$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$;*
ii) *$L(\varphi) = 0$, per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$ con supp $\varphi \subset \complement K$.*

Nota che i) significa che L è un prolungamento di T a tutto $\mathcal{E}$ mentre ii) che L è nullo nel complementare di K. Il teorema assicura quindi l'esistenza e l'unicità di un prolungamento siffatto.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathcal{D}$, $a = 1$ in un intorno $\mathcal{U}$ di K, cioè $a(x) = 1$ per ogni $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ un aperto contenente K. Definiamo un funzionale L su $\mathcal{E}$ ponendo:

$$L(\varphi) = \langle T, a\,\varphi\rangle, \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{E}.$$

Poiché $a\,\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle T, a\,\varphi\rangle$ è ben definito per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$. Proviamo che $\langle T, a\,\varphi\rangle$ non dipende dalla particolare funzione a scelta. A tale scopo osserviamo che se b è un'altra funzione di $\mathcal{D}$ uguale ad uno in un intorno $\mathcal{U}'$ di K, allora $(a-b)\,\varphi$ è una funzione di $\mathcal{D}$ con supporto nel complementare di K. Di conseguenza:

$$\langle T, a\,\varphi\rangle - \langle T, b\,\varphi\rangle = \langle T, (a-b)\,\varphi\rangle = 0.$$

Dunque l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & L(\varphi) \end{array}$$

è ben definita. L è lineare (come subito si verifica) ed inoltre è continua. Per provare la continuità di L osserviamo che se $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}$, allora $a\,\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}$. Infatti supp $(a\,\varphi_j) \subset$ supp a, per ogni $j \in \mathbb{N}$ ed inoltre da

$$\partial^\alpha(a\,\varphi_j) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \cdot \partial^{\alpha-\beta}\varphi_j,$$

segue:

$$\sup|\partial^\alpha(a\,\varphi_j)| \le c_{|\alpha|} \sum_{|\gamma|\le|\alpha|} \sup_{x\in\text{supp }a} |\partial^\gamma\varphi_j(x)| \longrightarrow 0, \qquad \text{per } j\to\infty.$$

Quindi, essendo T una distribuzione:

$$L(\varphi_j) = \langle T, a\,\varphi_j\rangle \longrightarrow 0.$$

Dimostriamo i). Se $\varphi \in \mathcal{D}$, osservato che $(a-1)\,\varphi$ è nulla in un intorno del supporto di T, si ha $\langle T, (a-1)\,\varphi\rangle = 0$. Quindi:

$$L(\varphi) = \langle T, a\,\varphi\rangle = \langle T, (a-1)\,\varphi\rangle + \langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Se poi $\varphi \in \mathcal{E}$ e supp $\varphi \subset \complement K$, allora anche supp $a\,\varphi \subset \complement K$ e quindi:

$$L(\varphi) = \langle T, a\,\varphi\rangle = 0;$$

resta così provato anche ii).

Per provare l'unicità, sia $\widetilde{L}$ un elemento di $\mathcal{E}'$ soddisfacente i) e ii). Allora per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$:

$$\widetilde{L}(\varphi) = \widetilde{L}((1-a)\,\varphi) + \widetilde{L}(a\,\varphi) = 0 + \langle T, a\,\varphi\rangle = \langle L, \varphi\rangle.$$

Dunque $L = \widetilde{L}$. □

Teorema 2.5.4. *Sia L un funzionale lineare continuo su $\mathcal{E}$. Allora la restrizione di L a $\mathcal{D}$ è una distribuzione T a supporto compatto.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ e che se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a 0 in $\mathcal{D}$, allora $\{\varphi_j\}$ converge a 0 anche in $\mathcal{E}$. Di conseguenza L è un funzionale lineare continuo in $\mathcal{D}$ e pertanto definisce una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, tale che:

$$L(\varphi) = T(\varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

T ha supporto compatto. In effetti, se T non avesse supporto limitato, per ogni n si potrebbe trovare in $\mathcal{D}$ una funzione ψ_n con:

$$\text{supp}\ \psi_n \subset \{x\ :\ |x| > n\} \quad \text{e} \quad \langle T, \psi_n\rangle \neq 0, \qquad \forall\, n.$$

Allora posto

$$\varphi_n = \frac{\psi_n}{\langle T, \psi_n\rangle}$$

si avrebbe:

α) $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$;
β) supp $\varphi_n \subset \{x\ :\ |x| > n\}$;
γ) $\langle T, \varphi_n\rangle = 1$.

Da β) discenderebbe che $\varphi_n \longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}$,[3] e quindi $L(\varphi_n) \longrightarrow 0$ (per ipotesi L è continuo su $\mathcal{E}$), ma ciò non è possibile poiché $L(\varphi_n) = T(\varphi_n) = 1$ per ogni n. $\square$

Dai due teoremi precedenti discende:

Corollario 2.5.5. *Esiste un isomorfismo algebrico fra $\mathcal{E}'$ ed il sottospazio di $\mathcal{D}'$ costituito dalle distribuzioni a supporto compatto. Tale isomorfismo consente di identificare $\mathcal{E}'$ con il sottospazio di $\mathcal{D}'$ sopra indicato. In questo senso:*

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{D}'.$$

Teorema 2.5.6 (Caratterizzazione delle distribuzioni a supporto compatto)**.** *Una distribuzione $T \in \mathcal{E}'$ se e solo se esistono un compatto H e due costanti c ed h tali che:*

$$|T(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha|\leq h} \sup_{x\in H} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{E}.$$

In tal caso supp $T \subset \overset{\circ}{H}$.

[3] Infatti se K è un compatto di $\mathbb{R}^n$, scelto n_0 tale che $K \subset \{x\ :\ |x| < n_0\}$, si ha $\varphi_n(x) = 0$ per ogni $n > n_0$, per ogni $x \in K$. Quindi $\sup_K |\partial^\alpha \varphi_n| = 0$, per ogni $n \geq n_0$

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{E}'$, vale a dire supponiamo che $\operatorname{supp} T = K$ compatto. Sia poi $a \in \mathcal{D}$, $a = 1$ in un intorno di K. Per il Teorema 2.5.3

$$T(\varphi) = T(a\,\varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{E}.$$

Denotato con H il supporto di a, risulta $\operatorname{supp} a\,\varphi \subset H$, per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$. Per il Teorema 2.5.6 esistono due costanti (dipendenti dal compatto H, quindi solo da T) tali che:

$$|T(\varphi)| = |T(a\,\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha|\leq h} \sup |\partial^\alpha (a\,\varphi)| \leq c' \sum_{|\alpha|\leq h} \sup_H |\partial^\alpha \varphi|$$

(c' dipende da c e dalle derivate della funzione a di ordine $\leq h$). Resta così provata la disuguaglianza della tesi. Viceversa, supponiamo tale disuguaglianza vera. Allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{supp} \varphi \subset \complement H$ si ha $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Ciò assicura che $\operatorname{supp} T \subset H$ e quindi che $T \in \mathcal{E}'$. $\square$

Osservazione 2.5.7. *La costante h, nella stima del* Teorema 2.5.6, *dipende solo da T e non dal supporto di φ. Dalla stima discende dunque che ogni distribuzione a supporto compatto ha ordine finito. Il viceversa è falso: la funzione $f(x) = 1$ per ogni x ha ordine zero, ma ha supporto uguale a $\mathbb{R}^n$.*

6. Convoluzione di distribuzioni

Premessa. Siano φ, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, una almeno a supporto compatto. La convoluzione $\varphi * \psi$ di φ e ψ è definita da

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy = \int \psi(y)\,\varphi(x-y)\,dy = (\psi * \varphi)(x).$$

Gli integrali esistono perché, essendo una delle funzioni a supporto compatto, l'integrazione viene effettuata solo su un insieme limitato.

Se ψ ha supporto compatto e si riguarda φ come una distribuzione, la prima delle uguaglianze precedenti si può scrivere nella forma:

$$\varphi * \psi(x) = \langle \varphi, \psi(x - \cdot) \rangle,$$

dove il secondo membro deve intendersi come valore della distribuzione φ sulla funzione $y \mapsto \psi(x-y)$, con x fissato. Analoga interpretazione si può dare del secondo degli integrali precedenti. Ciò rende "naturale" la seguente definizione

Definizione 2.6.1. *Siano $T \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$. Denotiamo con $T * \varphi$ la funzione definita da:*

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle.$$

Esempio.

$$(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \varphi(x - \cdot)\rangle = \varphi(x) \qquad \textit{quindi} \qquad \delta * \varphi = \varphi.$$

Teorema 2.6.2. *Siano $T \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Allora:*

i) $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty$;
ii) $\partial^\alpha (T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha T * \varphi$;
iii) *supp* $(T * \varphi) \subset$ *supp* $T +$ *supp* φ.

Dimostrazione. Cominciamo col provare iii):

$$x_0 \notin \text{supp } T + \text{supp } \varphi \iff \forall\, y \in \text{supp } T,\ x_0 - y \notin \text{supp } \varphi \iff$$

$$\iff \forall\, y \in \text{supp } T,\ y \notin x_0 - \text{supp } \varphi = \text{supp } (y \mapsto \varphi(x_0 - y)) \iff$$

$$\iff \text{supp } T \cap \text{supp } (\varphi(x_0 - \cdot)) = \emptyset \Rightarrow \langle T, \varphi(x_0 - \cdot)\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T * \varphi)(x_0) = 0.$$

Quindi

$$\{x \ :\ (T * \varphi)(x) \neq 0\} \subset \text{supp } T + \text{supp } \varphi$$

$$\overline{\{x \ :\ (T * \varphi)(x) \neq 0\}} \subset \overline{\text{supp } T + \text{supp } \varphi} = \text{supp } T + \text{supp } \varphi$$

e questo è iii).

Proviamo ora i). Dimostriamo che $T * \varphi$ è una funzione continua. Basterà provare che se $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di $\mathbb{R}^n$ convergente ad x_0, allora

$$(T * \varphi)(x_j) \longrightarrow (T * \varphi)(x_0).$$

Tenendo conto della linearità di T abbiamo:

$$(T * \varphi)(x_j) - (T * \varphi)(x_0) = \langle T, \varphi(x_j - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot)\rangle = \langle T, \psi_j\rangle, \tag{6.1}$$

dove si è posto $\psi_j(y) = \varphi(x_j - y) - \varphi(x_0 - y)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi_j &\subset \text{supp } \varphi(x_j - \cdot) \cup \text{supp } \varphi(x_0 - \cdot) = \\ &= (x_j - \text{supp } \varphi) \cup (x_0 - \text{supp } \varphi). \end{aligned}$$

La successione $\{x_j\}$ è convergente, quindi è limitata. Esiste dunque una sfera chiusa S contenente x_0 e tutti gli altri x_j. Dall'inclusione precedente segue allora

$$\text{supp } \psi_j \subset S - \text{supp } \varphi, \quad \forall\, j.$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi_j(y)| &= \sup_y |(\partial^\alpha\varphi)(x_j - y) - (\partial^\alpha\varphi)(x_0 - y)| \leq \\ &\leq \sup_y |\mathrm{grad}\ \partial^\alpha\varphi(y)| \cdot |x_j - x_0| = \\ &= c_\alpha |x_j - x_0| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } j \to \infty.\end{aligned}$$

Dunque la successione $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a 0 in $\mathcal{D}$. Quindi $\langle T, \psi_j\rangle$ converge a 0, ciò che, per la (6.1), equivale a

$$(T * \varphi)(x_j) \longrightarrow (T * \varphi)(x_0).$$

Abbiamo così provato che $T * \varphi$ è una funzione continua.

Proviamo ora la prima uguaglianza in ii) con $\alpha = e_k$, ossia che:

$$\partial_k(T * \varphi) = T * \partial_k\varphi. \tag{6.2}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{(T*\varphi)(x_0 + h\, e_k) - (T*\varphi)(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\langle T, \varphi(x_0 + h\, e_k - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot)\rangle = \\ &= \langle T, \frac{\varphi(x_0 + h\, e_k - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot)}{h}\rangle.\end{aligned}$$

Vogliamo provare che questa funzione di h converge per $h \to 0$ a $(T * \partial_k\varphi)(x_0) = \langle T, \partial_k\varphi(x_0 - \cdot)\rangle$, ossia che

$$\langle T, \frac{\varphi(x_0 + h\, e_k - \cdot) - \varphi(x_0 - \cdot)}{h} - \partial_k\varphi(x_0 - \cdot)\rangle \longrightarrow 0 \qquad \text{per } h \to 0.$$

A tale scopo, posto:

$$\psi_h(y) = \frac{\varphi(x_0 + h\, e_k - y) - \varphi(x_0 - y)}{h} - \partial_k\varphi(x_0 - y),$$

basterà provare che la successione ψ_h tende a 0 in $\mathcal{D}$, vale a dire i supporti delle ψ_h sono contenuti tutti in un medesimo compatto e che $\partial^\alpha\psi_h$ tende a 0 uniformemente per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Quanto al supporto, se $|h| < 1$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}\ \psi_h &\subset \{x_0 + h\, e_k - \mathrm{supp}\ \varphi\} \cup \{x_0 - \mathrm{supp}\ \varphi\} \subset \\ &\subset \overline{S(x_0, 1)} - \mathrm{supp}\ \varphi\end{aligned}$$

e quest'ultimo insieme è un compatto indipendente da h. Inoltre per la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 - y$ abbiamo:

$$\varphi(x_0 + h\, e_k - y) = \varphi(x_0 - y) + h\, \partial_k\varphi(x_0 - y) + \frac{h^2}{2}\, \partial_k^2\varphi(\xi),$$

ξ un opportuno punto appartenente al segmento di estremi $x_0 - y$ e $x_0 - y + h\, e_k$. Ne segue

$$\sup_y |\psi_h(y)| = \frac{h}{2} \sup |\partial_k^2 \varphi| \leq c_1\,|h| \longrightarrow 0 \quad \text{per } h \to 0.$$

Analogamente per le derivate di ψ_h:

$$\sup |\partial^\alpha \psi_h| \leq c_{|\alpha|}\,|h| \longrightarrow 0 \quad \text{per } h \to 0.$$

Dunque la successione $\{\psi_h\}$ tende a 0 in $\mathcal{D}$ e quindi $\langle T, \psi_h\rangle \longrightarrow 0$ per $h \to 0$. La (6.2) è così provata.

Proviamo ora la seconda uguaglianza in ii) con $\alpha = e_k$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}(\partial_k T * \varphi)(x_0) &= \langle \partial_k T, \varphi(x_0 - \cdot)\rangle = \\ &= -\langle T, \partial_k(\varphi(x_0 - \cdot))\rangle = \\ &= \langle T, (\partial_k \varphi)(x_0 - \cdot)\rangle = \\ &= (T * \partial_k \varphi)(x_0).\end{aligned}$$

Da questa e da (6.2) segue che ii) è valida con $\alpha = e_k$. La validità per ogni α segue poi facilmente per induzione.

La dimostrazione è completa. □

Teorema 2.6.3. *Se $T \in \mathcal{D}'$ allora*

$$\varphi \mapsto T * \varphi$$

è un'applicazione lineare e continua da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{E}$.

Dimostrazione. Tenuto conto della i) del Teorema 2.6.2, l'unica cosa da provare è la continuità dell'applicazione e cioè che se $\{\varphi_j\}$ è una successione convergente a 0 in $\mathcal{D}$ allora la successione $\{T * \varphi_j\}$ converge a 0 in $\mathcal{E}$.

Sia dunque $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}$. Le φ_j hanno supporto contenuto in un medesimo compatto H. Sia poi K un compatto arbitrariamente fissato, allora per ogni $x \in K$:

$$\text{supp } \varphi_j(x - \cdot) = x - \text{supp } \varphi_j \subset K - H,$$

dove $K - H$ è un compatto indipendente da x e da j. Quindi dal teorema di caratterizzazione per le distribuzioni, esistono due costanti $c > 0$, $h \geq 0$ dipendenti unicamente da $K - H$, tali che per ogni $x \in K$, per ogni j:

$$|\partial^\alpha(T*\varphi_j)(x)| = |(T*\partial^\alpha\varphi_j)(x)| = |\langle T, \partial^\alpha\varphi_j(x-\cdot)\rangle| \leq$$
$$\leq c \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|+h} \sup|\partial^\gamma\varphi_j|.$$

Per $j\to\infty$, $\sup|\partial^\gamma\varphi_j| \longrightarrow 0$. Ne segue

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha(T*\varphi_j)| \longrightarrow 0, \quad \text{per } j\to\infty;$$

quindi:

$$T*\varphi_j \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{E}.$$

□

Proposizione 2.6.4. *Se $T\in\mathcal{E}'$, l'applicazione $\varphi\to T*\varphi$ è continua da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{D}$. Inoltre la definizione di convoluzione di una distribuzione per una funzione appartenente a $\mathcal{D}$, può essere estesa a tutte le $\varphi\in\mathcal{E}$ e l'applicazione $\varphi\mapsto T*\varphi$ è continua da $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}$.*

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Riassumendo, l'applicazione $\varphi\mapsto T*\varphi$ è continua

$$\text{da } \mathcal{D} \text{ in } \mathcal{E} \quad \text{se } T\in\mathcal{D}'$$
$$\text{da } \mathcal{D} \text{ in } \mathcal{D} \quad \text{se } T\in\mathcal{E}'$$
$$\text{da } \mathcal{E} \text{ in } \mathcal{E} \quad \text{se } T\in\mathcal{E}'$$

Teorema 2.6.5. *Sia $T\in\mathcal{D}'$, φ e $\psi\in\mathcal{D}$. Allora:*

$$(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi). \tag{6.3}$$

Questa uguaglianza rimane valida anche nel caso:

$$T\in\mathcal{E}',\ \varphi\in\mathcal{E},\ \psi\in\mathcal{D}.$$

Tralasciamo la dimostrazione di questo teorema; facciamo solo osservare che a primo membro in (6.3) compare $T*\varphi\in\mathcal{E}$ e $\psi\in\mathcal{D}$. La convoluzione di queste funzioni è:

$$((T*\varphi)*\psi)(x) = \int (T*\varphi)(x-z)\,\psi(z)\,dz =$$
$$= \int \langle T_y, \varphi(x-z-y)\rangle\,\psi(z)\,dz.$$

Il secondo membro di (6.3) è la convoluzione della distribuzione T con la funzione $\varphi * \psi \in \mathcal{D}$:

$$(T * (\varphi * \psi))(x) = \langle T_y, (\varphi * \psi)(x - y) \rangle = \\ = \langle T_y, \int \varphi(x - z - y)\, \psi(z)\, dz \rangle.$$

La (6.3) equivale dunque a:

$$\int \langle T_y, \varphi(x - z - y) \rangle\, \psi(z)\, dz = \langle T_y, \int \varphi(x - z - y)\, \psi(z)\, dz \rangle$$

uguaglianza che si può dimostrare approssimando gli integrali con somme di Riemann.

Osservazione 2.6.6. *Per ogni $T \in \mathcal{D}'$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ vale l'identità:*

$$\langle T, \varphi \rangle = (T * \overset{\vee}{\varphi})(0).$$

Infatti

$$(T * \overset{\vee}{\varphi})(0) = \langle T, \overset{\vee}{\varphi}\,(0 - \cdot) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Teorema 2.6.7. *Se $T \in \mathcal{D}'$ e J_ε è un mollificatore, allora:*

i) *$T * J_\varepsilon \in \mathcal{E}$;*
ii) *supp $T * J_\varepsilon \subset$ supp $T + \overline{S(0, \varepsilon)}$;*
iii) *$T * J_\varepsilon \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'$, per $\varepsilon \to 0$.*

Dimostrazione. Poiché $J_\varepsilon \in \mathcal{D}$, i) e ii) seguono dal Teorema 2.6.2. Provare iii) equivale a provare:

$$\langle T * J_\varepsilon, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{per } \varepsilon \to 0$$

e, per l'Osservazione 2.6.6, ciò equivale a provare:

$$((T * J_\varepsilon) * \overset{\vee}{\varphi})(0) \longrightarrow (T * \overset{\vee}{\varphi})(0), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{per } \varepsilon \to 0.$$

Per il Teorema 2.6.5 (associatività dell'operatore di convoluzione)

$$((T * J_\varepsilon) * \overset{\vee}{\varphi})(0) = (T * (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}))(0).$$

Se proveremo che $J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi} \longrightarrow \overset{\vee}{\varphi}$ in $\mathcal{D}$ per $\varepsilon \to 0$, dal Teorema 2.6.3 seguirà che $T * (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}) \longrightarrow T * \overset{\vee}{\varphi}$ in $\mathcal{E}$, per $\varepsilon \to 0$.

Poiché la topologia di $\mathcal{E}$ implica la convergenza puntuale, si avrà:

$$(T * (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}))(0) \longrightarrow (T * \overset{\vee}{\varphi})(0), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

ed il teorema sarà provato.

Dimostriamo dunque che $J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi} \longrightarrow \overset{\vee}{\varphi}$ in $\mathcal{D}$. Innanzi tutto osserviamo che $\{J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}\}_{0<\varepsilon<1}$ è una famiglia di funzioni $\mathcal{C}_c^\infty$ aventi supporto contenuto in supp $\overset{\vee}{\varphi} + \overline{S(0,1)}$, compatto indipendente da ε. Inoltre dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale per funzioni derivabili a supporto compatto segue:

$$\partial_h (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}) = J_\varepsilon * \partial_h \overset{\vee}{\varphi}$$

e quindi, induttivamente

$$\partial^\alpha (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}) = J_\varepsilon * \partial^\alpha \overset{\vee}{\varphi}, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Il teorema riguardante la convoluzione con un mollificatore assicura poi che:

$$\sup |\partial^\alpha (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}) - \partial^\alpha \overset{\vee}{\varphi}\,| = \sup |J_\varepsilon * \partial^\alpha \overset{\vee}{\varphi} - \partial^\alpha \overset{\vee}{\varphi}\,| \longrightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \to 0.$$

La dimostrazione è completa. □

Osservazione 2.6.8. *Le funzioni $T * \varphi_\varepsilon$ si dicono regolarizzazioni della distribuzione T. Il* Teorema 2.6.7 *prova che ogni distribuzione è limite in $\mathcal{D}'$ di una successione di funzioni di $\mathcal{E}$, ossia che $\mathcal{E}$ è sequenzialmente denso in $\mathcal{D}'$.*

Si tratta dell'analogo, per le distribuzioni, di un noto teorema di regolarizzazione delle funzioni di L^p.

Ci proponiamo ora di definire la convoluzione di due distribuzioni. Cominciamo con l'osservare che l'operazione di traslazione denotata τ_h, $h \in \mathbb{R}^n$, e definita da:

$$(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x - h)$$

è continua da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$ e da $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}$. Inoltre se $T \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, per la traslata della funzione $T * \varphi \in \mathcal{E}$ si ha:

$$\begin{aligned} \tau_h (T * \varphi)(x) &= (T * \varphi)(x - h) = \langle T, \varphi(x - h - \cdot)\rangle = \\ &= \langle T, (\tau_h \varphi)(x - \cdot)\rangle = (T * \tau_h \varphi)(x); \end{aligned}$$

dunque

$$\tau_h (T * \varphi) = T * \tau_h \varphi.$$

L'applicazione $\varphi \mapsto T * \varphi$ è quindi continua da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{E}$ (Teorema 2.6.3) e commuta con le traslazioni. Il teorema che segue prova che vale anche il viceversa.

Teorema 2.6.9. *Sia $\mathcal{U} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un'applicazione lineare continua che commuta con le traslazioni. Allora esiste una ed una sola distribuzione T tale che:*

$$\mathcal{U}(\varphi) = T * \varphi, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dimostrazione. Definiamo un'applicazione T da $\mathcal{D}$ in $\mathbb{C}$ ponendo:

$$\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi) = \mathcal{U}(\check{\varphi})(0).$$

T è lineare, evidentemente; proviamo che è anche continua. Sia $\{\varphi_j\}$ una successione di funzioni convergenti a 0 in $\mathcal{D}$. Per la continuità di $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(\varphi_j)$ converge a 0 in $\mathcal{E}$ e quindi $\mathcal{U}(\varphi_j)(0)$ converge a 0, cioè $T(\varphi_j) \longrightarrow 0$. Dunque $T \in \mathcal{D}'$. Proviamo che le due funzioni $\mathcal{U}(\varphi)$ e $T * \varphi$ sono uguali per ogni φ. Cominciamo col vedere che assumono lo stesso valore in $x = 0$. Abbiamo:

$$(T * \varphi)(0) = (T * \check{\check{\varphi}})(0) = T(\check{\varphi}) = \mathcal{U}(\varphi)(0).$$

Sia ora $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tenendo conto che $\mathcal{U}$ commuta con le traslazioni ed usando l'uguaglianza precedente con $\tau_{-h}\varphi$ in luogo di φ, abbiamo:

$$\begin{aligned}(T * \varphi)(h) &= [\tau_{-h}(T * \varphi)](0) = [T * \tau_{-h}\varphi](0) = \\ &= \mathcal{U}(\tau_{-h}\varphi)(0) = [\tau_{-h}(\mathcal{U}(\varphi))](0) = \mathcal{U}(\varphi)(h).\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di h, discende da qui:

$$T * \varphi = \mathcal{U}(\varphi).$$

Ciò vale per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ e quindi l'operazione di convoluzione con T coincide con l'applicazione $\mathcal{U}$.

Resta da provare l'unicità. Supponiamo che $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ e soddisfino l'uguaglianza precedente. Allora:

$$T_1 * \varphi = T_2 * \varphi, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

e dunque

$$[(T_1 - T_2) * \varphi](x) = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare

$$[(T_1 - T_2) * \varphi](0) = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

da cui

$$\langle T_1 - T_2, \check{\varphi} \rangle = 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}$$

e quindi $T_1 = T_2$. $\square$

Definizione 2.6.10 (Convoluzione di due distribuzioni)**.** *Siano T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'$, una almeno a supporto compatto. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ ha senso l'espressione:*

$$T_1 * (T_2 * \varphi).$$

Infatti se T_2 ha supporto compatto, $T_2 * \varphi \in \mathcal{D}$ e quindi $T_1 * (T_2 * \varphi)$ è definita. Se invece è T_1 a supporto compatto, allora $T_2 * \varphi \in \mathcal{E}$ e $T_1 * (T_2 * \varphi)$ è ancora ben definita (cfr. Proposizione 2.6.4). In ogni caso l'applicazione:

$$\mathcal{U} : \varphi \to T_1 * (T_2 * \varphi)$$

è un'applicazione da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{E}$ lineare e continua, in quanto composta di applicazioni continue, ed inoltre commuta con le traslazioni:

$$\begin{aligned}\tau_h(T_1 * (T_2 * \varphi)) = T_1 * \tau_h(T_2 * \varphi) = \\ = T_1 * (T_2 * \tau_h\varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D},\end{aligned}$$

cioè

$$\tau_h \mathcal{U}(\varphi) = \mathcal{U}(\tau_h\varphi), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Per il Teorema 2.6.9 esiste una ed una sola $T \in \mathcal{D}'$ tale che $\mathcal{U}(\varphi) = T * \varphi$, cioè tale che:

$$T_1 * (T_2 * \varphi) = T * \varphi, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Definizione 2.6.11. *La distribuzione T si dice "convoluzione di T_1 e T_2" e si indica con $T_1 * T_2$.*

Sia $T_2 = \psi \in \mathcal{D}$; allora $T_1 * T_2 = T_1 * \psi$ è una funzione $f \in \mathcal{E}$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, $f * \varphi$ è ben definita come convoluzione di due funzioni. Proviamo che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$f * \varphi = T * \varphi,$$

dove con T si è denotata la convoluzione di T_1 e T_2 pensate entrambe come distribuzioni. Infatti:

$$\begin{aligned}T * \varphi = (T_1 * \ T_2) * \varphi = T_1 * (T_2 * \varphi) = \\ = T_1 * (\psi * \varphi) = (T_1 * \psi) * \varphi = f * \varphi.\end{aligned}$$

Teorema 2.6.12. *Siano $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$, una almeno a supporto compatto. Allora:*

i) $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$;
ii) *supp* $(T_1 * T_2) \subset$ *supp* $T_1 +$ *supp* T_2.

Dimostrazione. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Allora:

$$(6.4) \qquad \begin{aligned}(T_1 * T_2) * (\varphi * \psi) &= T_1 * (T_2 * (\varphi * \psi)) = \\ &= T_1 * ((T_2 * \varphi) * \psi) = \\ &= T_1 * (\psi * (T_2 * \varphi)) = \\ &= (T_1 * \psi) * (T_2 * \varphi).\end{aligned}$$

La prima uguaglianza segue dalla definizione di convoluzione di due distribuzioni, la seconda dalla proprietà associativa (Teorema 2.6.5), la terza dalla proprietà commutativa della convoluzione di due funzioni, la quarta ancora dal Teorema 2.6.5.

Scambiando T_1 con T_2 si ha quindi:

$$(6.5) \qquad (T_2 * T_1) * (\varphi * \psi) = (T_2 * T_1) * (\psi * \varphi) = (T_2 * \varphi) * (T_1 * \psi).$$

Gli ultimi membri delle uguaglianze (6.4) e (6.5) sono uguali per la commutatività della convoluzione fra due funzioni, quindi sono uguali anche i primi:

$$(T_1 * T_2) * (\varphi * \psi) = (T_2 * T_1) * (\varphi * \psi)$$

da cui (proprietà associativa):

$$[(T_1 * T_2) * \varphi] * \psi = [(T_2 * T_1) * \varphi] * \psi.$$

Per l'arbitrarietà di ψ:

$$(T_1 * T_2) * \varphi = (T_2 * T_1) * \varphi$$

e per l'arbitrarietà di φ:

$$T_1 * T_2 = T_2 * T_1.$$

Resta da provare ii).

Sia J_ε un mollificatore. Per definizione di convoluzione di due distribuzioni:

$$(T_1 * T_2) * J_\varepsilon = T_1 * (T_2 * J_\varepsilon).$$

Quindi, utilizzando la iii) del Teorema 2.6.2:

$$(6.6) \qquad \begin{aligned}\text{supp } [(T_1 * T_2) * J_\varepsilon] &\subset \text{supp } T_1 + \text{supp } (T_2 * J_\varepsilon) \subset \\ &\subset \text{supp } T_1 + \text{supp } T_2 + \overline{S(0, \varepsilon)}.\end{aligned}$$

Poiché (per la iii) del Teorema 2.6.7)

$$(T_1 * T_2) * J_\varepsilon \longrightarrow T_1 * T_2 \quad \text{in } \mathcal{D}', \quad \text{per }, \varepsilon \to 0$$

passando al limite per $\varepsilon \to 0$ in (6.6) si ottiene:

$$\text{supp}\,(T_1 * T_2) \subset \text{supp}\,T_1 + \text{supp}\,T_2.$$

$\square$

Teorema 2.6.13. *Siano $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{D}'$, due almeno a supporto compatto. Allora:*

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3) \qquad \textit{(proprietà associativa).}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di convoluzione di due distribuzioni si ha:

$$((T_1 * T_2) * T_3) * \varphi = (T_1 * T_2) * (T_3 * \varphi) = T_1 * (T_2 * (T_3 * \varphi)).$$

Analogamente:

$$(T_1 * (T_2 * T_3)) * \varphi = T_1 * ((T_2 * T_3) * \varphi) = T_1 * (T_2 * (T_3 * \varphi)).$$

Dall'uguaglianza degli ultimi membri segue la tesi. $\square$

Esempio. *Siano $T \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$:*

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\varphi(x - \cdot)) = \varphi(x), \quad \forall\, x \quad \Rightarrow \quad \delta * \varphi = \varphi$$

$$(T * \delta) * \varphi = T * (\delta * \varphi) = T * \varphi, \quad \forall\, \varphi \quad \Rightarrow \quad T * \delta = T;$$

δ è l'elemento neutro per l'operazione di convoluzione in $\mathcal{D}'$.

Osservazione 2.6.14. *Sia $T \in \mathcal{D}'$. Una qualunque derivata di T, $\partial^\alpha T$, può essere scritta come convoluzione di T con $\partial^\alpha \delta$:*

$$\partial^\alpha T = \partial^\alpha \delta * T.$$

Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha T * \varphi &= T * \partial^\alpha \varphi = \\ &= T * (\delta * \partial^\alpha \varphi) = \\ &= T * (\partial^\alpha \delta * \varphi) = \\ &= (T * \partial^\alpha \delta) * \varphi. \end{aligned}$$

Teorema 2.6.15. *Siano $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ una almeno a supporto compatto. Allora:*

$$\partial^\alpha (T_1 * T_2) = T_1 * \partial^\alpha T_2 = \partial^\alpha T_1 * T_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'Osservazione 2.6.14 segue:

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(T_1 * T_2) &= \partial^\alpha\delta * (T_1 * T_2) = \\ &= (\partial^\alpha\delta * T_1) * T_2 = \\ &= (\delta * \partial^\alpha T_1) * T_2 = \\ &= \partial^\alpha T_1 * T_2.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Scambiando T_1 con T_2:

$$\partial^\alpha(T_2 * T_1) = \partial^\alpha T_2 * T_1 = T_1 * \partial^\alpha T_2. \tag{6.8}$$

Poiché $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$, i primi membri in (6.7) e in (6.8) sono uguali; l'uguaglianza degli ultimi membri fornisce la tesi. □

Esercizi

i) Provare che se T_1 e $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ed hanno supporto limitato a sinistra, allora $T_1 * T_2$ ha senso.

ii) Sia $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Calcolare $T * 1$.

iii) Siano $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ e φ un polinomio di grado m. Provare che $T * \varphi$ è un polinomio di grado $\leq m$.

iv) Sia H la distribuzione di Heaviside. Provare che:

$$(1 * \delta') * H = 0$$

$$1 * (\delta' * H) = 1.$$

Ciò è in contrasto con il Teorema 2.6.13?

7. Trasformata di Fourier di distribuzioni

È noto che la Trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di una funzione $f \in L^1$

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-\imath x\xi} f(x)\, dx$$

è una funzione continua convergente a zero all'infinito. Inoltre quanto maggiore è l'ordine delle derivate di f appartenenti ad L^1 tanto maggiore è l'ordine di decrescenza di $\widehat{f}$ all'infinito; e viceversa, quanto maggiore è l'ordine di decrescenza di f tanto maggiore è l'ordine di differenziabilità di $\widehat{f}$.

La ricerca di uno spazio di funzioni per il quale l'applicazione $f \mapsto \widehat{f}$ risulti un isomorfismo dello spazio su se stesso ha portato all'introduzione delle "funzioni a decrescenza rapida". Il loro insieme, che indicheremo con $\mathcal{S}$, è contenuto in $\mathcal{E}$ e contiene $\mathcal{D}$. Il duale di $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, è un sottospazio di $\mathcal{D}'$ contenente $\mathcal{E}'$. Per gli elementi T di $\mathcal{S}'$ si può definire la trasformata di Fourier $\widehat{T}$, in modo tale che se $T \in L^1$, allora $\widehat{T}$ coincide con la trasformata di T in quanto elemento di L^1; inoltre l'applicazione $T \mapsto \widehat{T}$ è un isomorfismo di $\mathcal{S}'$ su $\mathcal{S}'$.

Definizione 2.7.1. *Indichiamo con $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) lo spazio delle funzioni $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ tali che:*

$$\sup_x |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty, \qquad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{7.1}$$

Le funzioni di $\mathcal{S}$ vengono dette "a decrescenza rapida".

Una funzione $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ soddisfa (7.1) se e solo se essa e tutte le sue derivate tendono a zero per $|x| \to +\infty$ più in fretta di ogni potenza di $\dfrac{1}{|x|}$. Chiaramente $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L^p$, per ogni p. Esistono però anche delle funzioni che non hanno supporto compatto ed appartengono ad $\mathcal{S}$; per esempio $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$.

È immediato verificare che "$\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, chiuso rispetto l'operazione di derivazione e la moltiplicazione per un polinomio":

$$\varphi \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S};$$

$$\varphi \in \mathcal{S},\ q \text{ polinomio} \quad \Rightarrow \quad q\,\varphi \in \mathcal{S}.$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ poniamo:

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le p}} \sup_x |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|, \quad p = 0, 1, \ldots$$

e

$$\|\varphi\|_{q,k} = \sup_{|\alpha| \le q} \sup_x |(1 + |x|)^k \partial^\alpha \varphi(x)|, \quad q, k = 0, 1, \ldots.$$

Una successione $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}$ converge a 0 in $\mathcal{S}$ se

$$\lim_{j \to \infty} \|\varphi_j\|_p = 0, \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}$$

o, equivalentemente, se

$$\lim_{j \to \infty} \|\varphi_j\|_{q,k} = 0, \qquad q, k \in \mathbb{N}.$$

È immediato verificare che $\mathcal{S} \subset L^p$, per $1 \le p \le \infty$.

Proposizione 2.7.2. *La topologia di $\mathcal{S}$ è più fine di quella di $\mathcal{E}$ e meno fine di quella di $\mathcal{D}$:*

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

(inclusioni continue).

Dimostrazione. Si deve provare che ogni successione $\{\varphi_j\}$ convergente a 0 in $\mathcal{D}$ converge a 0 in $\mathcal{S}$ e che ogni successione convergente a 0 in $\mathcal{S}$ converge a 0 in $\mathcal{E}$.

Sia $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{D}$. Allora esiste un R tale che

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subset \{x \,:\, |x| \le R\} \qquad \forall\, j.$$

Inoltre

$$\sup_x |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \longrightarrow 0 \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Poiché $x^\beta\, \partial^\alpha \varphi_j(x)$ è nullo per $|x| > R$, abbiamo:

$$\sup_x |x^\beta\, \partial^\alpha \varphi_j(x)| = \sup_{|x| \le R} |x^\beta\, \partial^\alpha \varphi_j(x)| \le R^{|\beta|} \sup_x |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \longrightarrow 0$$

per $j \to \infty$; quindi

$$\|\varphi_j\|_p = \sup_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le p}} \sup_x |x^\beta\, \partial^\alpha \varphi_j(x)| \longrightarrow 0, \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Dunque $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}$.

Sia ora $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}$; allora:

$$\sup_x |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \le \|\varphi_j\|_{|\alpha|} \longrightarrow 0,$$

ossia $\{\partial^\alpha \varphi_j\}$ converge uniformemente a zero su $\mathbb{R}^n$ e quindi a maggior ragione su un compatto K comunque scelto. Dunque $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{E}$. $\square$

Teorema 2.7.3. *Sia $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-\imath\, x\, \xi} \varphi(x)\, dx$. Allora:*

i) $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ *e l'applicazione* $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ *è lineare e continua da* $\mathcal{S}$ *in* $\mathcal{S}$.
ii) $\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-\imath)^{|\alpha|} (x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi)$.
iii) $(\partial^\beta \varphi)^\wedge(\xi) = (\imath\, \xi)^\beta \widehat{\varphi}(\xi)$.

Dimostrazione. Come abbiamo già osservato, $\mathcal{S} \subset L^1$ e quindi $\widehat{\varphi}$ è ben definita. Cominciamo a provare che $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ dimostrando che $\widehat{\varphi}$ è derivabile.

Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni che rendono lecito derivare

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-\imath\, x\, \xi} \varphi(x)\, dx$$

sotto il segno di integrale. Per ogni multi–indice α si ha infatti:

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha (e^{-\imath\, x\, \xi} \varphi(x))| &\leq |(-\imath\, x)^\alpha e^{-\imath\, x\, \xi} \varphi(x)| = \\ &= |x^\alpha \varphi(x)| \in \mathcal{S} \subset L^1 \qquad \text{(def. di } \mathcal{S}).\end{aligned}$$

Quindi

$$\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-\imath\, x\, \xi} (-\imath\, x)^\alpha \varphi(x)\, dx = (-\imath)^{|\alpha|} (x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi).$$

Dunque $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty$ e vale ii).

Si ha poi:

$$(\imath\, \xi)^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|} \int (\partial_x^\beta e^{-\imath\, x\, \xi})\, (-\imath\, x)^\alpha \varphi(x)\, dx$$

e quindi, integrando per parti:

$$(\imath\, \xi)^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-\imath\, x\, \xi}\, \partial^\beta ((-\imath\, x)^\alpha \varphi(x))\, dx. \tag{7.2}$$

Da qui, con $\alpha = 0$, si ottiene:

$$(\imath\, \xi)^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-\imath\, x\, \xi}\, \partial^\beta \varphi(x)\, dx = (\partial^\beta \varphi)^\wedge(\xi).$$

Resta così provata anche iii).

Da (7.2) segue inoltre:

$$|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| \leq \int \left| \partial^\beta [(-\imath\, x)^\alpha \varphi(x)] \right| dx. \tag{7.3}$$

Abbiamo già osservato che $\mathcal{S}$ è chiuso rispetto le operazioni di moltiplicazione per un polinomio arbitrario e rispetto alla derivazione. La funzione sotto il segno di integrale nella precedente stima è quindi in $\mathcal{S}$ che, a sua volta è contenuto in L^1; quindi l'integrale è convergente. Denotato con $C_{\alpha,\beta}$ il suo valore, abbiamo:

$$|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dunque $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Proviamo ora che l'applicazione:

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$$

è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Sia ora $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}$. Da (7.3) segue:

$$|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_j(\xi)| \le \int (1+|x|)^{n+1} |\partial^\beta (x^\alpha \varphi_j(x))| (1+|x|)^{-(n+1)} dx \le$$

$$\le \sup_x (1+|x|)^{n+1} |\partial^\beta (x^\alpha \varphi_j(x))| \cdot \int (1+|x|)^{-n-1} dx \le$$

$$\le C_1\, C_{\alpha,\beta} \sup_x (1+|x|)^{n+1+|\alpha|} \sum_{\gamma \le |\beta|} \sup |\partial^\gamma \varphi_j|,$$

dove $\int (1+|x|)^{-n-1} dx = C_1$. Quindi:

$$\sup_\xi |\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_j(\xi)| \le \widetilde{C}_{\alpha,\beta} \sup_{|\gamma| \le |\beta|} \sup_x (1+|x|)^{n+1+|\alpha|} |\partial^\gamma \varphi_j|$$

e

$$\|\widehat{\varphi}_j\|_p = \sup_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le p}} \sup_\xi |\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_j(\xi)| \le \widetilde{\widetilde{C}}_p \|\varphi_j\|_{n+1+p} \longrightarrow 0.$$

La dimostrazione è completa. □

Teorema 2.7.4 (Formula di inversione). *Se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora:*

$$\varphi(x) = (2\,\pi)^{-n} \int e^{\imath\, x\, \xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;$$

cioè vale per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la formula di inversione della trasformata di Fourier di φ.

Dimostrazione. Ricordiamo che se f ed $\widehat{f}$ appartengono entrambe ad L^1 allora la formula di inversione vale quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$ e vale in tutti i punti di continuità di f. Nel nostro caso abbiamo:

$$\varphi \text{ e } \widehat{\varphi} \in L^1 \text{ e } \varphi \text{ è continua in ogni punto.}$$

Quindi la formula vale per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Ricordiamo anche che la formula di inversione può essere scritta nella forma:

$$\widehat{\widehat{\varphi}} = (2\,\pi)^n \overset{\vee}{\varphi}\,. \tag{7.4}$$

□

Corollario 2.7.5. *L'applicazione $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ è un isomorfismo algebrico e topologico di $\mathcal{S}$ in sè.*

Dimostrazione. Conseguenza immediata del Teorema 2.7.3 e della formula di inversione. □

Teorema 2.7.6. *Se φ, $\psi \in \mathcal{S}$ si ha:*

i) $\int \widehat{\varphi}\, \psi = \int \varphi\, \widehat{\psi}$;
ii) $\int \varphi\, \overline{\psi} = (2\,\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}\, \overline{\widehat{\psi}}$;
iii) $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$;
iv) $\widehat{\varphi\, \psi} = (2\,\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.

Dimostrazione. i), ii) e iii) sono valide in $L^1 \cap L^2$ e quindi in $\mathcal{S}$. iv) segue da iii) e dalla (7.4) (formula di inversione). Infatti, applicando quest'ultima a $\varphi\,\psi \in \mathcal{S}$:

$$\widehat{\widehat{\varphi\,\psi}}(x) = (2\,\pi)^n \varphi(-x)\, \psi(-x);$$

mentre, applicano iii) a $\widehat{\varphi}$ e $\widehat{\psi}$ ed utilizzando poi (7.4):

$$\widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}} = \widehat{\widehat{\varphi}} \cdot \widehat{\widehat{\psi}} = (2\,\pi)^n \overset{\vee}{\varphi} \cdot (2\,\pi)^n \overset{\vee}{\psi}\ .$$

Quindi:

$$(2\,\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}} = (2\,\pi)^n \overset{\vee}{\varphi} \overset{\vee}{\psi}\ .$$

Dunque le funzioni $\widehat{\varphi\,\psi}$ e $(2\,\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ hanno la stessa trasformata di Fourier e poiché questa trasformazione è biiettiva da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, esse sono uguali. $\square$

Teorema 2.7.7. *$\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Proveremo il teorema dimostrando che ogni funzione $\varphi \in \mathcal{S}$ è limite, nella topologia di $\mathcal{S}$, di una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{D}$. Sia $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Posto:

$$\varphi_\nu(x) = \varphi(x)\, \psi\Big(\frac{x}{\nu}\Big),$$

abbiamo

$$\varphi_\nu \in \mathcal{D} \quad \text{e} \quad \varphi_\nu(x) = \varphi(x) \quad \text{se} \quad |x| < \nu.$$

Proviamo che $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$, i.e. $\|\varphi_\nu - \varphi\|_p \longrightarrow 0$ per ogni p.

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_p = \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \sup_{|x| > \nu} \Big| x^\beta \partial^\alpha \Big[\varphi(x) \Big(\psi\Big(\frac{x}{\nu}\Big) - 1\Big)\Big]\Big| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \sup_{|x| > \nu} \frac{|x|}{\nu} \Big| x^\beta \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \varphi(x)\, \partial^{\alpha - \gamma} \psi(x) \Big| \leq$$

$$\leq \frac{C_p}{\nu} \sup_{\substack{|\delta| \leq p+1 \\ |\gamma| \leq p}} \sup_x |x^\delta \partial^\gamma \varphi(x)| \leq \frac{C_p}{\nu} \|\varphi\|_{p+1}.$$

Quindi $\|\varphi_\nu - \varphi\|_p \longrightarrow 0$ per $\nu \to \infty$. $\square$

Definizione 2.7.8. *Denotiamo con $\mathcal{S}'$ l'insieme delle applicazioni da $\mathcal{S}$ in $\mathbb{C}$ lineari e continue; $T \in \mathcal{S}'$ se e solo se*

i) $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ *è lineare;*
ii) *per ogni* $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}$, $\varphi_j \longrightarrow 0$ *in* $\mathcal{S}$ *per* $j \to \infty$, *si ha* $\langle T, \varphi_j \rangle \longrightarrow 0$.

$\mathcal{S}'$ con le usuali operazioni di moltiplicazione di un numero complesso per un'applicazione e di somma di due applicazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. La topologia di $\mathcal{S}'$ è definita mediante la seguente nozione di convergenza:
sia $\{T_j\} \subset \mathcal{S}'$, $T \in \mathcal{S}'$; $T_j \longrightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se e solo se $\langle T_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ (topologia debole).

Gli elementi di $\mathcal{S}'$ vengono dette "distribuzioni temperate".

Proposizione 2.7.9 (Caratterizzazione delle distribuzioni temperate)**.** *Sia $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ un'applicazione lineare. T è continua (quindi appartiene ad $\mathcal{S}'$) se e solo se esistono due costanti p e c tali che:*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \, \|\varphi\|_p, \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{S}. \tag{7.5}$$

Dimostrazione. Sia $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ un'applicazione lineare soddisfacente (7.5). Considerata una successione $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}$, $\varphi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}$ abbiamo $\|\varphi_j\|_q \longrightarrow 0$, per ogni $q \in \mathbb{Z}_+$; quindi $\|\varphi_j\|_p \longrightarrow 0$.

Da (7.5) discende:

$$|\langle T, \varphi_j \rangle| \leq c \, \|\varphi_j\|_p;$$

da cui $\langle T, \varphi_j \rangle \longrightarrow 0$. T è dunque continua.

Viceversa, sia T un'applicazione lineare su $\mathcal{S}$ non soddisfacente (7.5): per ogni c e per ogni p esiste quindi un elemento $\varphi_{c,p} \in \mathcal{S}$ tale che

$$|\langle T, \varphi_{c,p} \rangle| > c \, \|\varphi_{c,p}\|_p.$$

Scelto $p = c = j$, per ogni j esiste allora una funzione $\varphi_j \in \mathcal{S}$ tale che:

$$|\langle T, \varphi_j \rangle| > j \, \|\varphi_j\|_j, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

e quindi:

$$\frac{\|\varphi_j\|_j}{|\langle T, \varphi_j \rangle|} < \frac{1}{j}, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Posto:

$$\psi_j = \frac{\varphi_j}{\langle T, \varphi_j \rangle}$$

abbiamo $\{\psi_j\} \subset \mathcal{S}$. Dalla definizione di $\|\cdot\|_p$ segue inoltre che:

$$j > p \quad \Rightarrow \quad \|\psi_j\|_p \leq \|\psi_j\|_j = \frac{\|\varphi_j\|_j}{|\langle T, \varphi_j \rangle|} < \frac{1}{j}.$$

Per $j \to \infty$ l'ultimo termine tende a zero: resta così provato che $\|\psi_j\|_p \longrightarrow 0$. Ciò significa, per l'arbitrarietà di p, che $\psi_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}$. Se T fosse continua si avrebbe quindi $T(\psi_j) \longrightarrow 0$, ma invece è $T(\psi_j) = 1$ per ogni j. Si è così provato che se T non verifica (7.5), allora T non può essere continua. $\square$

Proposizione 2.7.10. *Se $T \in \mathcal{S}'$, la restrizione di T a $\mathcal{D}$ è una distribuzione di ordine finito. Inoltre l'applicazione:*

$$r: \begin{array}{ccc} \mathcal{S}' & \to & \mathcal{D}' \\ T & \mapsto & T_{|\mathcal{D}} \end{array} \tag{7.6}$$

è iniettiva (ma non suriettiva) e continua.

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{S}'$ e K un compatto scelto ad arbitrio. La Proposizione 2.7.9 assicura che esistono c, p tali che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_p \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

In particolare per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con supp $\varphi \subset K$ si avrà

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \sup_x |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| = c \sup_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \sup_{x \in K} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \leq \\ c\, R^p \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \\ c\, R^p \sum_{|\alpha| \leq p} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \end{aligned}$$

dove R è il raggio di una sfera contenente il compatto K. Questa maggiorazione assicura che $T_{|\mathcal{D}}$ è una distribuzione di ordine finito (p non dipende dal compatto K).

L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}' & \to & \mathcal{D}' \\ T & \mapsto & T_{|\mathcal{D}} \end{array}$$

non è suriettiva. In effetti l'applicazione

$$T : \mathcal{D} \ni \varphi \mapsto \int e^{|x|^2} \varphi(x)\, dx$$

è una distribuzione di ordine 0, mentre esistono funzioni $\varphi \in \mathcal{S}$ (ad esempio $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$) tali che:

$$\int e^{|x|^2} \varphi(x)\, dx = +\infty.$$

L'applicazione (7.6) è però iniettiva. Per verificare ciò basta provare che:

$$T \in \mathcal{S}',\, T_{|\mathcal{D}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

cioè

$$T \in \mathcal{S}',\, T_{|\mathcal{D}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.$$

Sia dunque $\varphi \in \mathcal{S}$. Per il Teorema 2.7.7 esiste una successione $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}$ tale che:

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}.$$

Poiché T è continua in $\mathcal{S}$ risulta:

$$\lim_{\nu \to \infty} \langle T, \varphi_\nu \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Ma $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}$ e per ipotesi $T_{|\mathcal{D}} = 0$, quindi $\langle T, \varphi_\nu \rangle = 0$ per ogni ν; il limite è quindi zero, sicchè $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Quanto provato consente di identificare $\mathcal{S}'$ con il sottospazio di $\mathcal{D}'$ a cui è isomorfo mediante l'applicazione (7.6). È chiaro allora che se

$$T_j \longrightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}', \text{ allora } T_j \longrightarrow 0 \text{ in } \mathcal{D}' :$$

$$\langle T_j, \varphi \rangle \longrightarrow 0\ \forall\, \varphi \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \langle T_j, \varphi \rangle \longrightarrow 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}.$$

Ciò prova la continuità della'applicazione (7.6) e l'inclusione

$$\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'.$$

□

Proposizione 2.7.11. *L'applicazione di restrizione*

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathcal{E}' & \to & \mathcal{S}' \\ & T & \mapsto & T_{|\mathcal{S}} \end{array} \tag{7.7}$$

è iniettiva e continua.

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{E}'$. Sappiamo che allora esiste un compatto K, un intero non negativo m ed una costante $c > 0$ tali che:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{E}.$$

Poiché $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, abbiamo quindi per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c_1 \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq$$
$$\leq c_1 \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| = c_1 \, \|\varphi\|_m.$$

Dunque $T_{|\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'$ (cfr. Proposizione 2.7.9).

L'applicazione (7.7) è iniettiva, ossia se $T \in \mathcal{E}'$ e $T_{|\mathcal{S}} = 0$ allora $T = 0$ in $\mathcal{E}'$. Per provare ciò, sia $\varphi \in \mathcal{E}$; allora esiste $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}$. Poiché T è continua su $\mathcal{E}$ risulta:

$$\langle T, \varphi_j \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Ma per ipotesi $T_{|\mathcal{S}} = 0$ e quindi $\langle T, \varphi_j \rangle = 0$ per ogni j. Sicchè $\lim_{j \to \infty} \langle T, \varphi_j \rangle = 0$. Quindi $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Quanto provato assicura che $\mathcal{E}'$ è isomorfo mediante l'applicazione r ad $r(\mathcal{E}')$, sottospazio di $\mathcal{S}'$. Ciò permette di identificare $\mathcal{E}'$ con $r(\mathcal{E}')$: $\mathcal{E}'$ è un sottospazio di $\mathcal{S}'$. Resta così provata l'inclusione algebrica:

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'.$$

L'inclusione ha luogo anche in senso topologico, poiché se $\{T_j\} \subset \mathcal{E}'$ e $\langle T, \varphi_j \rangle \longrightarrow 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$, allora si ha anche $\langle T, \varphi_j \rangle \longrightarrow 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, dato che $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Quindi

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}'$$

□

Esempi 2.7.12. *Esempi notevoli di elementi di $\mathcal{S}'$ sono i seguenti:*

a) *Sia $f \in L^p$, $p \geq 1$ e sia $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che $|a(x)| \leq c\,(1 + |x|)^h$. Posto per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$:*

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \int f(x)\, a(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

$T_1 \in \mathcal{S}'$.

b) *Sia $f \in L^1_{loc}$, $|f(x)| \leq A\,|x|^l$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geq R$. Posto per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$:*

$$\langle T_2, \varphi \rangle = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

$T_2 \in \mathcal{S}'$.

c) *Sia f come in b). Posto:*

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \int f(x)\, \partial^\alpha \varphi(x)\, dx,$$

$T_3 \in \mathcal{S}'$.

Osservazione 2.7.13. *a) assicura che tutte le funzioni di L^p, $p \geq 1$, come pure i loro prodotti per polinomi arbitrari appartengono ad $\mathcal{S}'$. Da b) segue che ogni funzione localmente integrabile che cresca all'infinito al più come un polinomio appartiene ad $\mathcal{S}'$. Infine, per c), vi appartengono anche tutte le derivate, nel senso delle distribuzioni, di ogni funzione di tale tipo.*

Definizione 2.7.14. *Sia $T \in \mathcal{S}'$. La trasformata di Fourier di T è definita da:*

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

- $\widehat{T} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ è ben definita poiché $\varphi \in \mathcal{S}$ implica $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e $\langle T, \widehat{\varphi} \rangle \in \mathbb{C}$.
- $\widehat{T}$ è lineare perchè composta delle applicazioni $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ e $\widehat{\varphi} \mapsto \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$ entrambe lineari.
- $\widehat{T}$ è continua poiché le precedenti applicazioni sono continue.

Dunque $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$.

Dal punto a) degli Esempi 2.7.12 segue che $L^1 \subset \mathcal{S}'$. In L^1 la trasformata di Fourier è già stata definita. La definizione che abbiamo dato ora, considerando gli elementi di L^1 come distribuzioni di $\mathcal{S}'$, coincide con la precedente? La risposta è affermativa. Per verificare ciò, indichiamo con $\mathcal{F}_u$ la trasformata di Fourier di $u \in L^1$:

$$\mathcal{F}_u(\xi) = \int e^{-\imath x \cdot \xi}\, u(x)\, dx$$

e con $\widehat{u}$ la trasformata di Fourier di u nel senso di $\mathcal{S}'$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ risulta:

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle = \int u(\xi) \Big(\int e^{-\imath x \cdot \xi}\, \varphi(x)\, dx \Big)\, d\xi.$$

La funzione $\left|e^{-\imath\, x\cdot\xi}\,\varphi(x)\,u(\xi)\right| = |\varphi(x)|\cdot|u(\xi)|$ è sommabile in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. È pertanto lecito cambiare ordine di integrazione. Si ottiene così:

$$\begin{aligned}\langle \widehat{u}, \varphi\rangle &= \int \varphi(x)\Big(\int e^{-\imath\, x\cdot\xi}\, u(\xi)\, d\xi\Big)\, dx = \\ &= \int \varphi(x)\cdot(\mathcal{F}_u)(x)\, dx = \langle \mathcal{F}_u, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di φ, discende da qui:

$$\widehat{u} = \mathcal{F}_u \qquad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Teorema 2.7.15. *L'applicazione $T \mapsto \widehat{T}$ è biettiva e bicontinua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$; per definizione si ha:

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\widehat{T}}, \varphi\rangle &= \langle \widehat{T}, \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, \widehat{\widehat{\varphi}}\rangle = \\ &= \langle T, (2\,\pi)^n\, \overset{\vee}{\varphi}\rangle = (2\,\pi)^n\, \langle T, \overset{\vee}{\varphi}\rangle.\end{aligned}$$

L'applicazione $\varphi \mapsto \langle T, \overset{\vee}{\varphi}\rangle$ è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$ e quindi appartiene ad $\mathcal{S}'$: lo indicheremo con $\overset{\vee}{T}$.

Dunque:

$$\langle \overset{\vee}{T}, \varphi\rangle = \langle T, \overset{\vee}{\varphi}\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Per quanto visto sopra si ha quindi:

$$\langle \widehat{\widehat{T}}, \varphi\rangle = (2\,\pi)^n\, \langle \overset{\vee}{T}, \varphi\rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S};$$

ossia

$$\widehat{\widehat{T}} = (2\,\pi)^n\ \overset{\vee}{T}$$

onde:

$$T = (2\,\pi)^{-n}\ \overset{\vee}{\widehat{\widehat{T}}}\ . \tag{7.8}$$

Quindi ogni $T \in \mathcal{S}'$ è la trasformata di Fourier di un altro elemento di $\mathcal{S}'$. Ciò è quanto affermare che l'applicazione $T \mapsto \widehat{T}$ è suriettiva da $\mathcal{S}'$ in sè.

Tale applicazione è anche iniettiva. Infatti, se $\widehat{T} = 0$ anche $\overset{\vee}{\widehat{\widehat{T}}} = 0$ e dunque, per (7.8), $T = 0$.

L'applicazione $T \mapsto \widehat{T}$ è inoltre continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$. Infatti, sia $\{T_j\} \subset \mathcal{S}'$, $T_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}'$. Allora $\langle \widehat{T}_j, \varphi\rangle = \langle T_j, \widehat{\varphi}\rangle \longrightarrow 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$. Quindi anche $\widehat{T}_j \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}'$.

La continuità dell'applicazione inversa discende dalla continuità della $T \mapsto \widehat{T}$ e dalla formula di inversione (7.8). □

8. Trasformata di Fourier–Laplace e Teorema di Paley–Wiener

Definizione 2.8.1. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C} : z \mapsto f(z)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aperto, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + \imath\, y_j$. f si dice "olomorfa" in Ω se, posto $\overline{\partial}_j = \dfrac{1}{2}(\partial_{x_j} + \imath\, \partial_{y_j})$, $j = 1, \dots, n$, si ha:*

$$\overline{\partial}_j\, f(z) = 0, \qquad \forall\, z \in \Omega,\ j = 1, \dots, n.$$

f si dice "intera"se è olomorfa in $\mathbb{C}^n$.

Teorema 2.8.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente su ogni compatto $K \subset \Omega$, allora f è olomorfa in Ω.*

Esempi.

1) *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $z \in \mathbb{C}^n$ poniamo $x_0\, z = \sum_{j=1}^{n} x_{0j}\, z_j$. La funzione $f(z) = x_0\, z$ è intera. Infatti:*

   $\partial_{x_j}(x_0\, z) = x_{0j};\ \ \partial_{y_j}(x_0\, z) = \imath\, x_{0j} \quad \Rightarrow \quad \overline{\partial}_j(x_0\, z) = 0.$
2) *La funzione $g(z) = e^{x_0\, z}$ è intera perchè composta di funzioni intere.*

Teorema 2.8.3. *Se $f \in L^1$, supp f compatto, allora $\widehat{f}(\xi) = f(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$; il secondo membro è definito per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$ ed $\widehat{f}(\zeta)$ è una funzione intera detta "Trasformata di Fourier–Laplace di f".*

Dimostrazione. Poiché $f \in L^1$, $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int e^{-\imath\, x\, \xi} f(x)\, dx$. Poiché supp f è compatto l'integrale può essere letto come valore della distribuzione $f \in \mathcal{E}'$ applicata alla funzione $x \mapsto e^{-\imath\, x\, \xi} \in \mathcal{E}$. Quindi $\widehat{f}(\xi) = f(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sia $\zeta \in \mathbb{C}^n$. La funzione $x \mapsto e^{-\imath\, x\, \zeta} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Poiché $f \in \mathcal{E}'$ possiamo applicare la distribuzione funzione f alla funzione $x \mapsto e^{-\imath\, x\, \zeta}$: $f(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta}) = \displaystyle\int e^{-\imath\, x\, \zeta} f(x)\, dx$ è ben definita. L'applicazione $\zeta \mapsto f(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta})$,

$\zeta \in \mathbb{C}^n$, è detta "Trasformata di Fourier–Laplace di f" e viene denotata $\widehat{f}(\zeta)$.

Resta da provare che $\widehat{f}(\zeta)$ è intera, ossia che $\overline{\partial}_j \widehat{f}(\zeta) = 0$ per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, \dots, n$. Posto $\zeta = \xi + \imath\,\eta$, con ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$, abbiamo:

$$\overline{\partial}_j \widehat{f}(\zeta) = \frac{1}{2}\,(\partial_{\xi_j} + \imath\,\partial_{\eta_j}) \int e^{-\imath\,x(\xi+\imath\,\eta)} f(x)\,dx.$$

Verifichiamo che è lecito applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}\left|\partial_{\xi_j} e^{-\imath\,x(\xi+\imath\,\eta)} f(x)\right| = \left| - \imath\,x_j\, e^{-\imath\,x(\xi+\imath\,\eta)} f(x)\right| = |x_j|\, e^{x\,\eta} |f(x)| \leq \\ \leq R\, e^{R\,|\eta|} |f(x)| \in L^1,\end{aligned}$$

dove si è indicato con R il raggio di una sfera che contiene il supporto di f. Analogamente:

$$\begin{aligned}\left|\partial_{\eta_j} e^{-\imath\,x(\xi+\imath\,\eta)} f(x)\right| = \left|x_j\, e^{-\imath\,x(\xi+\imath\,\eta)} f(x)\right| \leq \\ \leq R\, e^{R\,|\eta|} |f(x)| \in L^1;\end{aligned}$$

quindi

$$\overline{\partial}_j \widehat{f}(\zeta) = \int \frac{1}{2}\,(\partial_{\xi_j} + \imath\,\partial_{\eta_j})\, e^{-\imath\,x(\xi+\imath\,\eta)} f(x)\,dx = 0.$$

Ciò prova che $\widehat{f}(\zeta)$ è intera. □

Il teorema che segue estende a tutte le distribuzioni a supporto compatto le proprietà provate nel Teorema 2.8.3 per le funzioni appartenenti ad L^1 a supporto compatto.

Teorema 2.8.4. *Sia $T \in \mathcal{E}'$. Allora $\widehat{T}$ è la funzione $\widehat{T}(\xi) = T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. La funzione a secondo membro si estende ad ogni vettore complesso $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e definisce una funzione intera detta "Trasformata di Fourier–Laplace di T".*

Dimostrazione. Sia J_ε un mollificatore. Poniamo $T_\varepsilon = T * J_\varepsilon$. È stato provato che se $T \in \mathcal{D}'$ allora $T * J_\varepsilon \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'$. Una dimostrazione analoga mostra che se $T \in \mathcal{S}'$ allora $T * J_\varepsilon \longrightarrow T$ in $\mathcal{S}'$. Dunque:

$$T_\varepsilon \longrightarrow T \qquad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Poiché la trasformata di Fourier F è un isomorfismo di $\mathcal{S}'$ in sè

$$\widehat{T}_\varepsilon \longrightarrow \widehat{T} \qquad \text{in } \mathcal{S}', \quad \text{per } \varepsilon \to 0. \tag{8.1}$$

$T_\varepsilon \in \mathcal{D}$ e $\widehat{T}_\varepsilon$ è la funzione:

$$\widehat{T}_\varepsilon(\xi) = T_\varepsilon(e^{-\imath\,\cdot\,\xi}), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Essa si prolunga (cfr. Teorema 2.8.3) ad una funzione intera in $\mathbb{C}^n$: $\zeta \mapsto T_\varepsilon(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta})$. Proveremo le seguenti affermazioni:

i) $\widehat{T_\varepsilon}(\zeta) \longrightarrow T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta})$ uniformemente su ogni compatto di $\mathbb{C}^n$, per $\varepsilon \to 0$;
ii) $\widehat{T_\varepsilon}(\xi) \longrightarrow T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, per $\varepsilon \to 0$.

Da (8.1) e ii) seguirà allora che $\widehat{T} = T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$ in $\mathcal{S}'$, cioè la distribuzione $\widehat{T}$ è la distribuzione funzione:

$$\widehat{T}(\xi) = T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi}), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

inoltre da i) e per il Teorema 2.8.2 seguirà che $\zeta \mapsto T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta})$ è una funzione intera. La dimostrazione sarà allora completa.

Dimostriamo i). Per il Teorema 2.8.3, $\widehat{T_\varepsilon}(\zeta)$ è una funzione intera

$$\begin{aligned}\widehat{T_\varepsilon}(\zeta) &= T_\varepsilon(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta}) = (T_\varepsilon * e^{\imath\,\cdot\,\zeta})(0) = \\ &= ((T * J_\varepsilon) * e^{\imath\,\cdot\,\zeta})(0) = (T * (J_\varepsilon * e^{\imath\,\cdot\,\zeta}))(0) = \\ &= T((J_\varepsilon * e^{\imath\,\cdot\,\zeta})^\vee), \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}(J_\varepsilon * e^{\imath\,\cdot\,\zeta})(x) &= \int J_\varepsilon(y)\, e^{\imath(x-y)\,\zeta} dy = \\ &= e^{\imath\, x\, \zeta} \int J\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big)\, \varepsilon^{-n}\, e^{-\imath\, y\, \zeta}\, dy = \qquad \text{ponendo } \frac{y}{\varepsilon} = \widetilde{y} \\ &= e^{\imath\, x\, \zeta} \int J(\widetilde{y})\, e^{-\imath\, \widetilde{y}\, \varepsilon\, \zeta}\, d\widetilde{y} = \\ &= e^{\imath\, x\, \zeta}\, \widehat{J}(\varepsilon\, \zeta).\end{aligned} \tag{8.3}$$

Da (8.2) e (8.3) segue:

$$\widehat{T_\varepsilon}(\zeta) = T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta}\, \widehat{J}(\varepsilon\, \zeta)) = \widehat{J}(\varepsilon\, \zeta)\, T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta}), \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n; \tag{8.4}$$

quindi

$$\widehat{T_\varepsilon}(\zeta) - T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta}) = (\widehat{J}(\varepsilon\, \zeta) - 1)\, T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta}), \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{8.5}$$

Per il teorema di caratterizzazione delle distribuzioni a supporto compatto esistono costanti c, h ed un compatto $H \subset \mathbb{R}^n$ tali che:

$$
\begin{aligned}
(8.6) \qquad |T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta})| &\leq c \sum_{|\alpha| \leq h} \sup_{x \in H} |\partial_x^\alpha e^{-\imath\, x\, \zeta}| = \\
&= c \sum_{|\alpha| \leq h} \sup_{x \in H} |(-\imath\, \zeta)^\alpha\, e^{-\imath\, x\, \zeta}| = \\
&= c \sum_{|\alpha| \leq h} \sup_{x \in H} |\zeta^\alpha|\, e^{x \cdot \Im \zeta} \leq \\
&\leq c_1\, (1 + |\zeta|)^h\, e^{A \cdot |\Im \zeta|}, \qquad A = \sup_{x \in H} |x|
\end{aligned}
$$

Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}^n$: $K \subset \{\zeta \in \mathbb{C}^n \,:\, |\zeta| \leq R\}$. Allora da (8.5) e (8.6):

$$
\begin{aligned}
\sup_{\zeta \in K} |\widehat{T}_\varepsilon(\zeta) - T(e^{-\imath\,\cdot\,\zeta})| &\leq \sup_{\zeta \in K} |\widehat{J}(\varepsilon\, \zeta) - 1| \cdot c_1\, (1 + |\zeta|)^h\, e^{A\, |\Im\, \zeta|} = \\
&= c_2 \sup_{\zeta \in K} |\widehat{J}(\varepsilon\, \zeta) - 1|.
\end{aligned}
$$

Per provare i) è dunque sufficiente provare che:

$$
(8.7) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\zeta \in K} |\widehat{J}(\varepsilon\, \zeta) - 1| = 0.
$$

Poiché $\widehat{J}$ è continuo e $\widehat{J}(0) = 1$, per ogni $\delta > 0$ esiste $\rho_\delta > 0$ tale che

$$
|\theta| < \rho_\delta \quad \Rightarrow \quad |\widehat{J}(\theta) - 1| < \delta;
$$

allora per ogni $\zeta \in K$, per ogni $\varepsilon < \dfrac{\rho_\delta}{R}$ abbiamo $|\varepsilon\, \zeta| < \rho_\delta$ e quindi:

$$
\sup_{\zeta \in K} |\widehat{J}(\varepsilon\, \zeta) - 1| < \delta.
$$

La (8.7) è così provata.

Dimostriamo ii). Da i) segue che le funzioni $\widehat{T}_\varepsilon(\xi)$ e $T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$ appartengono a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dobbiamo ora provare che esse appartengono ad $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e che:

(8.8)

$$
\int \widehat{T}_\varepsilon(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \longrightarrow \int T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \text{per } \varepsilon \to 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
$$

Da (8.6) con $\zeta = \xi \in \mathbb{R}^n$ segue:

$$
(8.9) \qquad |T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})| \leq c_1\, (1 + |\xi|)^h, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n
$$

e quindi da (8.4)

(8.10)

$$
\begin{aligned}
|\widehat{T}_\varepsilon(\xi)| &= |\widehat{J}(\varepsilon\,\xi)\,T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})| \leq \\
&\leq \sup|\widehat{J}|\cdot|T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})| \leq \Big(\int J\Big)\cdot c_1(1+|\xi|)^h = c_1(1+|\xi|)^h.
\end{aligned}
$$

È noto che ogni funzione localmente integrabile che cresce al più come un polinomio appartiene ad $\mathcal{S}'$. (8.9) e (8.10) provano dunque che $\xi \mapsto T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})$ e $\xi \mapsto \widehat{T}_\varepsilon(\xi)$ appartengono ad $\mathcal{S}'$. Resta da provare (8.8).

Da (8.10) segue per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$|\widehat{T}_\varepsilon(\xi)\,\varphi(\xi)| \leq c_1(1+|\xi|)^h|\varphi(\xi)| \in L^1.$$

Per il teorema della convergenza dominata:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int \widehat{T}_\varepsilon(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi &= \int \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{T}_\varepsilon(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \qquad \text{(cfr. i) con } \zeta=\xi) \\
&= \int T(e^{-\imath\,\cdot\,\xi})\,\varphi(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
$$

La dimostrazione è completa. □

Definizione 2.8.5 (Funzione supporto)**.** *Sia K un compatto contenuto in $\mathbb{R}^n$. La funzione:*

$$H_K(\eta) = \sup_{x\in K} x\,\eta, \qquad \eta \in \mathbb{R}^n$$

è detta "funzione supporto" di K.

Osservazione 2.8.6. *Poiché $x \mapsto x\,\eta$ è una funzione continua e K è compatto:*

$$\sup_{x\in K} x\,\eta = \max_{x\in K} x\,\eta = \overline{x}\,\eta, \qquad \textit{per un } \overline{x} \in K.$$

Esempio 2.8.7. *Se $K = \overline{S(0,R)}$ allora: $H_K(\eta) = R\,|\eta|$. Infatti, se $x \in \overline{S(0,R)}$, $x\cdot\eta \leq |x|\cdot|\eta| \leq R\cdot|\eta|$. Quindi*

$$\sup_{\overline{S(0,R)}} x\cdot\eta \leq R\cdot|\eta|.$$

D'altro canto, $R\,\dfrac{\eta}{|\eta|} \in \overline{S(0,R)}$ e allora:

$$\sup_{|x|\leq R} x\cdot\eta \geq R\,\frac{\eta}{|\eta|}\cdot\eta = R\cdot|\eta|.$$

Dunque $H_K(\eta) = R \cdot |\eta|$.

Proposizione 2.8.8. *Per la funzione supporto valgono le seguenti proprietà:*

i) $H_{K_1+K_2} = H_{K_1} + H_{K_2}$, *per ogni* K_1, K_2 *compatti.*
ii) $H_K(\xi + \eta) \leq H_K(\xi) + H_K(\eta)$, *con* ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$.
iii) $H_K(t\,\xi) = t\,H_K(\xi)$, *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e per ogni* $t > 0$.

Dimostrazione.

i)

$$H_{K_1+K_2}(\eta) = \sup_{x \in K_1+K_2} x\,\eta = \sup_{\substack{x_1 \in K_1 \\ x_2 \in K_2}} (x_1 + x_2)\,\eta = \sup_{\substack{x_1 \in K_1 \\ x_2 \in K_2}} (x_1\,\eta + x_2\,\eta) \leq$$
$$\leq \sup_{x_1 \in K_1} x_1\,\eta + \sup_{x_2 \in K_2} x_2\,\eta = H_{K_1}(\eta) + H_{K_2}(\eta).$$

$$H_{K_1}(\eta) + H_{K_2}(\eta) = \overline{x}_1\,\eta + \overline{x}_2\,\eta = (\overline{x}_1 + \overline{x}_2)\,\eta \leq$$
$$\leq \sup_{\substack{x_1 \in K_1 \\ x_2 \in K_2}} (x_1 + x_2)\,\eta = H_{K_1+K_2}(\eta).$$

Segue da qui la tesi.

ii)

$$H_K(\xi + \eta) = \sup_{x \in K} x\,(\xi + \eta) = \sup_{x \in K} (x\,\xi + x\,\eta) \leq \sup_{x \in K} x\,\xi + \sup_{x \in K} x\,\eta =$$
$$= H_K(\xi) + H_K(\eta).$$

La disuguaglianza opposta non vale in generale:

$$H_K(\xi) + H_K(\eta) = \sup_{x \in K} x\,\xi + \sup_{x \in K} x\,\eta = \overline{x}\,\xi + \overline{\overline{x}}\,\eta, \qquad \overline{x},\, \overline{\overline{x}} \in K,$$

dove in generale $\overline{x} \neq \overline{\overline{x}}$.

iii) Sia $H_K(\xi) = \overline{x}\,\xi$. Poiché $t > 0$, per ogni $x \in K$ si ha:

$$x \cdot (t\,\xi) = t\,(x \cdot \xi) \leq t \sup_{x \in K} x\,\xi = t\,H_K(\xi);$$

quindi

$$H_K(t\,\xi) \leq t\,H_K(\xi);$$

inoltre

$$t\,H_K(\xi) = t\,\overline{x}\,\xi = \overline{x}\,(t\,\xi) \leq \sup_{x \in K} x\,(t\,\xi) = H_K(t\,\xi).$$

□

Osservazione 2.8.9. *Le proprietà* ii) *e* iii) *assicurano che* H_K *è una funzione convessa. Per la* ii) H_K *è positivamente omogenea.*

Teorema 2.8.10 (di Paley–Wiener–Schwartz)**.** *Sia* K *un sottoinsieme compatto convesso di* $\mathbb{R}^n$ *con funzione supporto* H*.*

i) *Se* T *è una distribuzione di ordine* N *con supporto contenuto in* K*, allora esiste una costante* C *tale che:*

$$|\widehat{T}(\zeta)| \leq C\,(1+|\zeta|)^N\, e^{H\,(\Im\,\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{8.11}$$

ii) *Viceversa, ogni funzione intera in* $\mathbb{C}^n$*,* $\mathcal{U}(\zeta)$*, tale che esistono costanti* C*,* N *per le quali sia verificata la stima:*

$$|\mathcal{U}(\zeta)| \leq C\,(1+|\zeta|)^N\, e^{H\,(\Im\,\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{8.12}$$

è la trasformata di Fourier–Laplace di una distribuzione con supporto in K*.*

iii) *Se* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$*, allora per ogni* N *esiste una costante* C_N *tale che:*

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \leq C_N\,(1+|\zeta|)^{-N}\, e^{H\,(\Im\,\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{8.13}$$

iv) *Viceversa, una funzione intera in* $\mathbb{C}^n$*,* $\mathcal{U}(\zeta)$*, tale che per ogni* N *esista una costante* C_N *per la quale sia soddisfatta la stima:*

$$|\mathcal{U}(\zeta)| \leq C_N\,(1+|\zeta|)^{-N}\, e^{H\,(\Im\,\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{8.14}$$

è la trasformata di Fourier–Laplace di una funzione $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$*.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{E}'$, $\operatorname{supp} T \subset K$, $\operatorname{ord} T = N$. Per il Teorema 2.8.4 la trasformata di Fourier–Laplace di T, $\widehat{T}(\zeta) = T(e^{-\imath\cdot\zeta})$ è una funzione intera in $\mathbb{C}^n$. Posto $K_\delta = K + \overline{S(0,\delta)}$, $\delta > 0$, scegliamo una funzione $\mathcal{X}_\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(K_\delta)$, tale che:

$$\mathcal{X}_\delta = 1 \text{ in } K_{\frac{\delta}{2}} \;\text{ e }\; |\partial^\alpha \mathcal{X}_\delta| \leq c_\alpha\, \delta^{-|\alpha|},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$$

per esempio

$$\mathcal{X}_\delta = \mathcal{X}_{K\,\frac{3}{4}\,\delta} * J_{\frac{\delta}{4}}.$$

Allora, per il teorema di caratterizzazione delle distribuzioni a supporto compatto:

$$\begin{aligned} |\widehat{T}(\zeta)| &= |T(e^{-\imath\cdot\zeta})| = |T(\mathcal{X}_\delta\, e^{-\imath\cdot\zeta})| \leq \\ &\leq c \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_x |\partial_x^\alpha(\mathcal{X}_\delta(x)\, e^{-\imath\, x\, \zeta})|. \end{aligned} \tag{8.15}$$

È poi:

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha(\mathcal{X}_\delta(x)\, e^{-\imath\, x\, \zeta})| &\le \sum_{\alpha'\le\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} |\partial^{\alpha'} \mathcal{X}_\delta(x)| \cdot |\partial_x^{\alpha-\alpha'}\, e^{-\imath\, x\, \zeta}| \le \\
&\le \widetilde{c}_\alpha \sum_{\alpha'\le\alpha} \delta^{-|\alpha'|}\, |\zeta^{\alpha-\alpha'}| \sup_{x\in K_\delta} e^{x\cdot\Im\zeta}\, \mathcal{X}_\delta(x) \le \\
&\le \widetilde{c}_\alpha \sum_{\alpha'\le\alpha} \delta^{-|\alpha'|}\, |\zeta|^{|\alpha-\alpha'|}\, e^{H_{K_\delta}(\Im\zeta)}.
\end{aligned}
$$

Per la i) della Proposizione 2.8.8:

$$
H_{K_\delta}(\Im\zeta) = H_{K+S(0,\delta)}(\Im\zeta) = H(\Im\zeta) + \delta\, |\Im\zeta|;
$$

quindi

$$
|\partial_x^\alpha(\mathcal{X}_\delta(x)\, e^{-\imath\, x\, \zeta})| \le \widetilde{c}_\alpha \sum_{\alpha'\le\alpha} \delta^{-|\alpha'|}\, |\zeta|^{|\alpha-\alpha'|}\, e^{H(\Im\zeta)+\delta\,|\Im\zeta|}. \tag{8.16}
$$

Da (8.15) e (8.16) segue:

$$
|\widehat{T}(\zeta)| \le \widetilde{\widetilde{c}}_N\, e^{H(\Im\zeta)+\delta\,|\Im\zeta|} \sum_{|\alpha'|\le N} \delta^{-|\alpha'|}\, (1+|\zeta|)^{N-|\alpha'|}.
$$

Questa stima vale per ogni $\delta > 0$. Scegliamo

$$
\delta = \frac{1}{1+|\zeta|};
$$

otteniamo così:

$$
|\widehat{T}(\zeta)| \le \widetilde{\widetilde{\widetilde{c}}}\, e^{H(\Im\zeta)+\frac{|\Im\zeta|}{1+|\zeta|}}\, (1+|\zeta|)^N,
$$

da cui la (8.11).

Proviamo iii). Sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$. Per il Teorema 2.8.3, per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$:

$$
\widehat{\varphi}(\zeta) = \int e^{-\imath\, x\, \zeta}\, \varphi(x)\, dx.
$$

Quindi per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$
\begin{aligned}
\zeta^\alpha\, \widehat{\varphi}(\zeta) &= \int \zeta^\alpha\, e^{-\imath\, x\, \zeta}\, \varphi(x)\, dx = \\
&= \imath^{|\alpha|} \int (\partial_x^\alpha\, e^{-\imath\, x\, \zeta})\, \varphi(x)\, dx = \\
&= (-\imath)^{|\alpha|} \int e^{-\imath\, x\, \zeta}\, \partial^\alpha\varphi(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}|\zeta^\alpha \widehat{\varphi}(\zeta)| &\le \int_K e^{x\,\Im\zeta}|\partial^\alpha\varphi(x)|\,dx \le \\ &\le \sup_{x\in K} e^{x\,\Im\zeta}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^1} = \\ &= e^{H(\Im\zeta)}\,\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Scriviamo questa stima per $\alpha = 0$ e per $\alpha = N\,e_j$, $j = 1,\dots,n$, N un arbitrario numero naturale:

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}(\zeta)\| &\le \|\varphi\|_{L^1}\, e^{H(\Im\zeta)} \\ |\zeta_j^N\,\widehat{\varphi}(\zeta)| &\le \|\partial_j^N\varphi\|_{L^1}\, e^{H(\Im\zeta)}, \qquad j = 1,\dots,n.\end{aligned}$$

Sommando termine a termine si ottiene

$$\Big(1 + \sum_{j=1}^n |\zeta_j|^N\Big)\,|\widehat{\varphi}(\zeta)| \le \Big(\|\varphi\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^N\varphi\|_{L^1}\Big)\, e^{H(\Im\zeta)}.$$

Quindi

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \le C_N\,(1+|\zeta|)^{-N}\, e^{H_K(\Im\zeta)},$$

dove:

$$\begin{aligned}C_N &= c_N\Big(\|\varphi\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^N\varphi\|_{L^1}\Big) \le \\ &\le c_N\,\mathrm{mis}(K)\sum_{|\alpha|\le N}\sup|\partial^\alpha\varphi|\end{aligned}$$

e c_N dipende solo da N ed n.

Dimostriamo iv). Sia $\mathcal{U}(\zeta)$ una funzione intera soddisfacente (8.14) per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Allora la sua restrizione ad $\mathbb{R}^n$ è una funzione analitica e verifica:

$$\forall\,N\ \exists\,C_N\ :\ |\mathcal{U}(\zeta)| \le C_N\,(1+|\xi|)^{-N}. \tag{8.17}$$

Ciò consente di definire:

$$\varphi(x) = (2\,\pi)^{-n}\int e^{\imath\,x\,\xi}\,\mathcal{U}(\xi)\,d\xi. \tag{8.18}$$

Poiché $\mathcal{U} \in L^2 \cap \mathcal{C}$, vale la formula di inversione della trasformata di Fourier: $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{U}$. Quindi:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{U}(\xi). \tag{8.19}$$

Inoltre, grazie alla (8.17):

$$\partial^\alpha\varphi(x) = (2\,\pi)^{-n}\int e^{\imath\,x\,\xi}\,(\imath\,\xi)^\alpha\,\mathcal{U}(\xi)\,d\xi, \qquad \forall\,\alpha,$$

sicchè $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Proveremo che supp $\varphi \subset K$; con ciò la dimostrazione di iv) sarà completa. Infatti, per il Teorema 2.8.3, $\widehat{\varphi}(\zeta)$ sarà una funzione intera ed inoltre:

$$\widehat{\varphi}(\zeta)_{|\mathbb{R}^n} = \widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{U}(\xi) = \mathcal{U}(\zeta)_{|\mathbb{R}^n};$$

quindi:

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = \mathcal{U}(\zeta), \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Proviamo che supp $\varphi \subset K$. Cominciamo con lo stabilire che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ vale l'identità:

$$\int e^{\imath\, x\, \xi}\, \mathcal{U}(\xi)\, d\xi = \int e^{\imath\, x\,(\xi + \imath\, \eta)}\, \mathcal{U}(\xi + \imath\, \eta)\, d\xi. \tag{8.20}$$

Supponiamo $n = 1$ e quindi ξ, $\eta \in \mathbb{R}$. La funzione

$$\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto f(\zeta) := e^{\imath\, x\, \zeta}\, \mathcal{U}(\zeta),$$

con $x \in \mathbb{R}$ fissato, è intera e verifica (v. (8.14) con $N = n = 1$)

$$|f(\zeta)| \leq C_1 (1 + |\Re\, \zeta|)^{-1}\, e^{H(\Im\, \zeta) + |x|\, |\Im\, \zeta|};$$

quindi:

$$\lim_{\substack{|\Re\, \zeta| \to +\infty \\ \Im\, \zeta = \eta = \text{cost.}}} f(\zeta) = 0.$$

Per un noto corollario del Teorema di Cauchy sulle funzioni analitiche:

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\,\zeta = \int_{\gamma_\eta} f(\zeta)\, d\,\zeta, \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R}, \tag{8.21}$$

dove si è denotata con γ_η la retta del piano complesso $\zeta = \xi + \imath\, \eta$, con $-\infty < \xi < +\infty$. Sostituendo ad $f(\zeta)$ la sua espressione, da (8.21) segue:

$$\int_{\gamma_0} e^{\imath\, x\, \zeta}\, \mathcal{U}(\zeta)\, d\,\zeta = \int_{\gamma_\eta} e^{\imath\, x\, \zeta}\, \mathcal{U}(\zeta)\, d\,\zeta$$

i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath\, x\, \xi}\, \mathcal{U}(\xi)\, d\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath\, x\,(\xi + \imath \eta)}\, \mathcal{U}(\xi + \imath\, \eta)\, d\,\xi.$$

Questa uguaglianza vale anche per $\xi + \imath\, \eta \in \mathbb{C}^n$ e si prova iterando il procedimento precedente per le variabili $\xi_1 + \imath\, \eta_1, \ldots, \xi_n + \imath\, \eta_n$. La (8.20) è dunque valida. Da (8.18) e (8.20) segue:

$$\varphi(x) = \int e^{\imath\, x\,(\xi + \imath\, \eta)}\, \mathcal{U}(\xi + \imath\, \eta)\, d\,\xi, \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, utilizzando la (8.14) con $N = n + 1$:

$$|\varphi(x)| \leq C_{n+1} \int e^{-x\cdot\eta}\,(1 + |\xi|)^{-(n+1)}\, e^{H(\eta)}\, d\xi = \\ = \widetilde{C}_n \cdot e^{-x\cdot\eta + H(\eta)}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Per l'arbitrarietà di η, abbiamo anche

$$|\varphi(x)| \leq \widetilde{C}_n\, e^{-x\cdot t\,\eta + H(t\,\eta)} = \\ = \widetilde{C}_n\, e^{-t(x\,\eta - H(\eta))}, \qquad \forall\, t > 0, \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{8.22}$$

Sia $x_0 \notin K$. Poiché K è compatto e convesso, per la seconda forma geometrica del Teorema di Hahn–Banach esiste un iperpiano di $\mathbb{R}^n$ che separa K e $\{x_0\}$ in senso stretto; sia $x\,\eta_0 = c$ l'equazione di tale iperpiano. Pertanto:

$$x\,\eta_0 < c < x_0\,\eta_0 \qquad \forall\, x \in K;$$

quindi

$$H(\eta_0) = \sup_{x\in K} x\,\eta_0 \leq c < x_0\,\eta_0. \tag{8.23}$$

Se nella (8.22) poniamo: $x = x_0$, $\eta = \eta_0$, otteniamo:

$$|\varphi(x_0)| \leq \widetilde{C}_n\, e^{-t(x_0\,\eta_0 - H(\eta_0))}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{8.24}$$

Per (8.23) $x_0\,\eta_0 - H(\eta_0) > 0$. Quindi il limite per $t \to +\infty$ del secondo membro di (8.24) è 0. Si conclude che $\varphi(x_0) = 0$. Dunque φ si annulla nel complementare di K, ossia $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Ciò completa la dimostrazione di iv).

Dimostriamo ii). Sia $\mathcal{U}(\zeta)$ una funzione intera soddisfacente: esistono N, C tali che

$$|\mathcal{U}(\zeta)| \leq C\,(1 + |\zeta|)^N\, e^{H(\Im\,\zeta)}, \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Allora la restrizione di $\mathcal{U}$ ad $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\mathcal{C}^\infty$ che verifica:

$$|\mathcal{U}(\xi)| \leq C\,(1 + |\xi|)^N.$$

Quindi $\mathcal{U} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Poiché la trasformata di Fourier è un omeomorfismo di $\mathcal{S}'$ in sè, esiste $T \in \mathcal{S}'$ tale che

$$\widehat{T} = \mathcal{U}.$$

Sia J_ε un mollificatore. Per quanto osservato all'inizio del Teorema 2.8.4

$$T_\varepsilon := T * J_\varepsilon \longrightarrow T \qquad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Inoltre

$$\widehat{T}_\varepsilon = \widehat{J}_\varepsilon \cdot \widehat{T}. \tag{8.25}$$

Inoltre, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_\varepsilon \cdot \widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\widehat{J}_\varepsilon \, \varphi) = T(\widehat{\widehat{J}_\varepsilon \, \varphi}) = \\
&= T(\widehat{\widehat{J}}_\varepsilon * \widehat{\varphi})\,(2\,\pi)^{-n} = \\
&= (T * (\widehat{\widehat{J}}_\varepsilon * \widehat{\varphi})^\vee)(0) \cdot (2\,\pi)^{-n} = \\
&= (T * (\overset{\vee}{\widehat{\widehat{J}}}_\varepsilon * \overset{\vee}{\widehat{\varphi}}))(0) \cdot (2\,\pi)^{-n} = \\
&= (T * (J_\varepsilon * \overset{\vee}{\widehat{\varphi}}))(0) = \\
&= ((T * J_\varepsilon) * \overset{\vee}{\widehat{\varphi}})(0) = \\
&= (T_\varepsilon * \overset{\vee}{\widehat{\varphi}})(0) = \\
&= T_\varepsilon(\widehat{\varphi}) = \widehat{T}_\varepsilon(\varphi).
\end{aligned}$$

Poiché $\widehat{J}_\varepsilon \cdot \widehat{T}$ è la funzione $\widehat{J}_\varepsilon(\xi)\,\mathcal{U}(\xi)$, da (8.25)

$$\widehat{T}_\varepsilon(\xi) = \widehat{J}_\varepsilon(\xi)\,\mathcal{U}(\xi).$$

Per ipotesi su $\mathcal{U}$ e per iii) ($J_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty$) il secondo membro si prolunga ad una funzione intera $\widehat{J}_\varepsilon(\zeta)\,\mathcal{U}(\zeta)$. Quindi $\widehat{T}_\varepsilon(\zeta)$ è intera e verifica per ogni $M > 0$:

$$\begin{aligned}
|\widehat{T}_\varepsilon(\zeta)| &\le C_M(1 + |\zeta|)^{-M}\,(1 + |\zeta|)^N\, e^{H(\Im\,\zeta) + H_{\overline{S(0,\varepsilon)}}(\Im\,\zeta)} \\
&= \widetilde{C}_M(1 + |\zeta|)^{N-M}\, e^{H_{K+\overline{S(0,\varepsilon)}}(\Im\,\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di M e per iv) $\widehat{T}_\varepsilon(\zeta)$ è la trasformata di Fourier–Laplace di una funzione appartenente $\mathcal{C}_c^\infty(K + \overline{S(0,\varepsilon)})$; quindi:

$$\operatorname{supp}\, T_\varepsilon \subset K + \overline{S(0,\varepsilon)}. \tag{8.26}$$

Poiché $T_\varepsilon \to T$ in $\mathcal{S}'$, segue da (8.26) passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$

$$\operatorname{supp}\, T \subset K.$$

La dimostrazione è completa. $\square$

9. Operatori differenziali a coefficienti costanti. Soluzione fondamentale

Definizione 2.9.1. *Sia* $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, $(D_j = \frac{1}{j}\partial_{x_j})$ *un operatore differenziale con coefficienti* $a_\alpha \in \mathbb{C}$. *Diciamo che una distribuzione* $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *è una soluzione fondamentale di* $P(D)$ *se:*

$$P(D)\, E = \delta.$$

Teorema 2.9.2. *Ogni operatore differenziale non nullo* $P(D)$ *ammette una soluzione fondamentale.*

Questo teorema è stato dimostrato da Ehrenpreis e da Malgrange; noi daremo qui una dimostrazione costruttiva dovuta ad Hörmander.

Se $P(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, si può definire E come $\mathcal{F}^{-1}\Big(\dfrac{1}{P(\xi)}\Big)$, cioè:

$$E(\varphi) = \int_{R^n} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)}\,\bar{d}\,\xi,^{4} \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \bar{d}\,\xi = (2\,\pi)^{-n}\, d\,\xi.$$

Nel caso generale l'idea è di integrare su una varietà di $\mathbb{C}^n$ che non contenga gli zeri di $P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Utilizzeremo il seguente lemma.

Lemma 2.9.3. *Se* $P(D) \neq 0$, *allora esiste una successione* $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *con* $|\theta_k| \leq 1$, *una partizione dell'unità* $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ed una costante* $c > 0$ *tale che:*

$$|P(\xi + z\,\theta_k)| \geq c \qquad \forall\,\xi \in \mathit{supp}\ \rho_k,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\quad |z| = 1.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_{m,n}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dei polinomi Q in n variabili, di grado $\leq m$. $\mathcal{P}_{m,n}$ ha dimensione $N = \binom{n+m}{n}$. Per ogni $Q \in \mathcal{P}_{m,n}$ poniamo:

$$N(Q) = \Big(\sum_\alpha |Q^{(\alpha)}(0)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}; \qquad r(Q) = \sup_{\substack{|\theta|\leq 1\\ \theta\in\mathbb{R}^n}}\ \inf_{\substack{|z|=1\\ z\in\mathbb{C}}} |Q(z\,\theta)|.$$

---

[4]Nota che in effetti:

$$P(D)\, E(\varphi) = E(P(-D)\,\varphi) = \int \frac{P(\xi)\,\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)}\,\bar{d}\,\xi = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Esistono costanti c_1 e c_2 (dipendenti solo da m e da n) tali che

$$c_1\,N(Q) \leq r(Q) \leq c_2\,N(Q), \qquad Q \in \mathcal{P}_{m,n}. \tag{9.1}$$

La stima a destra è di immediata verifica; l'esistenza di c_1 verrà provata in seguito.

Noi qui muniremo $\mathcal{P}_{m,n}$ della norma $N(Q)$ ed utilizzeremo la stima a sinistra per provare il lemma.

Osserviamo che dalla definizione di $r(Q)$, per la continuità della funzione $(z,\theta) \mapsto |Q(z\,\theta)|$, segue:

$$\forall\, Q_0 \in \mathcal{P}_{m,n}\ \exists\, \theta_0 \in \mathbb{R}^n\ :\ |\theta_0| \leq 1,\ \exists\, z_0 \in \mathbb{C}\ :\ |z_0| = 1$$

tali che:

$$r(Q_0) = |Q_0(z_0\,\theta_0)| \leq |Q_0(z\,\theta_0)| \qquad \forall\, z \in \mathbb{C};\ |z| = 1$$

e quindi, per (9.1):

$$|Q_0(z\,\theta_0)| \geq c_1\,N(Q_0) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C};\ |z| = 1.$$

La mappa:

$$\begin{array}{rccl} \phi_2: & \mathcal{P}_{m,n} & \to & \mathbb{R} \\ & Q & \mapsto & |Q(z\,\theta_0)| = \frac{c_1}{2}\,N(Q) \end{array}$$

è continua, uniformemente rispetto a $z \in \mathbb{C} \cap \{|z| = 1\}$ ed assume valore positivo per $Q = Q_0$. Quindi esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$N(Q - Q_0) < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad \phi_2(Q) > 0 \quad \forall\, |z| = 1.$$

Resta così provato:

$$\begin{aligned} &\forall\, Q_0 \in \mathcal{P}_{m,n}\ \ \exists\ \theta_0 \in \mathbb{R}^n,\ \ |\theta_0| = 1 \text{ ed } \exists\ \delta_0 > 0 \text{ t.c.} \\ &Q \in \mathcal{P}_{m,n},\ \ N(Q - Q_0) < \delta_0 \implies |Q(z\,\theta_0)| > \frac{c_1}{2}\,N(Q) \quad \forall\, |z| = 1. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Per ogni $P \in \mathcal{P}_{m,n}$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con P_ξ il "polinomio traslato":

$$P_\xi(\zeta) = P(\xi + \zeta).$$

Allora:

$$P_\xi(\zeta) = \sum_\alpha \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!}\,\zeta^\alpha; \qquad N(P_\xi) = \Big(\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Da (9.2) con P_ξ in luogo di Q_0 abbiamo:

(9.3)
$$\begin{gathered}\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \ \ \exists\, \theta_\xi \in \mathbb{R}^n, \text{ con } |\theta_\xi| = 1 \text{ ed } \exists\, \delta_\xi > 0 \text{ t.c.} \\ Q \in \mathcal{P}_{m,n}, \quad N(Q - P_\xi) < \delta_\xi \implies |Q(z\,\theta_\xi)| > \frac{c_1}{2}\, N(Q) \quad \forall\, |z| = 1.\end{gathered}$$

Poiché i coefficienti di P_ξ sono funzioni continue di ξ, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ esiste un intorno V_ξ di ξ tale che

$$\eta \in V_\xi \quad \implies \quad N(P_\eta - P_\xi) < \delta_\xi$$

e, quindi, per (9.3):

$$\eta \in V_\xi \quad \implies \quad |P_\eta(z\,\theta_\xi)| > \frac{c_1}{2}\, N(P_\eta) \qquad \forall\, |z| = 1.$$

È poi immediato verificare che esiste una costante $C_P > 0$ (dipendente solo dal polinomio P) tale che

$$N(P_\eta) \geq C_P \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Abbiamo così provato:

(9.4)
$$\begin{gathered}\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \ \ \exists \text{ un intorno } V_\xi \text{ ed } \ \exists\, \theta_\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\theta_\xi| \leq 1 \text{ tale che} \\ |P(\eta + z\,\theta_\xi)| > \frac{c_1}{2}\, C_p, \qquad \forall\, \eta \in V_\xi, \quad \forall\, |z| = 1.\end{gathered}$$

Sia $\{V_{\xi_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sottoricoprimento numerabile localmente finito[5] estratto dal ricoprimento $\{V_\xi\}_{\xi\in\mathbb{R}^n}$ di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^\infty$ subordinata a $\{V_{\xi_k}\}$:

$$\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(V_{\xi_k}), \quad 0 \leq \rho_k(\xi) \leq 1; \qquad \sum_k \rho_k(\xi) = 1 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Da (9.4) essendo supp $\rho_k \subset V_{\xi_k}$ segue finalmente:

$$|P(\eta + z\,\theta_{\xi_k})| > \frac{c_1}{2}\, C_p, \qquad \forall\, \eta \in \text{supp } \rho_k, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.$$

Questa è la tesi con $\theta_k = \theta_{\xi_k}$, $c = \dfrac{c_1}{2}\, C_p$. $\square$

Teorema 2.9.4. *Ogni operatore differenziale non nullo $P(D)$ ammette una soluzione fondamentale.*

[5] "localmente finito" significa: "ogni insieme compatto interseca al più un numero finito di insiemi del ricoprimento

Dimostrazione. Definiamo E ponendo per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$E(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\,\pi\,\imath}\int_{|z|=1} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi - z\,\theta_k)}{P(\xi + z\,\theta_k)}\,\frac{d\,z}{z}\Big)\,d\,\xi, \tag{9.5}$$

dove $\{\theta_k\}$ e $\{\rho_k\}$ sono come indicato nel Lemma 2.9.3. Per il Teorema di Paley–Wiener applicato alla funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall\, N\ \exists\, C_N \text{ t.c. } |\widehat{\varphi}(-\xi - z\,\theta_k)| \le C_N\,(1 + |\xi| + |z\,\theta_k|)^{-N}\,e^{R\,|\Im\, z\,\theta_k|},$$

dove R è il raggio di una sfera contenente supp φ, $C_N = \widetilde{c}_n \sum_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^1}$, $\widetilde{c}_n$ dipendente solo da n. Scegliendo $N = n+1$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}(-\xi - z\,\theta_k)| &\le C_{n+1}\,(1+|\xi|)^{-(n+1)}\,e^R = \\
&= \widetilde{c}_{n+1} \sum_{|\alpha|\le n+1} \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^1}\,(1+|\xi|)^{-(n+1)}\,e^R = \\
&= \widetilde{c}_{n+1}\,e^R\,(\operatorname{mis}\operatorname{supp}\varphi) \sum_{|\alpha|\le n+1} \sup|\partial^\alpha\varphi|\,(1+|\xi|)^{-(n+1)} = \\
&= A_1 \sum_{|\alpha|\le n+1} \sup|\partial^\alpha\varphi|\,(1+|\xi|)^{-(n+1)};
\end{aligned}$$

dove A_1 dipende solo da n e da supp φ.

Per il Lemma 2.9.3, per ogni $\xi \in \operatorname{supp}\rho_k$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$:

$$|P(\xi + z\,\theta_k)| \ge c > 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\Big|\rho_k(\xi)\,\frac{1}{2\,\pi\,\imath}\int_{|z|=1}\frac{\widehat{\varphi}(\xi + z\,\theta_k)}{P(\xi + z\,\theta_k)}\,\frac{d\,z}{z}\Big| \le \\
&\qquad\le \rho_k(\xi)\,c^{-1}\,A_1\Big(\sum_{|\alpha|\le n+1}\sup|\partial^\alpha\varphi|\,(1+|\xi|)^{-(n+1)}\Big)
\end{aligned}$$

e da (9.5):

$$\begin{aligned}
|E(\varphi)| &\le A_1\,\overline{c}^{-1}\sum_{|\alpha|\le n+1}\sup|\partial^\alpha\varphi|\sum_k\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\,(1+|\xi|)^{-(n+1)}\,d\,\xi = \\
&= A_2\sum_{|\alpha|\le n+1}\sup|\partial^\alpha\varphi|.
\end{aligned}$$

Questa stima prova che $E \in \mathcal{D}'$ e ord $E \le n+1$. Per il Teorema di Paley–Wiener, la funzione:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \widehat{\varphi}(-\xi - z\,\theta_k)$$

è intera; quindi applicando la formula di Cauchy:

$$\langle P(D)\,E,\varphi\rangle = \langle E, P(-D)\,\varphi\rangle =$$

$$= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\Big(\frac{1}{2\,\pi\,\imath}\int_{|z|=1} \frac{P(\xi+z\,\theta_k)\,\widehat{\varphi}(-\xi-z\,\theta_k)}{P(\xi+z\,\theta_k)}\,\frac{d\,z}{z}\Big)\,\overline{d}\,\xi =$$

dove $\overline{d}\,\xi = \frac{d\,\xi}{(2\,\pi)^n}$

$$= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(\xi)\,\widehat{\varphi}(-\xi)\,\overline{d}\,\xi =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_k \rho_k(\xi)\,\widehat{\varphi}(-\xi)\,\overline{d}\,\xi = \varphi(0).$$

Dunque $P(D)\,E = \delta$. □

Corollario 2.9.5. *Se $P(D)$ è un operatore differenziale non nullo a coefficienti costanti, l'equazione*

$$P(D)\,u = f \tag{9.6}$$

ammette almeno una soluzione in $\mathcal{D}'$ quale che sia $f \in \mathcal{E}'$.

Dimostrazione. Se E è una soluzione fondamentale di $P(D)$, $u = E * f$ è soluzione di (9.6). □

Per la dimostrazione del Lemma 2.9.3 abbiamo utilizzato la seguente

Proposizione 2.9.6. *Esiste una costante c tale che per ogni polinomio $Q \in \mathcal{P}_{m,n}$ si ha:*

$$\Big(\sum_{|\alpha|\le m} |Q^{|\alpha|}(0)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le C \sup_{\substack{|\theta|\le 1\\ \theta\in\mathbb{R}^n}} \inf_{\substack{|z|=1\\ z\in\mathbb{C}}} |Q(z\,\theta)| \tag{9.7}$$

dove C dipende solo da m e da n.

La dimostrazione di (9.7) si fonda sui seguenti lemmi.

Lemma 2.9.7. *Siano $P_1(\xi),\dots,P_N(\xi)$ polinomi linearmente indipendenti. Allora esistono N vettori reali $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(N)}$ tali che il determinante $\det|P_j(\xi^{(k)})|_{1\le j,k\le N}$ è diverso da 0.*

Dimostrazione. Supponiamo di non poter trovare $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(N)}$ tali che

$$\det|P_j(\xi^{(k)})|_{1\le j,k\le N} \ne 0. \tag{9.8}$$

Sia $l \leq N$ il più piccolo intero tale che per ogni scelta di $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}$ riesca:

$$\det |P_j(\xi^{(k)})|_{1\leq j,k\leq l} = 0.$$

(Nota che è $l > 1$, poiché se fosse $l = 1$, il polinomio P_1 si annullerebbe in ogni vettore reale e quindi P_1 sarebbe il polinomio nullo, contro l'ipotesi che $P_1, \dots, P_N$ sono linearmente indipendenti).

Per come è stato definito l, esistono $l-1$ vettori $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(l-1)}$ tali che:

$$\det |P_j(\xi^{(k)})|_{1\leq j,k\leq l-1} \neq 0, \tag{9.9}$$

mentre

$$\det \begin{pmatrix} P_1(\xi^{(1)}) & \cdots & P_1(\xi^{(l-1)}) & P_1(\xi) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_l(\xi^{(1)}) & \cdots & P_l(\xi^{(l-1)}) & P_l(\xi) \end{pmatrix} = 0 \qquad \forall\, \xi \text{ reale.} \tag{9.10}$$

Sviluppando (9.10) otteniamo:

$$\sum_{j=1}^{l} \gamma_j\, P_j(\xi) = 0 \qquad \forall\, \xi. \tag{9.11}$$

Poiché per (9.9), $\gamma_l \neq 0$, (9.11) dice che $P_1, \dots, P_l$ sono linearmente indipendenti, contro l'ipotesi. Quindi non esiste l con le proprietà indicate e ciò prova il lemma. □

Lemma 2.9.8. *Esiste una costante C_1 tale che per ogni polinomio $Q \in \mathcal{P}_{m,n}$ si ha:*

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq m} |Q^{|\alpha|}(0)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \sup_{\substack{|\theta|\leq 1\\ \theta\in\mathbb{R}^n}} |Q(\theta)|. \tag{9.12}$$

Dimostrazione. Sia $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, $N = \binom{n+m}{n}$, una enumerazione dei multiindici $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tali che $|\alpha| \leq m$.

Poiché i polinomi $P_j(\xi) = \xi^{\alpha_j}$, $1 \leq j \leq N$, sono linearmente indipendenti, per il Lemma 2.9.7 esistono N vettori $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tali che:

$$\det |(\xi^{(k)})^{\alpha_j}|_{1\leq j,k\leq N} \neq 0.$$

Posto

$$\rho = \frac{1}{\max_{1\leq k\leq N} |\xi^{(k)}|}, \qquad \theta^{(k)} = \rho\, \xi^{(k)},$$

risulta

$$|\theta^{(k)}| \leq 1, \qquad 1 \leq k \leq N \tag{9.13}$$

e

$$\det|(\theta^{(k)})^{\alpha_j}| = \rho^{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|} \det|(\xi^{(k)})^{\alpha_j}| \neq 0. \tag{9.14}$$

Sia $Q \in \mathcal{P}_{m,n}$ tale che $Q(\xi) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{\alpha_j}\, \xi^{\alpha_j}$.

Indichiamo con b_k il valore di Q in $\theta^{(k)}$. Allora le equazioni

$$Q(\theta^{(k)}) = b_k, \qquad 1 \leq k \leq N \tag{9.15}$$

ossia le

$$\sum_{j=1}^{N} a_{\alpha_j}\, (\theta^{(k)})^{\alpha_j} = b_k, \qquad 1 \leq k \leq N$$

costituiscono un sistema di N equazioni lineari nelle N incognite $a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_N}$. Per (9.14) tale sistema ammette una sola soluzione:

$$a_{\alpha_j} = \sum_{k=1}^{N} b_k\, R_{k,j} \qquad 1 \leq j \leq N; \tag{9.16}$$

dove

$$R_{k,j} = \frac{\text{cofattore di } (\theta^{(k)})^{\alpha_j}}{\text{determinante del sistema}}$$

dipende solo dai vettori $\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(k)}$. Da (9.16) segue:

$$|a_{\alpha_j}| \leq C_j \sup_{1 \leq k \leq N} |b_k|, \qquad \Big(C_j = \sum_{k=1}^{N} |R_{k,j}|\Big). \tag{9.17}$$

Poiché $a_{\alpha_j} = \dfrac{Q^{(\alpha_j)}(0)}{\alpha_j!}$, da (9.17), tenuto conto di (9.13) e (9.15), segue la tesi. □

Lemma 2.9.9. *Sia $p(z)$ un polinomio di grado $\leq m$ in una variabile complessa z. Allora abbiamo:*

$$\sup_{0 \leq k \leq m}\ \inf_{|z| = \frac{k}{m}} |p(z)| \geq (4m+1)^{-m}\, |p(1)|. \tag{9.18}$$

Dimostrazione. Siano $z_1, \dots, z_\mu$ gli zeri di p. Allora con una costante $A \neq 0$:

$$p(z) = A \prod_{j=1}^{\mu} (z - z_j)^{m_j}, \qquad m_1 + \cdots + m_\mu \leq m.$$

Poiché $\mu \leq m$ possiamo scegliere un numero r della forma $r = \dfrac{k}{m}$, dove $0 \leq k \leq m$ e k è intero, tale che:

$$|r - |z_j|| \geq \frac{1}{2\,m}, \qquad \text{per } j = 1, \dots, \mu. \tag{9.19}$$

Se $|z| = r$, allora abbiamo:

$$|p(z)| \geq |A| \prod_{j=1}^{\mu} |r - |z_j||^{m_j}; \qquad |p(1)| \leq |A| \prod_{j=1}^{\mu} (1 + |z_j|)^{m_j}$$

e quindi:

$$|p(z)| \geq |p(1)| \prod_{j=1}^{\mu} \Big(\frac{|r - |z_j||}{1 + |z_j|} \Big)^{m_j}, \qquad |z| = r. \tag{9.20}$$

Ora se $|z_j| < 1 + \dfrac{1}{2\,m}$, allora in vista di (9.19):

$$\frac{|r - |z_j||}{1 + |z_j|} \geq \frac{\dfrac{1}{2\,m}}{2 + \dfrac{1}{2\,m}} = \frac{1}{4\,m + 1}.$$

Se $|z_j| \geq 1 + \dfrac{1}{2\,m}$, poiché la funzione $x \mapsto \dfrac{x - r}{x + 1}$ è crescente, si ha:

$$\frac{|r - |z_j||}{1 + |z_j|} = \frac{|z_j| - r}{|z_j| + 1} \geq \frac{1 + \dfrac{1}{2\,m} - r}{1 + \dfrac{1}{2\,m} + 1} \geq \frac{1}{4\,m + 1}.$$

Dunque, per ogni j è

$$\frac{|r - |z_j||}{1 + |z_j|} \geq (4\,m + 1)^{-1}$$

e quindi, da (9.20)

$$|p(z)| \geq |p(1)|\,(4\,m + 1)^{-m}, \qquad |z| = r.$$

Abbiamo così provato che esiste un intero k, $0 \le k \le m$ tale che:

$$\inf_{|z|=\frac{k}{m}} |p(z)| \ge |p(1)|\,(4\,m+1)^{-m},$$

cioè la tesi. □

Siamo ora in grado di dare la seguente

Dimostrazione della Proposizione 2.9.6. Sia $Q \in \mathcal{P}_{m,n}$. Allora $z \mapsto Q(z\,\theta)$ è un polinomio di grado minore o uguale a m in z. Applicando a tale polinomio il Lemma 2.9.9 otteniamo:

$$|Q(\theta)| \le (4\,m+1)^m \sup_{0\le k\le m} \inf_{|z|=\frac{k}{m}} |Q(z\,\theta)|.$$

Quindi per (9.12):

$$\Big(\sum_\alpha |Q^{(\alpha)}(0)|^2\Big)^{\frac12} \le (4\,m+1)^m\, C_1 \sup_{\substack{|\theta|\le 1\\ \theta\in\mathbb{R}^n}} \sup_{0\le k\le m} \inf_{|z|=\frac{k}{m}} |Q(z\,\theta)| =$$
$$= (4\,m+1)^m\, C_1 \sup_{\substack{|\theta|\le 1\\ \theta\in\mathbb{R}^n}} \inf_{|z|=1} |Q(z\,\theta)|.$$

Resta così provata la (9.7). □

10. L'operatore di Laplace

Definizione 2.10.1. *Chiamasi soluzione fondamentale di un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti $P(D)$ una distribuzione N tale che*

$$P(D)N = \delta$$

ossia

$$N(P(-D)\varphi) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.10.2. *Una soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace è la funzione:*

$$N(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_n} & \text{se} \quad n > 2 \\ \frac{1}{2\,\pi}\,\lg|x| & \text{se} \quad n = 2 \end{cases} \tag{10.1}$$

Dimostrazione. La funzione $N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ed è localmente integrabile, quindi è una distribuzione. Si deve provare che

$$N(\triangle\,\varphi) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

A tale scopo poniamo per ogni $\varepsilon > 0$

$$N^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)\omega_n} & \text{se} \quad n > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\lg(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} & \text{se} \quad n = 2 \end{cases} \tag{10.2}$$

Consideriamo il caso $n > 2$. Allora:

$$N_j^{(\varepsilon)}(x) = \partial_j N^{(\varepsilon)}(x) = \frac{x_j\,(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}}}{\omega_n} \tag{10.3}$$

(10.4)

$$N_{ij}^{(\varepsilon)}(x) = \partial_i\,\partial_j\,N^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} \dfrac{-n\,x_i\,x_j\,(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{(n+2)}{2}}}{\omega_n} & i \neq j \\ \dfrac{(|x|^2+\varepsilon^2-n\,x_j^2)\cdot(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{(n+2)}{2}}}{\omega_n} & i = j \end{cases}$$

Osserviamo che $N^{(\varepsilon)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $N^{(\varepsilon)}(x) \longrightarrow N(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si ha $|N(x)| \geq |N^{(\varepsilon)}(x)|$; sicchè $|N(x) - N^{(\varepsilon)}(x)| \leq 2|N(x)|$. Per il teorema della convergenza dominata si ha quindi per $\varepsilon \to 0$:

$$(N - N^{(\varepsilon)})(\triangle\,\varphi) = \int (N(x) - N^{(\varepsilon)}(x))\,\triangle\,\varphi(x)\,d\,x \longrightarrow 0, \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Il teorema resterà quindi dimostrato se proveremo che

$$N^{(\varepsilon)}(\triangle\,\varphi) \longrightarrow \varphi(0), \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty, \qquad \text{per } \varepsilon \to 0.$$

Ma, integrando per parti:

$$\begin{aligned} N^{(\varepsilon)}(\triangle\,\varphi) &= \int N^{(\varepsilon)}(x)\,\triangle\,\varphi(x)\,d\,x = \int \triangle\,N^{(\varepsilon)}(x)\,\varphi(x)\,d\,x = \\ &= \int \frac{n\,\varepsilon^2\,(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{(n+2)}{2}}}{\omega_n}\,\varphi(x)\,d\,x = \psi^{(\varepsilon)}(\varphi), \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\psi^{(\varepsilon)}(x) = \frac{n\,\varepsilon^2\,(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{(n+2)}{2}}}{\omega_n}.$$

Si noti che: $\psi^{(\varepsilon)}(x) \in L^1$, $\psi^{(\varepsilon)}(x) = \varepsilon^{-n}\psi^{(1)}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ e $\psi^{(\varepsilon)}(x) = \psi^{(\varepsilon)}(-x)$. Segue quindi per $\varepsilon \to 0$ che:

$$\psi^{(\varepsilon)}(\varphi) = \int \psi^{(\varepsilon)}(-x)\,\varphi(x)\,d\,x = \varphi * \psi^{(\varepsilon)}(0) \longrightarrow \left(\int \psi^{(1)}\right)\varphi(0).$$

Resta da provare che $\int \psi^{(1)} = 1$. Ma:

$$\int \psi^{(1)} =$$

$$= \frac{n}{\omega_n} \int (|x|^2+1)^{\frac{-(n+2)}{2}} d\,x = \frac{n}{\omega_n} \int_0^{+\infty} (r^2+1)^{\frac{-(n+2)}{2}} \Big(\int_{S(0,r)} d\,\sigma \Big)\, d\,r =$$

$$= n \int_0^{+\infty} (r^2+1)^{\frac{-(n+2)}{2}}\, r^{n-1}\, d\,r = \qquad s = r^2+1,\ r = (s-1)^{\frac{1}{2}},\ d\,r = \tfrac{(s-1)^{-\frac{1}{2}}}{2}\, d\,s$$

$$= \frac{n}{2} \int_1^{+\infty} s^{\frac{-(n+2)}{2}}\, (s-1)^{\frac{(n-2)}{2}}\, d\,s =$$

$$= \frac{n}{2} \int_1^{+\infty} (1-s^{-1})^{\frac{(n-2)}{2}}\, s^{-2}\, d\,s = \qquad s = \frac{1}{\sigma},\ d\,s = \tfrac{-d\,\sigma}{\sigma^2}$$

$$= \frac{n}{2} \int_0^1 (1-\sigma)^{\frac{(n-2)}{2}}\, d\,\sigma = \frac{n}{2} \Big[-\frac{2}{n} (1-\sigma)^{\frac{n}{2}} \Big]_{\sigma=0}^{\sigma=1} = 1.$$

In modo del tutto analogo si prova il teorema nel caso che sia $n = 2$. □

Conseguenza del Teorema 2.10.2 è la possibilità di costruire una soluzione di $\triangle\, u = f$ almeno nel senso delle distribuzioni.

Teorema 2.10.3. *Supponiamo che* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ed inoltre che* $\int_{|y|>1} |f(y)|\ \lg\, |y|\, d\,y < \infty$ *se* $n = 2$. *Allora* $u = f * N$ *è localmente integrabile e soluzione nel senso delle distribuzioni dell'equazione:*

$$\triangle\, u = f.$$

Dimostrazione. Indicata con $\mathcal{X}$ la funzione caratteristica di $S(0,1)$, scriveremo:

$$N = \mathcal{X}\, N + (1-\mathcal{X})\, N = N_0 + N_\infty, \qquad N_0 = \mathcal{X}\, N, \quad N_\infty = (1-\mathcal{X})\, N.$$

Poiché N è localmente integrabile, $N_0 \in L^1$ e quindi $f * N_0$ è definita quasi ovunque ed appartiene ad L^1. Se $n > 2$, $N_\infty \in L^\infty$ e quindi $f * N_\infty$ è definita ovunque ed è limitata. Se $n = 2$ si ha:

$$f * N_\infty(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{|x-y|>1} f(y)\ \lg\, |x-y|\, d\,y.$$

Sia $0 < \delta < 1$ tale che $0 \leq t < \delta \ \Rightarrow\ \lg\,(t+1) < 1$ e sia $R \geq 1$. Allora per ogni $x \in S(0,R)$, per ogni $y \notin S\Big(0, \dfrac{R}{\delta}\Big)$ è $\dfrac{|x|}{|y|} < \delta$ e quindi $\lg\, \Big(\dfrac{|x|}{|y|} + 1\Big) < 1$.

Pertanto per ogni $x \in S(0,R)$, per ogni $y \notin S\Big(0, \dfrac{R}{\delta}\Big)$ si ha:

$$\Big| \lg |x-y| \Big| \le \Big| \lg |x-y| - \lg |y| \Big| + \lg |y| \le \Big| \lg \Big(\frac{|x|}{|y|} + 1\Big)\Big| + \lg |y| <$$
$$< 1 + \lg |y|.$$

Tenendo conto dell'ipotesi supplementare per f nel caso $n=2$, si ottiene per ogni $x \in S(0,R)$:

$$\Big| f * N_\infty(x)\Big| \le \Big| \int_{\substack{|x-y|>1 \\ |y|\le \frac{R}{\delta}}} f(y) \lg |x-y| \, d\, y \Big| + \Big| \int_{\substack{|x-y|>1 \\ |y|> \frac{R}{\delta}}} f(y) \lg |x-y| \, d\, y \Big| \le$$
$$\le \lg \Big(R + \frac{R}{\delta}\Big) \|f\|_1 + \int_{|y|>\frac{R}{\delta}} |f(y)| \, (1 + \lg |y|) < \infty.$$

Dunque $f * N_\infty$ esiste ovunque ed è localmente limitata. In ogni caso, $u = f * N$ è definita quasi ovunque ed è localmente integrabile.

Poniamo

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad |x| \le j \\ 0 & \text{se} \quad |x| > j \end{cases}$$

Allora le f_j soddisfano alle ipotesi fatte su f e quindi le $u_j = f_j * N$ sono definite quasi ovunque e localmente integrabili.

Un'applicazione del teorema della convergenza dominata mostra che:

$$u_j \longrightarrow u \qquad \text{in } \mathcal{D}';$$

quindi

$$\triangle\, u_j \longrightarrow \triangle\, u \qquad \text{in } \mathcal{D}'.$$

Poiché

$$f_j \longrightarrow f \qquad \text{in } \mathcal{D}'$$

basterà provare che $\triangle\, u_j = f_j$ in $\mathcal{D}'$ per concludere che è $\triangle\, u = f$.

Ora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha $\overset{\vee}{f_j} * \varphi \in \mathcal{D}$ e quindi per il Teorema 2.10.2:

$$\triangle\, u_j(\varphi) = u_j(\triangle\, \varphi) = (N * f_j)(\triangle\, \varphi) = \Big[N * \Big(f_j * \overset{\vee}{\triangle \varphi} \Big)\Big](0) = {}^{6}$$

---

[6]Si utilizza qui: $f * \overset{\vee}{\psi} = \big(\overset{\vee}{f} * \psi \big)^{\vee}$. Infatti

$$f * \overset{\vee}{\psi}\,(t) = \int f(\tau)\, \psi(\tau - t)\, d\,\tau = \int f(-\tau')\, \psi(-\tau' - t)\, d\,\tau' =$$
$$\int \overset{\vee}{f}\,(\tau')\, \psi(-t - \tau')\, d\,\tau' = (\overset{\vee}{f} * \psi)(-t) = (\overset{\vee}{f} * \psi)^{\vee}(t)$$

$$= \Big[N * \Big(\overset{\vee}{f_j} * \triangle\,\varphi\Big)^{\vee}\Big](0) = \Big[N * \Big(\triangle\Big(\overset{\vee}{f_j} * \varphi\Big)\Big)^{\vee}\Big](0) =$$
$$= N\Big(\triangle\Big(\overset{\vee}{f_j} * \varphi\Big)\Big) = \Big(\overset{\vee}{f_j} * \varphi\Big)(0) = \int \overset{\vee}{f_j}\,(y)\,\varphi(-y)\,d\,y =$$
$$= \int f_j(-y)\,\varphi(-y)\,d\,y = f_j(\varphi).$$

Ossia giusto: $\triangle\, u_j = f_j$ in $\mathcal{D}'$. $\square$

11. Soluzione fondamentale dell'operatore delle onde

Consideriamo l'operatore delle onde in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$P = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2.$$

Il suo simbolo è $P(\tau, \xi) = -\tau^2 + |\xi|^2$.

Proposizione 2.11.1. *La formula:*

$$\langle E, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\widehat{\varphi}(-\tau, -\xi)}{P(\tau, \xi)} \bar{d}\,\sigma\,\bar{d}\,\xi, \qquad P(\tau, \xi) = -\tau^2 + |\xi|^2 \tag{11.1}$$

con $\tau = \sigma + \imath\,\gamma$, $\gamma < 0$ fissato, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, definisce una distribuzione $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$. Tale distribuzione non dipende dal numero $\gamma < 0$ scelto.

Dimostrazione. In (11.1) l'insieme di integrazione è il prodotto cartesiano della retta del piano complesso $\tau = \sigma + \imath\,\gamma$ ($\gamma < 0$ fissato) per $\mathbb{R}^n$.

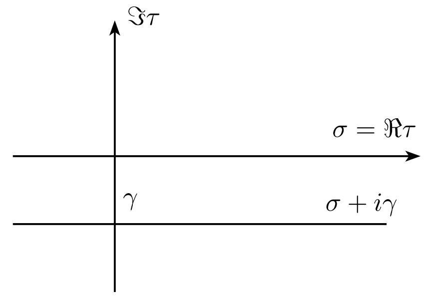


Figura 1

In ogni punto dell'insieme di integrazione è:

$$|P(\tau, \xi)| = ||\xi| - \tau| \cdot ||\xi| + \tau| = ||\xi| - \sigma - \imath\,\gamma| \cdot ||\xi| + \sigma + \imath\,\gamma| \geq \gamma^2 > 0;$$

quindi

$$|P(\tau,\xi)|^{-1} \le \gamma^{-2}. \tag{11.2}$$

Sia K un sottoinsieme compatto convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$ e sia $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Per il Teorema di Paley–Wiener per ogni N esiste una costante C_N tale che[7]

$$|\widehat{\varphi}(-\tau,-\xi)| \le C_N\,(1+|\xi|^2+|\tau|^2)^{-\frac{N}{2}}\,e^{I_K((0,-\gamma))}. \tag{11.3}$$

La dimostrazione del teorema mostra che

$$C_N = c_0 \operatorname{mis} K \cdot \sum_{|\alpha|\le N} \sup |D^\alpha \varphi|,$$

dove c_0 dipende solo da N e n.

Dalla (11.3) con $N = n+2$, segue, tenuto conto che $|\tau|^2 \ge \sigma^2$

$$|\widehat{\varphi}(-\tau,-\xi)| \le C(K) \sum_{|\alpha|\le n+2} \sup |D^\alpha\varphi|\,(1+|\xi|^2+\sigma^2)^{-\frac{n+2}{2}}\,e^{I_K((0,-\gamma))}. \tag{11.4}$$

La (11.2) e la (11.4) mostrano che l'integrale a secondo membro di (11.1) è assolutamente convergente e che

$$|\langle E,\varphi\rangle| \le C(K) \sum_{|\alpha|\le n+2} \sup |D^\alpha\varphi|\, e^{I_K((0,-\gamma))}\gamma^{-2} \cdot \int (1+|\xi|^2+\sigma^2)^{-\frac{n+2}{2}}\,d\sigma. \tag{11.5}$$

Dunque E è una distribuzione di ordine $\le n+2$. Proviamo ora che E non dipende da γ. Siano $\gamma_1 < \gamma_2 < 0$. La funzione $\tau \mapsto \dfrac{\widehat{\varphi}(-\tau,-\xi)}{P(\tau,\xi)}$ è analitica nel rettangolo R del piano complesso indicato in Figura 2.
Per il Teorema di Cauchy:

$$\int_{\partial R} \frac{\widehat{\varphi}(-\tau,-\xi)}{P(\tau,\xi)}\,d\tau = 0.$$

---

[7] Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^\nu$. Una funzione intera $\mathcal{U}$ su $\mathbb{C}^\nu$ è la trasformata di Fourier–Laplace di una funzione appartenente a $\mathcal{D}_K$ se e solo se, per ogni N, esiste C_N tale che

$$|\mathcal{U}(\zeta)| \le C_N\,(1+|\zeta|)^{-N}\,e^{I_K(\Im \zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^\nu,$$

dove la funzione indicatrice I_K di K è definita per $\eta \in \mathbb{R}^\nu$ da

$$I_K(\eta) = \sup_{x\in K} \langle x,\eta\rangle$$

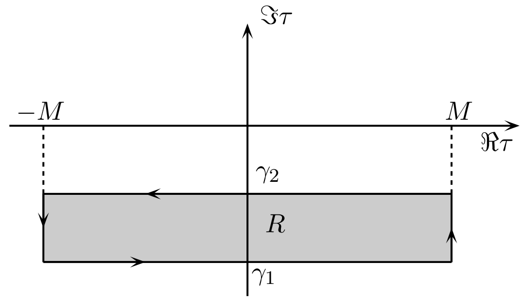


FIGURA 2

Ossia:

$$\int_{-M}^{M} \frac{\widehat{\varphi}(-\sigma - \imath\,\gamma_1, -\xi)}{P(\sigma + \imath\,\gamma_1, \xi)}\, d\,\sigma + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\widehat{\varphi}(-M - \imath\,t, -\xi)}{P(M + \imath\,t, \xi)}\, d\,t + \\ - \int_{-M}^{M} \frac{\widehat{\varphi}(-\sigma - \imath\,\gamma_2, -\xi)}{P(\sigma + \imath\,\gamma_2, \xi)}\, d\,\sigma - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\widehat{\varphi}(M - \imath\,t, -\xi)}{P(-M + \imath\,t, \xi)}\, d\,t = 0. \tag{11.6}$$

Questa uguaglianza vale quale che sia M. Per la (11.2) e la (11.3) il secondo ed il quarto degli integrali sopra scritti tendono a zero, al tendere di $M \to +\infty$. Pertanto, passando al limite per $M \to +\infty$ dalla (11.6) segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(-\sigma - \imath\,\gamma_1, -\xi)}{P(\sigma + \imath\,\gamma_1, \xi)}\, d\,\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(-\sigma - \imath\,\gamma_2, -\xi)}{P(\sigma + \imath\,\gamma_2, \xi)}\, d\,\sigma.$$

L'uguaglianza che si ottiene da questa integrando ambo i membri su $\mathbb{R}^n$ prova che E non dipende da γ. $\square$

Proposizione 2.11.2. *La distribuzione E definita da* (11.1) *è una soluzione fondamentale dell'operatore delle onde nel semispazio* $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, t \geq 0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ si ha:

$$\begin{aligned} \langle P(D)\, E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\, \varphi \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{P(\tau, \xi)\, \widehat{\varphi}(-\tau, -\xi)}{P(\tau, \xi)}\, \bar{d}\,\xi\, \bar{d}\,\sigma, \qquad \tau = \sigma + \imath\,\gamma \\ &= (2\,\pi)^{-n-1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \overset{\vee}{\widehat{\varphi}}\,(\xi, \sigma)\, d\,\xi\, d\,\sigma = \varphi(0, 0). \end{aligned}$$

Dunque E è soluzione fondamentale di P.

Proviamo che:

$$\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; t \geq 0\}. \tag{11.7}$$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ con $\operatorname{supp} \varphi \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; t < 0\}$ e sia K un sottoinsieme compatto convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$ tale che:

$$\operatorname{supp} \varphi \subset K \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; t < 0\}.$$

Sarà allora $K \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; t \leq \rho\}$ per un $\rho < 0$. Quindi:

$$I_K((0,-\gamma)) = \sup_{(x,t)\in K} t(-\gamma) \leq -\rho\,\gamma < 0. \tag{11.8}$$

Poiché E non dipende da γ, da (11.5) e (11.8) segue:

$$\langle E, \varphi \rangle = \lim_{\gamma \to -\infty} \langle E_\gamma, \varphi \rangle = 0;$$

ciò prova (11.7). □

Proposizione 2.11.3. *Sia E la soluzione fondamentale dell'operatore delle onde definito da* (11.1)*. Allora:*

$$\langle E, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \langle E_t, \varphi(t,\cdot) \rangle \, d\,t, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

con $E_t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definito da:

$$\langle \widehat{E}_t, \psi \rangle = \int \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|} \, \psi(\xi) \, d\,\xi, \qquad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{C}$ con $\Re\, a > 0$. La funzione $t \mapsto H(t) = Y(t)\, e^{-at}$ è in $L^1(\mathbb{R})$ e:

$$\mathcal{F}_t(Y(t)\, e^{-at})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\imath\, ts}\, e^{-at}\, d\,t = -\frac{e^{-(a+\imath\, s)\,t}}{a + \imath\, s}\Big|_{t\to 0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{a+\imath\, s}. \tag{11.9}$$

Osserviamo che per $\tau = \sigma + \imath\,\gamma$, $\gamma < 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(\tau,\xi)} &= \frac{1}{(|\xi| - \tau)(|\xi| + \tau)} = \Big(\frac{1}{|\xi| - \tau} + \frac{1}{|\xi| + \tau}\Big) \cdot \frac{1}{2\,|\xi|} = \\ &= \frac{-1}{2\,|\xi|\,\imath}\Big(\frac{1}{-\gamma + \imath\,|\xi| + \imath\,\sigma} - \frac{1}{-\gamma - \imath\,|\xi| + \imath\,\sigma}\Big).\end{aligned} \tag{11.10}$$

Quindi, utilizzando la (11.9) (si noti che $\gamma < 0$):

$$\frac{1}{P(\tau,\xi)} = \frac{-1}{2\,|\xi|\,\imath}\Big[\mathcal{F}_t(Y(t)\,e^{-(-\gamma+\imath\,|\xi|)\,t})(\sigma) - \mathcal{F}_t(Y(t)\,e^{-(-\gamma-\imath\,|\xi|)\,t})(\sigma)\Big] =$$

$$= \mathcal{F}_t\Big(Y(t)\,e^{\gamma\,t}\,\frac{e^{\imath\,|\xi|\,t} - e^{-\imath\,|\xi|\,t}}{2\,|\xi|\,\imath}\Big)(\sigma) =$$

$$= \mathcal{F}_t\Big(Y(t)\,e^{\gamma\,t}\,\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\Big)(\sigma).$$

Inoltre:

$$\widehat{\varphi}(-\tau,-\xi) = \widehat{\varphi}(-\sigma - \imath\,\gamma, -\xi) = \mathcal{F}_t(e^{-\gamma\,t}\,\varphi(t,-\widehat{\xi}))(-\sigma).$$ [8]

Quindi:

(11.11)

$$\langle E,\varphi\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(e^{-\gamma\,t}\,\varphi(t,-\widehat{\xi}))(-\sigma)\cdot \mathcal{F}_t\Big(Y(t)\,e^{\gamma\,t}\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\Big)(\sigma)\,\bar{d}\,\sigma\Big) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2\,\pi}\Big[\mathcal{F}_t(e^{-\gamma\,t}\,\varphi(t,-\widehat{\xi})) * \mathcal{F}_t\Big(Y(t)\,e^{\gamma\,t}\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\Big)\Big](0)\,\bar{d}\,\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_t\Big(Y(t)\,\varphi(t,-\widehat{\xi})\,\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\Big)(0)\,\bar{d}\,\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^{+\infty} \varphi(t,-\widehat{\xi})\,\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\,d\,t\Big)\,\bar{d}\,\xi =$$

$$= \int_0^{+\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\,(\mathcal{F}_x\,\varphi(t,x))\,(-\xi)\,\bar{d}\,\xi\Big)d\,t.$$

Per ogni $t > 0$ la funzione $\xi \mapsto \dfrac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}$ è in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; quindi è la trasformata di Fourier di una distribuzione $E_t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Poiché $\xi \mapsto \dfrac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}$ è localmente integrabile:

(11.12) $$\langle \widehat{E}_t,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\,\psi(\xi)\,d\,\xi, \qquad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da (11.11) e (11.12) segue:

$$\langle E,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \langle E_t, \varphi(t,\cdot)\rangle\,d\,t.$$

[8] $\varphi(t,-\widehat{\xi}) = \mathcal{F}_x(\varphi(t,x))(-\xi)$

La proposizione è provata. □

Proposizione 2.11.4. *Sia E la soluzione fondamentale dell'operatore delle onde definita da* (11.1). *Allora:*

$$\textit{supp}\ E \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ :\ |x| \le t\}.$$

Dimostrazione. Con le notazioni della Proposizione 2.11.3 abbiamo:

(11.13)

$$\begin{aligned}\langle E_t, \varphi(t,\cdot)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\,(\mathcal{F}_x\,\varphi(t,x))\,(-\xi)\,\overline{d}\,\xi = \qquad \big(t\,\xi = \eta\big)\\ &= t\int \frac{\sin|\eta|}{|\eta|}\,(\mathcal{F}_x\,\varphi(t,x))\Big(-\frac{\eta}{t}\Big)\,t^{-n}\,\overline{d}\,\eta = \\ &= t\int \widehat{E}_1(\eta)\,(\mathcal{F}_x\,\varphi(tx,t))\,(-\eta)\,\overline{d}\,\eta = t\,\langle E_1, \varphi(t\cdot,t)\rangle.\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\widehat{E}_1(\xi) = \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,|\xi|^{2k} = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^k.$$

Il raggio di convergenza di questa serie è $+\infty$. Quindi $\widehat{E}_1(\xi)$ si prolunga su $\mathbb{C}^n$ ad una funzione intera:

$$\mathcal{U}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(\zeta_1^2+\cdots+\zeta_n^2)^k, \qquad \zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Poniamo:

$$\zeta_j = \xi_j + \imath\,\eta_j, \qquad \xi_j,\,\eta_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,n$$
$$\zeta_1^2+\cdots+\zeta_n^2 = z^2, \qquad z = \alpha + \imath\,\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Allora:

$$\mathcal{U}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\frac{z^{2k+1}}{z} = \frac{\sin z}{z} = \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath\,z};$$

quindi

(11.14) $$|\mathcal{U}(\zeta)| \le e^{|\beta|}.$$

Proveremo più sotto che $|\beta| \le |\Im\,\zeta|$. Quindi:

$$|\mathcal{U}(\zeta)| \le e^{|\Im\,\zeta|}.$$

Per il Teorema di Paley–Wiener, $\mathcal{U}(\zeta)$ è la trasformata di Fourier–Laplace di una distribuzione $T \in \mathcal{E}'$ con supp $T \subset \overline{S(0,1)}$; da

$$\mathcal{U}(\zeta) = \widehat{T}(\zeta)$$

segue:

$$\mathcal{U}(\xi) = \widehat{T}(\xi),$$

ossia

$$E_1(\xi) = T(\xi).$$

Si ha quindi supp $E_1 \subset \{x \ : \ |x| \le 1\}$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ con supp $\varphi \subset \{(x,t) \ : \ |x| > t\}$. Allora la funzione $x \mapsto \varphi(tx,t)$, $t > 0$, ha supporto in $\{x \ : \ |x| > 1\}$. Quindi:

$$\langle E_1, \varphi(t\cdot, t)\rangle = 0 \qquad \forall\, t > 0$$

e

$$\langle E, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} t\,\langle E_1, \varphi(t\cdot, t)\rangle\, d\,t = 0.$$

Ciò prova che supp $E \subset \{(x,t) \ : \ |x| \le t\}$. Resta da provare (11.14). Abbiamo:

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 = |z^2| \\
z^2 &= \sum_{j=1}^n (\xi_j^2 - \eta_j^2 + 2\,\imath\,\xi_j\eta_j) = |\xi|^2 - |\eta|^2 + 2\,\imath\,(\xi\cdot\eta) \\
|z^2|^2 &= (|\xi|^2 - |\eta|^2)^2 + 4\,(\xi\cdot\eta)^2 = \\
&= (|\xi|^2 + |\eta|^2)^2 - 4(|\xi|^2\,|\eta|^2 - 4(\xi\cdot\eta)^2) \le \\
&\le (|\xi|^2 + |\eta|^2)^2 = |\zeta|^4.
\end{aligned}$$

Quindi

$$|z| \le |\zeta|.$$

Inoltre, posto $\theta = \arg z^2$,

$$\begin{aligned}
|\beta| = |\Im\, z| = |z|\,|\sin\arg z| = |z|\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| &= \\
= |z|\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = |z|\sqrt{\frac{1-\frac{\Re\, z^2}{|z^2|}}{2}} &= \\
= \sqrt{\frac{|z|^2 - \Re\, z^2}{2}} \le \sqrt{\frac{|\xi|^2 + |\eta|^2 - |\xi|^2 + |\eta|^2}{2}} &= |\eta|.
\end{aligned}$$

□

12. L'operatore del calore

L'operatore del calore è l'operatore:

$$\partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 = \partial_t - \triangle_x$$

su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con coordinate (x,t). Esso deve il suo nome al fatto che la temperatura $u(x,t)$ nel punto x all'istante t in un mezzo omogeneo, isotropo con coefficiente di conduttività termica 1 soddisfa: $\partial_t u - \triangle_x u = 0$. Questa equazione governa altresì altri processi di diffusione, per esempio i moti Browniani di due gas.

Cominciamo col considerare il problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \triangle_x u & = & 0 & \text{su } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{su } \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{12.1}$$

Fisicamente questo è un problema ragionevole: data la temperatura all'istante $t = 0$, trovare la temperatura negli istanti successivi. È un problema ragionevole anche dal punto di vista matematico, poiché l'equazione del calore è del primo ordine in t. (Nota che il problema di Cauchy per l'iperpiano $t = 0$ non è "ben posto", poiché questo iperpiano è caratteristico se e solo se il versore della normale al piano è uno zero del simbolo principale dell'operatore).

Come per il problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace in un semispazio, si ottiene rapidamente una soluzione di (12.1) applicando la trasformata di Fourier rispetto la variabile x. Infatti, supposto per il momento $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + |\xi|^2 \, \widehat{u}(\xi,t) & = & 0 & t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) & = & \widehat{f}(\xi) & \end{array} \right.$$

dove $\widehat{u}(\xi,t) = \displaystyle\int e^{-\imath\langle x,\xi\rangle} u(x,t)\,d\,x$.

Questo è un problema di Cauchy per un'equazione ordinaria in t e la soluzione è:

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-|\xi|^2 t} \qquad t > 0.$$

Pertanto

$$u(x,t) = (f * K(\cdot,t))(x),$$

dove

$$K(x,t) = \mathcal{F}_\xi^{-1}\Big(e^{-|\xi|^2 t}\Big)(x) = (4\,\pi\,t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4\,t}} \qquad t > 0.$$

La funzione K così definita su $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ si dice nucleo di Gauss (o di Gauss–Weierstrass o nucleo del calore). Ricordiamo che:

$$K(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} \cdot K\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\Big),$$

$$\int K(x,t)\, d\, x = \widehat{K}_t(0) = 1.$$

Pertanto $K(\cdot, t)$ è un'approssimazione dell'identità per $t \to 0$. (Con la sostituzione $\varepsilon = \sqrt{t}$ si ottiene la formulazione usuale).

Teorema 2.12.1. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Allora*

$$u(x,t) = (f * K(\cdot, t))(x)$$

soddisfa $\partial_t u - \triangle_x u = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Se f è limitata e continua, allora u è continua su $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$ e $u(x,0) = f(x)$.

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p < \infty$, allora $u(\cdot, t)$ converge ad f nella norma di L^p per $t \to 0^+$.

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che si può derivare sotto il segno di integrale e che $K(\cdot, t)$ è un'approssimazione dell'identità. $\square$

Osservazione 2.12.2. *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ed esistono due costanti $c, d > 0$ tali che $|f(x)| \le c\, e^{d\,|x|^2}$, allora $u(x,t) = (f * K(\cdot, t))(x)$ è definita nella striscia $\mathbb{R}^n \times \Big]0, \dfrac{1}{4d}\Big[$ ed è ivi soluzione dell'equazione del calore. Se inoltre $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, $u(\cdot, t) \longrightarrow f$ per $t \to 0^+$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Infatti è:*

$$-\frac{|x-y|^2}{4t} + d\,|y|^2 = -\frac{|x|^2 - 2\,\langle x, y\rangle + |y|^2 - 4td|y|^2}{4t} \le$$

$$\le -\frac{|x|^2}{4t} - \frac{|y|^2}{4t}\Big(1 - 4td - 2\frac{|x|}{|y|}\Big).$$

Se dunque $t < \dfrac{1}{4d}$ è $1 - 4td - 2\dfrac{|x|}{|y|} > 0$ per $|y|$ sufficientemente grande, x fissato. Pertanto l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t}\, f(y)\, d\, y$$

ha senso qualunque sia $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \Big]0, \dfrac{1}{4d}\Big[$. Ne segue che $f * K(\cdot, t)$ si può derivare sotto il segno di integrale nella striscia $\mathbb{R}^n \times \Big]0, \dfrac{1}{4d}\Big[$ quante volte si vuole. Da qui seguono per u le proprietà sopra enunciate.

Cosa si può dire circa l'unicità della soluzione di (12.1)? Come per il problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace nel semispazio, dovremo imporre qualche condizione all'infinito. Ma qui le condizioni sono molto più deboli.

Teorema 2.12.3 (di unicità). *Sia $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ tale che $\partial_t u - \triangle_x u = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $u(x,0) = 0$ in $\mathbb{R}^n$. Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante c_ε tale che*

$$|u(x,t)| \leq c_\varepsilon\, e^{-\varepsilon\,|x|^2}, \qquad |grad\ u(x,t)| \leq c_\varepsilon\, e^{\varepsilon\,|x|^2},$$

allora u è identicamente nulla.

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che se $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, allora:

$$\begin{aligned} g(\partial_t f - \triangle f) + f(\partial_t g - \triangle g) = & \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j (f\,\partial_j\, g - g \partial_j\, f) + \partial_t (f\, g) = \\ &= \operatorname{div} F, \end{aligned}$$

dove:

$$F = (f\,\partial_1\, g - g\,\partial_1\, f, \ldots, f\,\partial_n\, g - g\,\partial_n\, f, f\, g).$$

Fissiamo $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ ed utilizziamo l'uguaglianza sopra stabilita con $f(x,t) = u(x,t)$, $g(x,t) = K(x - x_0, t_0 - t)$. Osserviamo che allora $\partial_t\, f - \triangle_x\, f = 0$ (per le ipotesi su u) e $\partial_t\, g - \triangle_x\, g = 0$ se $t < t_0$ (via trasformata di Fourier); quindi $\operatorname{div} F = 0$. Applichiamo ora il teorema della divergenza alla regione:

$$\Omega = \{(x,t)\ :\ |x| < r,\ a < t < b\},$$

dove $0 < a < b < t_0$, ottenendo

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}\, F = \int_{\partial\,\Omega} \langle F, \nu\rangle = \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned} \int_{|x|<r} u(x,b)\, K(x - x_0, t_0 - b)\, d\,x - \int_{|x|<r} u(x,a)\, K(x - x_0, t_0 - a)\, d\,x + & \\ + \frac{1}{r} \int_a^b \Big(\int_{|x|=r} \sum_{j=1}^n x_j \Big[u(x,t) \partial_j\, K(x - x_0, t_0 - t) - & \\ - K(x - x_0, t_0 - t) \partial_j\, u(x,t) \Big] d\,\sigma \Big)\, d\,t & \end{aligned}$$

(sulle "basi" del cilindro Ω è $\nu = (0, \ldots, 0, 1)$ e $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$ mentre in un punto (x, t) appartenente alla "superficie laterale di Ω" è $\nu = \Big(\dfrac{x}{r}, 0\Big)$).

Per $r \to \infty$ l'ultimo termine tende a 0 per le ipotesi fatte su u. In effetti le maggiorazioni dell'Osservazione 2.12.2 con $x_0, x, t_0 - t$ in luogo di x, y, t rispettivamente e con ε in luogo di d, diventano, tenendo conto che ora $|x| = r$:

$$-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)} + \varepsilon\,|x|^2 \leq -\frac{|x_0|^2}{4(t_0 - t)} - \frac{r^2}{4(t_0 - t)}\Big(1 - 4(t_0 - t)\,\varepsilon - 2\frac{|x_0|}{r}\Big)$$

e quest'ultimo termine tende a $-\infty$ per $r \to +\infty$ se $\varepsilon < \dfrac{1}{4(t_0 - t)}$. Dunque passando al limite per $r \to +\infty$, nell'uguaglianza (12.2) si ottiene:

$$0 = [K(\cdot, t_0 - b) * u(\cdot, b)](x_0) - [K(\cdot, t_0 - a) * u(\cdot, a)](x_0).$$

Facciamo ora tendere $a \to 0$ e $b \to t_0$. Poiché per ipotesi $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, l'ultimo termine tende a 0. Il primo si può scrivere:

$$[K(\cdot, t_0 - b) * u(\cdot, b)](x_0) = [[K(\cdot, t_0 - b) * u(\cdot, t_0)](x_0)] +$$

$$+ [K(\cdot, t_0 - b) * (u(\cdot, b) - u(\cdot, t_0))](x_0).$$

Il primo addendo ha limite $u(x_0, t_0)$ mentre il secondo ha limite 0, dato che

$$\Big|[K(\cdot, t_0 - b) * (u(\cdot, b) - u(\cdot, t_0))](x_0)\Big| \leq$$

$$\leq \int K(x - x_0, t_0 - t)\,|u(x, b) - u(x, t_0)|\,d\,x \leq \varepsilon \int K(x - x_0, t_0 - b)\,d\,x = \varepsilon$$

se $t_0 - b$ è sufficientemente piccolo.

Resta così provato che $u(x_0, t_0) = 0$ e quindi per l'arbitrarietà di $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ che $u(x, t)$ è nullo in $\mathbb{R}^{n+1}_+$. $\square$

Il nucleo di Gauss può essere usato per l'equazione del calore non omogenea: $\partial_t\, u - \triangle\, u = f$. A tal fine conviene prolungare K su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ponendo $K(x, t) = 0$ se $t \leq 0$. Osserviamo che K è localmente integrabile su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (in effetti è integrabile su ogni regione la cui proiezione sull'asse delle t è superiormente limitata, dato che $\int |K(x, t)|\,d\,x = 1$ per $t > 0$ e $\int |K(x, t)|\,d\,x = 0$ per $t < 0$). Inoltre K è indefinitamente differenziabile in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, è $\partial_x^\alpha \partial_t^k K(x^0, t) \longrightarrow 0$, per $t \to 0$, se $x^0 \neq 0$, per ogni $(\alpha, k) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Proveremo ore che K è una soluzione fondamentale per $\partial_t - \triangle$.

Teorema 2.12.4. *Sia*

$$K(x,t) = \begin{cases} (4\,\pi\,t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

Allora $\partial_t K - \triangle_x K = \delta$ *nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, poniamo

$$K_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} K(x,t) & \text{se } t > \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente $K_\varepsilon \longrightarrow K$ in $\mathcal{D}'$ quando $\varepsilon \to 0$.

Quindi $\partial_t K_\varepsilon - \triangle_x K_\varepsilon \longrightarrow \partial_t K - \triangle_x K$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ per $\varepsilon \to 0$ e basterà quindi provare che

$$\partial_t K_\varepsilon - \triangle_x K_\varepsilon \longrightarrow \delta$$

ossia che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$K_\varepsilon(-\partial_t \varphi - \triangle_x \varphi) \longrightarrow \varphi(0,0) \qquad \text{per } \varepsilon \to 0.$$

Una elementare integrazione per parti mostra che:

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(-\partial_t \varphi - \triangle_x \varphi) &= \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,(-\partial_t - \triangle_x)\,\varphi(x,t)\,d\,x\,d\,t = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_\varepsilon^{+\infty} K(x,t)\,\partial_t\,\varphi(x,t)\,d\,t \Big)\,d\,x - \\ &\quad \int_\varepsilon^{+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\,\triangle_x\,\varphi(x,t)\,d\,x \Big)\,d\,t = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,\varepsilon)\,\varphi(x,\varepsilon)\,d\,x + \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t\,K(x,t)\,\varphi(x,t)\,d\,x\,d\,t - \\ &\quad \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \triangle_x\,K(x,t)\,\varphi(x,t)\,d\,x\,d\,t = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(-x,\varepsilon)\,\varphi(x,\varepsilon)\,d\,x + \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t - \triangle_x)\,K(x,t)\,\varphi(x,t)\,d\,x\,d\,t = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(-x,\varepsilon)\,\varphi(x,\varepsilon)\,d\,x + 0. \end{aligned}$$

Ma questa è giusto la convoluzione:

$$[K(\cdot,\varepsilon) * \varphi(\cdot,\varepsilon)](0) = [K(\cdot,\varepsilon) * \varphi(\cdot,0)](0) + [K(\cdot,\varepsilon) * (\varphi(\cdot,\varepsilon) - \varphi(\cdot,0))](0).$$

Il primo addendo a secondo membro tende a $\varphi(0,0)$ per $\varepsilon \to 0$, mentre il secondo è minore di

$$\sup_x |\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)|\, \|K(\cdot,\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \sup_x |\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)|,$$

che tende a 0 per $\varepsilon \to 0$. $\square$

Teorema 2.12.5. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, allora $u = f * K$ è una distribuzione soluzione di $\partial_t u - \triangle u = f$.*

Dimostrazione. Innanzitutto verifichiamo che u è ben definita. Abbiamo:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau) \cdot f(y,\tau)\, dy \Big)\, d\tau.$$

Poiché $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $x \mapsto f(x,\tau)$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$ per quasi ogni $\tau \in \mathbb{R}$; quindi, essendo $x \mapsto K(x, t-\tau) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau)\, f(y,\tau)\, dy$, convoluzione di due funzioni appartenenti ad $L^1(\mathbb{R}^n)$ è definita per quasi ogni x, appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^n)$ e per quasi ogni τ è:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau)\, f(y,\tau)\, dy \Big|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \Big| f(y,\tau) \Big|\, dy.$$

Poiché il secondo membro di questa disuguaglianza è sommabile rispetto a τ su $\mathbb{R}$, tale è anche il primo membro, sicchè:

$$\int_{-\infty}^{t} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau)\, f(y,\tau)\, dy \Big|\, dx \Big)\, d\tau \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}.$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ è dunque:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{-\infty}^{t} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau)\, f(y,\tau)\, dy \Big)\, d\tau \Big|\, dx \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y, t-\tau)\, f(y,\tau)\, dy \Big|\, dx \Big)\, d\tau \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}.$$

Quindi:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|\, dx \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}.$$

Segue da qui che u è definita quasi ovunque e localmente integrabile. Per provare che $\partial_t u - \triangle_x u = f$ si procede come nella dimostrazione del Teorema 2.10.3.

Si pone:

$$f_j(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{se } (|x|^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \le j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$u_j = f_j * K.$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ è allora:

$$u_j(\varphi) = (f_j * K)(\varphi) = \Big((f_j * K) * \overset{\vee}{\varphi}\Big)(0) = \Big(f_j * (K * \overset{\vee}{\varphi})\Big)(0) =$$
$$= \Big(f_j * (\overset{\vee}{K} * \varphi)^{\vee}\Big)(0) = f_j(\overset{\vee}{K} * \varphi) = \int f_j(\overset{\vee}{K} * \varphi).$$

Analogamente:

$$u(\varphi) = f(\overset{\vee}{K} * \varphi) = \int f(\overset{\vee}{K} * \varphi).$$

La successione $\{f_j(\overset{\vee}{K} * \varphi)\}$ è dominata da $f(\overset{\vee}{K} * \varphi)$, che è integrabile con integrale uguale ad $u(\varphi)$. Per il Teorema di Lebesgue è lecito passare al limite sotto il segno di integrale e quindi:

$$\lim u_j(\varphi) = \lim \int f_j(\overset{\vee}{K} * \varphi) = \int f(\overset{\vee}{K} * \varphi) = u(\varphi).$$

Dunque $u_j \longrightarrow u$ in $\mathcal{D}'$ e quindi $(\partial_t - \triangle_x)\, u_j \longrightarrow (\partial_t - \triangle_x)\, u$ in $\mathcal{D}'$. Poiché $f_j \longrightarrow f$ in $\mathcal{D}'$, per poter affermare che $(\partial_t - \triangle_x)\, u = f$ è sufficiente provare che per ogni j si ha $(\partial_t - \triangle_x)\, u_j = f_j$ in $\mathcal{D}'$.

Ora se $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$(\partial_t - \triangle_x)\, u_j(\varphi) = u_j((-\partial_t - \triangle_x)\varphi) = (K * f_j)((-\partial_t - \triangle_x)\varphi) =$$
$$= \Big((K * f_j) * ((-\partial_t - \triangle_x)\varphi)^{\vee}\Big)(0) = \Big(K * \Big(f_j * ((-\partial_t - \triangle_x)\varphi)^{\vee}\Big)\Big)(0) =$$
$$= \Big(K * \Big((-\partial_t - \triangle_x)(\overset{\vee}{f_j} * \varphi)\Big)^{\vee}\Big)(0) = K\Big((-\partial_t - \triangle_x)(\overset{\vee}{f_j} * \varphi)\Big).$$

Poiché $\overset{\vee}{f_j} * \varphi \in \mathcal{D}$, essendo K una soluzione fondamentale dell'operatore $\partial_t - \triangle_x$, l'ultimo termine scritto è:

$$(\overset{\vee}{f_j} * \varphi)(0,0) = (f_j * \overset{\vee}{\varphi})(0,0) = f_j(\varphi).$$

Si è così provato che:

$$(\partial_t - \triangle_x)\, u_j(\varphi) = f_j(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D},\ \forall\, j \in \mathbb{N}$$

e la dimostrazione è completa. □

13. Equazioni senza soluzioni (Esempi di H. Lewy e di F. Treves)

Appare naturale la seguente questione: è sempre vero che l'equazione

$$P(x, \partial)\, u(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x) \tag{13.1}$$

ammette almeno una soluzione in un assegnato insieme Ω?

Sia Ω la sfera $S(0,r)$ di centro l'origine di $\mathbb{R}^n$ e raggio r e supponiamo f ed i coefficienti a_α indefinitamente differenziabili. In tale situazione sembra ragionevole congetturare l'esistenza di almeno una soluzione.

Non è così: un semplice esempio fu scoperto da Hans Lewy nel 1957 (Ann. Math. Vol. 66). Si tratta di un'equazione differenziale in tre variabili reali (che per comodità indicheremo con (x,y,t)) del primo ordine:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \imath \frac{\partial u}{\partial y} + 2\imath (x + \imath y)\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,t). \tag{13.2}$$

Proveremo che esiste una funzione f indefinitamente differenziabile in un intorno Ω dell'origine, tale che (13.2) non ha alcuna soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ in Ω.

Sia $\Omega = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 < a, \ |t| < b\}$, $a, b > 0$ e sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ una funzione dipendente solo da t.

Supponiamo che (13.2) ammetta una soluzione $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Allora, indicata con ψ una qualunque funzione differenziabile con continuità su $\mathbb{R}^2$ tale che

$$\text{supp}\ \psi \subset \{(\rho,t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \rho < a, \ |t| < b\}$$

e posto:

$$\varphi(x,y,t) = \psi(x^2+y^2,t),$$

riesce $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, supp $\varphi \subset \Omega$ e

$$\int_\Omega \Big[\frac{\partial u}{\partial x} + \imath \frac{\partial u}{\partial y} + 2\imath (x + \imath y)\frac{\partial u}{\partial t}\Big]\,\overline{\varphi} = \int_\Omega f\,\overline{\varphi}. \tag{13.3}$$

Il primo membro si scrive:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_\Omega \Big(u\,\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} + \imath\, u\,\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} + 2\imath\, u\,(x+\imath y)\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}\Big) = \\ &= -\int_\Omega u\,\Big[\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} + \imath \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} + 2\imath (x+\imath y)\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}\Big]. \end{aligned}$$

Passiamo ora dalle variabili (x,y,t) alle variabili (ρ,θ,t), con $\rho = x^2+y^2$ e tg $\theta = \dfrac{y}{x}$; ossia

$$\begin{cases} x &= \sqrt{\rho}\,\cos\theta \\ y &= \sqrt{\rho}\,\sin\theta \\ t &= t \end{cases}$$

L'espressione in parentesi quadra si scrive:

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \rho}\,2x + \imath \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \rho}\,2y + 2\imath (x+\imath y)\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} =$$

$$2(x+\imath\, y)\Big(\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,\rho}+\imath\,\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,t}\Big)=2\,\sqrt{\rho}\,e^{\imath\,\theta}\,\Big(\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,\rho}+\imath\,\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,t}\Big).$$

Essendo, lo Jacobiano della trasformazione uguale ad $\dfrac{1}{2}$, si ha:

$$\begin{aligned} I_1 &= \\ &= -\int_{-b}^{b}\int_0^a\int_0^{2\,\pi}\sqrt{\rho}\,e^{\imath\,\theta}u(\sqrt{\rho}\,\cos\theta,\sqrt{\rho}\,\sin\theta,t)\Big(\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,\rho}+\imath\,\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,t}\Big)d\,\theta\,d\,\rho\,d\,t= \\ &= -\int_{-b}^{b}\int_0^a\mathcal{U}(\rho,t)\Big(\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,\rho}+\imath\,\frac{\partial\,\overline{\psi}}{\partial\,t}\Big)d\,\rho\,d\,t=\int_{-b}^{b}\int_0^a\Big(\frac{\partial\,\mathcal{U}}{\partial\,\rho}+\imath\,\frac{\partial\,\mathcal{U}}{\partial\,t}\Big)\,\overline{\psi}\,d\,\rho\,d\,t\end{aligned}$$

(l'ultima uguaglianza è lecita perché supp $\psi\subset\,]0,a[$, allora $\psi(\rho)=0$ per $0<\rho<\delta<1$), dove si è posto:

$$\mathcal{U}(\rho,t)=\int_0^{2\,\pi}\sqrt{\rho}\,e^{\imath\,\theta}\,u(\sqrt{\rho}\,\cos\theta,\sqrt{\rho}\,\sin\theta,t)\,d\,\theta, \tag{13.4}$$

nota che $\mathcal{U}(\rho,t)=0$ per $\rho=0$. Inoltre $\psi\equiv 0$ in $[-\delta;\delta]$, per un qualche $\delta>0$.

D'altro canto, con il cambiamento di variabili sopra indicato, il secondo membro di (13.3) si scrive:

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{-b}^{b}\int_0^a\int_0^{2\,\pi}f(t)\,\overline{\psi}(\rho,t)\,d\,\rho\,d\,\theta\,d\,t=\pi\int_{-b}^{b}\int_0^a f\,\overline{\psi}\,d\,\rho\,d\,t;$$

(13.3) equivale dunque a:

$$\int_{-b}^{b}\int_0^a\Big(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\rho}+\imath\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\,t}\Big)\,\overline{\psi}\,d\,\rho\,d\,t=\pi\int_{-b}^{b}\int_0^a f\,\overline{\psi}\,d\,\rho\,d\,t;$$

ossia

$$\int_{-b}^{b}\int_0^a\Big(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\rho}+\imath\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\,t}-\pi\,f\Big)\,\overline{\psi}\,d\,\rho\,d\,t=0. \tag{13.5}$$

Poiché ψ è un'arbitraria funzione di classe $\mathcal{C}^1_c$, nulla fuori del rettangolo $0<\rho<a$, $|t|<b$, per noti argomenti, da (13.5) segue:

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\rho}+\imath\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\,t}=\pi\,f\qquad 0<\rho<a,\ |t|<b. \tag{13.6}$$

Sia ora $g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funzione della sola variabile t a valori reali. Se prendiamo $f=g'$ e poniamo

$$V(\rho,t)=\mathcal{U}(\rho,t)+\pi\,\imath\,g,$$

si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}+\imath\,\frac{\partial V}{\partial\,t}=\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\rho}+\imath\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\,t}-\pi\,f.$$

Quindi, per (13.6):

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} + \imath \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \qquad 0 < \rho < a,\ -b < t < b.$$

Dunque V soddisfa le condizioni di Cauchy–Riemann e quindi è funzione analitica di $\rho + \imath t$ nel rettangolo $]0, a[\times]-b, b[$. Poiché $u(x, y, t)$ è continua in Ω, $\mathcal{U}(\rho, t)$ risulta continua in $[0, a[\times]-b, b[$ ed inoltre $\mathcal{U}(\rho, t) = 0$ (cfr. (13.4)). Così

$$\Re V(0, t) = 0 \qquad -b < t < b.$$

Poiché V è analitica in $]0, a[\times]-b, b[$ e la sua parte reale si annulla per $\rho = 0$, per una nota proprietà delle funzioni analitiche (Principio di riflessione di Schwartz (Rudin, Teorema 11.17)), V può essere prolungata analiticamente oltre la retta $\rho = 0$. In particolare $V(0, t)$ è funzione analitica di t in $]-b, b[$. Ma $V(0, t) = \pi \imath g$. Pertanto anche g, e quindi f, è funzione analitica di t. Resta così provato che se f dipende solo da t, affinché (13.2) abbia soluzione è necessario che f sia analitica. Se, per esempio, prendiamo:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{13.7}$$

allora $f = g' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ma non è analitica in un qualunque intorno di $t = 0$. L'equazione (13.2) per f siffatta non possiede alcuna soluzione.

Siamo ora in grado di dare un esempio di equazione "reale"[9] senza soluzioni. Indichiamo con $A\,u$ il primo membro di (13.2) e con $\overline{A}$ l'operatore che si ottiene da A sostituendo ad ogni coefficiente il complesso coniugato. Allora:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} A\,\overline{A}\,u = \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + \Big(x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t} - y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\Big) + (x^2 + y^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \imath\,\frac{\partial u}{\partial t} \\
&= B\,u - \imath\,\frac{\partial u}{\partial t},
\end{aligned}$$

dove B è l'operatore lineare a coefficienti reali ed indipendenti da t. Quindi:

$$\frac{1}{16} A\,\overline{A}\,\overline{(A\,\overline{A})} = \Big(B - \imath\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)\cdot\Big(B + \imath\,\frac{\partial}{\partial t}\Big) = B^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

[9] cioè a coefficienti reali

L'equazione:

$$B^2\, u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \tag{13.8}$$

non ha alcuna soluzione se $f = g'$ e g è data da (13.7). Infatti se u fosse soluzione di (13.8), allora $v = \overline{A}\,\overline{(A\,\overline{A})}u$ sarebbe soluzione di (13.2), contrariamente a quanto sopra provato. Questo esempio fu dato da F. Treves (1968). Si noti che lo studio diretto dell'equazione (13.8) sarebbe stato molto più difficile.