APPUNTI DI ANALISI FUNZIONALE

Francesca Prinari
Dipartimento di Matematica
Università di Ferrara

Contents

Date: Ultimo aggiornamento 15-02-2017.

1. Richiami di topologia

Definizione 1.1. *Sia $X \neq \emptyset$. Una famiglia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice una* **topologia** *su X se*

(1) *$X, \emptyset \in \tau$;*
(2) *per ogni famiglia $(A_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ vale che $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$;*
(3) *per ogni A, $B \in \tau$ vale che $A \cap B \in \tau$.*

La coppia (X, τ) si dice **spazio topologico** *e ogni insieme $A \in \tau$ si dice τ-aperto. Un insieme C si dice τ-chiuso se $X \setminus C$ è τ-aperto.*

Definizione 1.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice una* **base** *per lo spazio topologico (X, τ) se*

(i) *ogni $B \in \mathcal{B}$ è un aperto;*
(ii) *$\forall A$ aperto esiste $(B_i)_i \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_i B_i$.*

Definizione 1.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Un insieme $U \subseteq X$ si dice un* **intorno** *di x se esiste $A \in \tau$ tale che $x \in A \subseteq U$.*

Definizione 1.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Una famiglia $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice un* **sistema fondamentale di intorni di** *x se*

(i) *ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ è un intorno di x;*
(ii) *$\forall A$ aperto tale che $x \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \subseteq A$.*

Definizione 1.5. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$.*

(1) *Si definisce* **chiusura di** *Y l'insieme*
$$\overline{Y}(= \overline{Y}^{\tau}) := \bigcap_{C \text{ chiuso},\, Y \subseteq C} C.$$
(2) *Y si dice* **denso** *in X se $\overline{Y} = X$;*
(3) *si definisce* **interiore di** *Y l'insieme*
$$\overset{\circ}{Y} := \bigcup_{A \text{ aperto},\, A \subseteq Y} A.$$

Osservazione 1.6. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora $\overline{Y}$ è il più piccolo chiuso di X contenente Y mentre $\overset{\circ}{Y}$ è il più grande aperto di X contenuto in Y. In particolare
$$Y \text{ è chiuso } \iff Y = \bar{Y} \iff \bar{Y} \subseteq Y$$
$$Y \text{ è aperto } \iff Y = \overset{\circ}{Y} \iff Y \subseteq \overset{\circ}{Y}.$$
Inoltre

(1) $\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus Y}} = X \setminus \bar{Y}$;
(2) $\overline{X \setminus Y} = X \setminus \overset{\circ}{Y}$.

Infatti proviamo per esempio la prima:
$$\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus Y}} = \bigcup_{A \,\text{aperto},\, A \subseteq X \setminus Y} A = \bigcup_{A \,\text{aperto},\, Y \subseteq X \setminus A} A = \bigcup_{C \,\text{chiuso},\, Y \subseteq C} X \setminus C$$

$$= X \setminus (\bigcap_{C\,\text{chiuso},\, Y\subseteq C} C) = X \setminus \bar{Y}.$$

Esercizio 1.7. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $D \subseteq X$. Si provi che
(1) $x \in \bar{D}$ se e solo se per ogni U intorno di x vale che $U \cap D \neq \emptyset$;
(2) D è denso in X se e solo se per ogni $A \subseteq X$ aperto vale che $A \cap D \neq \emptyset$.

Definizione 1.8. *Sia $Y \subseteq X$. Un punto $x_0 \in X$ è un* **punto di accumulazione per** Y *(e scriviamo $x_0 \in D(Y)$) se $(U \cap Y) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x_0.*

Osservazione 1.9. *Si osservi che in generale $D(Y) \subsetneq \bar{Y}$. Per esempio $Y = [0, 1] \cup \{2\}$ è tale che $2 \in \bar{Y} \setminus D(Y)$.*

Definizione 1.10. *Lo spazio topologico (X, τ) si dice*
(1) $\mathbf{T_1}$ *se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste U intorno di x tale che $y \notin U$ ed esiste V intorno di y tale che $x \notin V$;*

(2) $\mathbf{T_2}$ *o* **separato** *o* **di Hausdorff** *se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, esiste U intorno di x ed esiste V intorno di y tale che $U \cap V = \emptyset$;*

(3) $\boldsymbol{\mathcal{N}_1}$ *se per ogni punto $x \in X$ esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni;*

(4) $\boldsymbol{\mathcal{N}_2}$ *se ammette una base numerabile;*

(5) **separabile** *se esiste $D \subseteq X$ denso e numerabile.*

Osservazione 1.11. Si osservi che
(1) (X, τ) è uno spazio topologico T_1 se e solo se ogni punto è un chiuso;

(2) se (X, τ) è uno spazio topologico T_2 allora (X, τ) è uno spazio topologico T_1;

(3) se (X, τ) è uno spazio topologico $\mathcal{N}_2$ allora (X, τ) è uno spazio topologico $\mathcal{N}_1$ ed é separabile. Infatti basta osservare che se $\mathcal{B} = (B_n)_n$ è una base numerabile di X allora scelto $x_n \in B_n$ si ha che $D = (x_n)_n$ è denso in X.

(4) Ricordiamo che su ogni spazio metrico (X, d) si può considerare la topologia generata dalla base $\mathcal{B} = \{B(x_0, r) : r > 0, x_0 \in X\}$ dove $B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Esattamente A è aperto in (X, d) se e solo se $\forall\, x \in A$ esiste $B(x_0, r) \subseteq A$. Rispetto tale topologia ogni spazio metrici è $\mathcal{N}_1$ e T_2.

Esercizio 1.12. Sia (X, τ) uno spazio topologico.
(1) se (X, τ) è uno spazio T_1, se $Y \subseteq X$ e $x_0 \in X$ vale che:

$$x_0 \in D(Y) \iff \forall\, U \text{ intorno di } x_0 \text{ l'insieme } U \cap Y \text{ ha infiniti elementi.}$$

(2) Se (X, τ) è uno spazio $\mathcal{N}_1$ allora per ogni $x_0 \in X$ esiste un sistema fondamentale $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 1.13. *Uno spazio metrico (X, d) è separabile se e solo se è $\mathcal{N}_2$.*

Dimostrazione. Un'implicazione segue dall'esercizio precedente. Per l'altra osservare che se esiste $D = (x_n)_n \subseteq X$ denso in X, allora la famiglia $\mathcal{B} := \{B(x_n, s) : x_n \in D,\ s \in \mathbb{Q}^+\}$ è una base numerabile di (X, d). Infatti osserviamo prima di tutto che per ogni $B(x_0, r) \subseteq X$ esiste $B_{x_0} \in \mathcal{B}$ tale che $x_0 \in B_{x_0} \subseteq B(x_0, r)$. Infatti scelto $x_n \in B(x_0, \frac{r}{4}) \cap D$ e $\rho \in \mathbb{Q}$ tale che $\frac{r}{4} < \rho < \frac{r}{2}$ si ha che $x_0 \in B(x_n, \rho) \subseteq B(x_0, 2\rho) \subset B(x_0, r)$. In particolare se A è un aperto e $x_0 \in A$ esiste $B_{x_0} \in \mathcal{B}$ tale che $x_0 \in B_{x_0} \subseteq A$.

Definizione 1.14. *Sia (X, τ) uno spazio topologico.*

(1) *Si dice che una successione $(x_n) \subseteq X$ τ-**converge** a $x \in X$ se $\forall U$ intorno di x esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$. Il punto x si dice **limite** di (x_n) e scriveremo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oppure che $x_n \xrightarrow{\tau} x$.*

(2) *Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice τ-**sequenzialmente chiuso** o τ-**chiuso per successioni** se $x \in Y$ ogniqualvolta esiste una successione $(x_n) \subseteq Y$ τ-convergente a x (ossia se Y contiene i punti che sono limite di sue successioni).*

Ricordiamo che in uno spazio metrico (X, d) una successione $(x_n) \subseteq X$ é convergente a $x_0 \in X$ se e solo se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \text{ se } n \geq n_0 \text{ allora } d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

Proposizione 1.15. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_2. Allora ogni successione τ-convergente ha un unico punto limite.*

(per esercizio: si supponga per assurdo che una successione ammmetta due limiti distinti x, y. Allora esistono due intorni di x e y che sono disgiunti contro il fatto che devono contenere una coda della successione.)

Proposizione 1.16. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*

(1) *Y è chiuso $\Longrightarrow Y$ è sequenzialmente chiuso*;
(2) *se X è $\mathcal{N}_1$ allora*

$$x_0 \in \bar{Y} \Longleftrightarrow \exists\, (x_n) \subseteq Y \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

(3) *se X è $\mathcal{N}_1$ allora*

$$Y \text{ è chiuso } \Longleftrightarrow Y \text{ è sequenzialmente chiuso}$$

e

$$Y \text{ è denso in } X \Longleftrightarrow\ \forall\, x_0 \in X\ \exists\, (x_n) \subseteq Y \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Dimostrazione.

(1) Sia Y chiuso e per assurdo supponiamo che esista $(x_n) \subseteq Y$ convergente a $x \in Y^c = X \setminus Y$ che è un aperto. Quindi Y^c è un intorno di x. Deve esistere allora $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in Y^c$ per $n \geq n_0$ in contraddizione con la scelta di (x_n).

(2) "$\Longrightarrow$" Sia $x_0 \in \bar{Y}$ e sia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $U_n \cap Y \neq \emptyset$, allora esiste $x_n \in U_n \cap Y$. Si dimostra facilmente che $x_n \to x_0$. Infatti sia U intorno di x_0. Allora esiste $n_0 \in N$ tale $U_{n_0} \subseteq U$. In particolare $x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq U$ per ogni $n \geq n_0$. "$\Longleftarrow$" Sia U intorno di x_0. Proviamo che $U \cap Y \neq \emptyset$. Infatti, dalla definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi $x_n \in Y \cap U$ per ogni $n \geq n_0$.

(3) Grazie alla parte (1), resta da provare solo l'implicazione "$\Longleftarrow$". Sia Y sequenzialmente chiuso. Sia $x_0 \in \bar{Y}$ e dimostriamo che $x_0 \in Y$. Applicando la (2), sappiamo che esiste $(x_n) \subset Y$ tale che $x_n \to x_0$. Dal fatto che Y è sequenzialmente chiuso segue che $x_0 \in Y$. Quindi $\bar{Y} \subseteq Y$ e quindi segue che Y è chiuso. Infine, applicando la (2), segue che

$$Y \text{ è denso in } X \Longleftrightarrow X = \bar{Y} \Longleftrightarrow \forall\, x_0 \in X\ \exists\,(x_n) \subseteq Y \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

□

Osservazione 1.17. Si osservi che nella Proposizione 1.16, l'implicazione "$\Longleftarrow$" della parte (2) vale senza l'ipotesi $\mathcal{N}_1$. Ossia, in un qualunque spazio topologico (X,τ) se $Y \subseteq X$ e se $\exists\,(x_n) \subseteq Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ allora $x_0 \in \bar{Y}$.

Definizione 1.18. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Definiamo* **topologia indotta** *da X su Y la topologia τ_Y definita nel seguente modo:*

$$A \text{ è un } \tau_Y\text{-aperto} \Longleftrightarrow \exists\, A' \ \tau\text{-aperto tale che } A = A' \cap Y.$$

Esercizio 1.19. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $C \subseteq Y \subseteq X$. Allora*

(1) *C è un τ_Y-chiuso $\Longleftrightarrow \exists\, C' \subset X$ τ-chiuso tale che $C = C' \cap Y$; in particolare se Y è τ-chiuso in X e $C \subseteq Y$ allora*

$$C \text{ è un } \tau_Y\text{-chiuso} \Longleftrightarrow C \text{ è un } \tau\text{-chiuso.}$$

(2) $\overline{C}^{\tau_Y} = \overline{C}^{\tau} \cap Y$.

1.1. Spazi topologici compatti.

Definizione 1.20. *Sia (X,τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora*

(1) *(X,τ) si dice* **compatto** *se da ogni ricoprimento di aperti di X si può estrarre un ricoprimento finito, ossia se $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ con A_i aperto per ogni $i \in I$ allora esiste $F \subseteq I$ finito tale che $X = \bigcup_{i\in F} A_i$;*

(2) *Y si dice* **compatto** *in X se (Y,τ_Y) è compatto; equivalentemente se ogni qualvolta $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ con A_i τ-aperto per ogni $i \in I$ allora esiste $F \subseteq I$ finito tale che $Y \subseteq \bigcup_{i\in F} A_i$; Y si dice* **precompatto** *in X se $\overline{Y}$ è compatto in X;*

(3) *Y si dice* **sequenzialmente compatto** *in X se ogni successione $(x_n) \subseteq Y$ ammette una sottosuccessione estratta τ-convergente ad un punto di Y.*

In modo molto semplice segue che

Proposizione 1.21. *Sia (X,τ) uno spazio topologico. Allora X è compatto se e solo per ogni famiglia $(C_i)_{i\in I}$ di chiusi di X tale che $\bigcap_{i\in I} C_i = \emptyset$ esiste $F \subseteq I$ finito tale che $\bigcap_{i\in F} C_i = \emptyset$.*

Vale che:

Proposizione 1.22. *Sia (X,τ) uno spazio topologico separato.*

(1) *Se $Y \subseteq X$ è compatto in X allora Y è chiuso;*
(2) *Se $Y \subseteq X$ è sequenzialmente compatto in X allora Y è sequenzialmente chiuso.*

Dimostrazione.

(1) Sia $A := Y^c$. Dimostriamo che A è aperto. Se $x \in A$ allora per ogni $y \in Y$ esiste $U_{x,y}$ intorno aperto di x e U_y intorno aperto di y tali che $U_{x,y} \cap U_y = \emptyset$. Poiché Y è compatto e $Y \subseteq \bigcup_{y\in Y} U_y$, esistono $y_1, y_2, \cdots, y_k$ tali che $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$. È facile dimostrare che $U = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i,y_i}$ è un intorno di x contenuto in A.
(2) Sia $(x_n) \subseteq Y$ tale che (x_n) converga a x_0. Essendo Y sequenzialmente compatto, esiste $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ convergente a un punto $y_0 \in Y$. Dall'unicità del limite, segue che $x_0 = y_0 \in Y$.

□

Si osservi che:

Proposizione 1.23. *Sia (X,τ) uno spazio topologico compatto. Se $Y \subseteq X$ è chiuso allora Y è compatto.*

Dimostrazione. Per dimostrare la compattezza di (Y,τ_Y), applichiamo la Proposizione 1.21. Sia $(C_i)_{i\in I}$ una famiglia di chiusi di (Y,τ_Y) tale che $\bigcap_{i\in I} C_i = \emptyset$. Allora, grazie all'Esercizio 1.19, si ha che $(C_i)_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi in (X,τ). Dalla compattezza di X, segue che esiste $F \subseteq I$ finito tale che $\bigcap_{i\in F} C_i = \emptyset$. □

Al fine di provare che negli spazi metrici la compattezza e la sequenziale compattezza si equivalgono, dimostriamo il seguente risultato preliminare.

Teorema 1.24. *Sia (X,τ) uno spazio topologico compatto o sequenzialmente compatto. Allora X soddisfa la seguente proprietà* **(W)**:
ogni sottoinsieme infinito di punti di X ammette almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ infinito.
I caso: sia X sequenzialmente compatto. Poiché Y è infinito, esiste una successione di punti tutti distinti $(x_n)_n \subseteq Y$. Per la sequenziale compattezza esiste $x_0 \in X$ ed esiste $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ estratta convergente a x_0 in X. È facile provare che x_0 è un punto di accumulazione di Y.
II caso: sia X compatto. Se per assurdo $D(Y) = \emptyset$ allora per ogni $x \in X$ esiste U_x intorno di x tale che $Y \cap U_x - \{x\} = \emptyset$. Poiché $X = \bigcup_{x\in X} U_x$, dalla compattezza di X segue che esistono $x_1, \cdots, x_n$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. In particolare $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Quindi $Y \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$. Assurdo.

□

Teorema 1.25. *Sia (X,τ) uno spazio topologico T_1.*

(1) *Se (X,τ) è $\mathcal{N}_1$, allora X è sequenzialmente compatto $\Longleftrightarrow$ X soddisfa* **(W)**;

(2) *Se* (X,τ) *è* $\mathcal{N}_2$*, allora* X *è compatto* $\Longleftrightarrow$ X *soddisfa* **(W)**.

Dimostrazione. Le implicazioni $'' \Longrightarrow''$ seguono dal teorema precedente.

(1) $'' \Longleftarrow''$ Sia $(x_n) \subseteq X$. Poniamo $Y := \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ e supponiamo che Y abbia infiniti elementi (altrimenti la successione è banalmente convergente). Allora $\exists\, x_0 \in D(Y)$. Essendo X uno spazio $\mathcal{N}_1$, esiste $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sistema fondamentale di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che $x_0 \in D(Y)$ esiste $x_{n_1} \in U_1 - \{x_0\}$. Poiché $U_2 \cap Y$ deve avere infiniti elementi (vedi Esercizio 1.12) $\exists\, x_{n_2} \in U_2 - \{x_0, x_1, \cdots, x_{n_1}\}$. Procedendo in questo modo, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k_{n+1} > k_n \geq n$ tale che $x_{k_n} \in U_n$. Proviamo che $x_n \to x_0$. Sia U intorno di x_0. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale $U_{n_0} \subseteq U$. In particolare $x_{k_n} \in U_{n_k} \subseteq U_{n_0} \subseteq U$ per ogni $n \geq n_0$.

(2) $'' \Longleftarrow''$ $\boxed{\textbf{Non dimostrato a lezione}}$ Sia $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ dove A_i è aperto per ogni $i \in I$. Sia $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di X. Allora $\forall i \in I$ esiste $N_i \subset \mathbb{N}$ tali che $A_i = \bigcup_{n\in N_i} B_n$. Allora:

- l'insieme $D = \bigcup_{i\in I} N_i$ è al più numerabile essendo $D \subseteq \mathbb{N}$;
- $\forall\, n \in D$ esiste $i(n) \in I$ tale che $B_n \subseteq A_{i(n)}$;
- $X = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{n\in N_i} B_n = \bigcup_{n\in D} B_n$.

Se provo che esiste F finito tale che $X = \bigcup_{n\in F} B_n$ seguirà che $X = \bigcup_{n\in F} A_{i(n)}$ da cui la compattezza di X. Se D è finito, la tesi è ovvia. Se D numerabile allora $D = (k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $n \leq k(n) < k(n+1)$ e

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{k(n)}. \tag{1.1}$$

Per assurdo supponiamo che

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} B_{k(i)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Dalla (1.2) e dalla (1.1) segue che esiste $x_1 \in X \setminus B_{k(1)}$ ed $s(1) > k(1)$ tale che $x_1 \in B_{s(1)}$. Applicando di nuovo la (1.2) e la (1.1) esiste $x_2 \in X \setminus (B_{k(1)} \cup B_{k(2)} \cup \cdots B_{s(1)})$ ed $s(2) > s(1)$ tale che $x_2 \in B_{s(2)}$. Così procedendo costruiamo una successione $(x_n) \subset X$ ed una successione strettamente crescente $s(n)$ di numeri naturali tali che $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in B_{s(n)}$ e $x_{n+1} \in X \setminus (B_{k(1)} \cup B_{k(2)} \cup \cdots B_{s(n)})$. In particolare $x_n \neq x_m$ per ogni $n \neq m$ e quindi tale successione ha infiniti termini. Per la proprietà **(W)**, tale successione ha un punto di accumulazione $x_0 \in X$. Grazie alla (1.1), esiste $B_{k(\bar{n})}$ tale che $x_0 \in B_{k(\bar{n})}$. Per l'esercizio 1.12(1) $B_{k(\bar{n})}$ deve contenere infiniti punti della successione. Ma questo è assurdo in quando per ogni $n \geq \bar{n}$ $s(n) > s(\bar{n}) \geq \bar{n}$ e quindi $x_n \notin B_{k(\bar{n})}$.

□ □

Corollario 1.26. *Sia* (X,τ) *uno spazio topologico* T_1 *e* $\mathcal{N}_1$*. Allora*

$$X \text{ è compatto} \Longrightarrow X \text{ è sequenzialmente compatto.}$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.24 e 1.25(1). □

Corollario 1.27. *Sia (X, τ) uno spazio topologico T_1 e $\mathcal{N}_2$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *X verifica* **(W)***;*
(ii) *X è sequenzialmente compatto;*
(iii) *X è compatto.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.25(2). □

La seguente proposizione garantisce che ogni spazio metrico compatto o sequenzialmente compatto è separabile.

Proposizione 1.28. *Se (X, d) è uno spazio metrico compatto o sequenzialmente compatto allora X è separabile (e quindi $\mathcal{N}_\mathbf{2}$).*

Dimostrazione. **Non dimostrato a lezione** Diamo la dimostrazione solo nel caso in cui X è compatto. Se X è compatto $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esistono $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots x_{k_n}^{(n)} \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}).$$

L'insieme $D := \{x_i^{(n)} \ : \ n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq k_n\}$ è numerabile e denso in X. Infatti per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $r > 0$, scelto $n > \frac{1}{r}$, $\exists\, x_i^n$ tale che $x_0 \in B(x_i^{(n)}, \frac{1}{n})$. In particolare $x_i^{(n)} \in B(x_0, \frac{1}{n}) \subset B(x_0, r)$. Questo implica che, preso un qualunque aperto $A \subseteq X$, vale che $A \cap D \neq \emptyset$. □

Osservazione 1.29. Il viceversa è falso. $\mathbb{R}$ è separabile ma non compatto.

Corollario 1.30. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora X è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Applicando la Proposizione 1.28 vale che se X è compatto o sequenzialmente compatto, allora X è uno spazio $\mathcal{N}_\mathbf{2}$. Quindi basta applicare il Corollario 1.27. □

Esempio 1.31. In generale la compattezza non implica la sequenziale compattezza. Sia infatti $X := \{f : [0,1] \to [0,1]\} = [0,1]^{[0,1]}$. Dal teorema di Tyconoff si ha che X (munito della topologia prodotto, vedi Esempio 1.45) è compatto come prodotto di spazi compatti, ma non è sequenzialmente compatto. Infatti se f_n è la funzione che sugli intervalli $[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n}]$ va da 0 a 1 linearmente, vale che la successione $(f_n)_n$ non converge puntualmente.

1.2. **Funzioni continue, semicontinue e Teoremi di Weistrass.**

Definizione 1.32. *Siano (X, τ), (Y, σ) due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Diremo che*

(1) *f è* **continua in** $x_0 \in X$ *(rispetto le topologie fissate) se per ogni σ-intorno V di $f(x_0)$ in Y esiste U τ-intorno di x_0 in X tale che $f(U) \subseteq V$;*

(2) *f è* **sequenzialmente continua in** $x_0 \in X$ *se per ogni successione $(x_n) \subseteq X$ τ-convergente a x_0 si ha che $f(x_n)$ σ-converge a $f(x_0)$;*

(3) *f è* **continua** *(e scriveremo "$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ continua") se f è continua in tutti i punti di X;*

(4) *f è* **sequenzialmente continua** *(e scriveremo "$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ sequenzialmente continua") se f è sequenzialmente continua in tutti i punti di X.*

Proposizione 1.33. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici T_2 e sia $f : X \to Y$ una funzione. Allora*

(1) *f è continua se e solo se per ogni $A \subset Y$ σ-aperto vale che $f^{-1}(A)$ è τ-aperto di X;*
(2) *f è continua se e solo se per ogni $C \subset Y$ σ-chiuso vale che $f^{-1}(C)$ è τ-chiuso di X;*
(3) *se f é continua allora f é sequenzialmente continua;*
(4) *se X è $\mathcal{N}_1$, allora f è continua $\iff$ f è sequenzialmente continua.*

(per esercizio)

Proposizione 1.34. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici T_2 e $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una funzione continua. Se X è τ-compatto allora $f(X)$ è σ-compatto in Y.*

Dimostrazione. Se $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \subseteq Y$ σ-aperto segue che $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$. Essendo $f^{-1}(A_i)$ τ-aperto per ogni $i \in I$ (essendo f continua) ed essendo X compatto, esiste $F \subset I$ finito tale che $X = \bigcup_{i \in F} f^{-1}(A_i)$. Segue che $f(X) \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i$. □

Definizione 1.35. *Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice* τ-**semicontinua inferiormente** *su X se per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello $E_t = \{x \in X \ : \ f(x) \leq t\}$ è chiuso in X. Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice* τ-**semicontinua superiormente** *in X se $-f$ è τ-semicontinua inferiormente.*

Definizione 1.36. *Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice* τ-**sequenzialmente-semicontinua inferiormente** *se per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sottolivello $E_t = \{x \in X \ : \ f(x) \leq t\}$ è τ-chiuso per successioni. Una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ si dice* τ-**sequenzialmente semicontinua superiormente** *in X se $-f$ è τ-sequenzialmente semicontinua inferiormente.*

Dalla Proposizione 1.22 segue che se una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ è τ-semicontinua inferiormente allora é τ-sequenzialmente semicontinua inferiormente.

Facilmente si prova che una funzione $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ é τ-semicontinua inferiormente se e solo se per ogni $x_0 \in X$ vale che

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) (:= \sup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \inf_{y \in U - \{x_0\}} f(y)),$$

mentre é τ-sequenzialmente-semicontinua inferiormente se e solo se per ogni $x_0 \in X$ e per ogni successione $(x_n)_n$ τ-convergente a x_0 vale che

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)(:= \sup_k \inf_{n\geq k} x_n).$$

L'importanza delle funzioni semicontinue risiede nel seguente teorema:

Teorema 1.37 (di Weirstrass generalizzato, versione topologica). *Sia (X,τ) uno spazio topologico separato e sia $f : X \to]-\infty,+\infty]$, $f \not\equiv +\infty$, tale che $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ sia τ-compatto. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x))(\in \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ decrescente e tale che $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_X f(x)(< +\infty)$. Allora i sottolivelli

$$K_n = \{x \in X : f(x) \leq \alpha_n\}$$

sono non vuoti, compatti e quindi chiusi. Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$ $K_{n+1} \subseteq K_n$ e $K_n \subseteq K_1$ che è compatto. In particolare $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$ (altrimenti esisterebbe $F \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $K_{minF} = \bigcap_{n\in F} K_n = \emptyset$. Assurdo). Sia $x_0 \in \bigcap_n K_n$. Allora $f(x_0) \leq \alpha_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$f(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_X f(x) \leq f(x_0)$$

ossia $f(x_0) = \min_X f(x)$. □

Corollario 1.38. *Se (X,τ) è uno spazio topologico compatto e separato ed $f : X \to]-\infty,+\infty]$, $f \not\equiv +\infty$, è una funzione semicontinua inferiormente allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x)(\in \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Si ripeta lo schema della dimostrazione precedente osservando che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il sottolivello K_n definito sopra risulta essere chiuso in quanto f è semicontinua inferioremente e quindi K_n è compatto (essendo chiuso dentro uno spazio X compatto). □

Teorema 1.39 (di Weirstrass generalizzato, versione sequenziale). *Sia (X,τ) uno spazio topologico separato e sia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \not\equiv +\infty$, tale che $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ sia sequenzialmente compatto. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x)(\in \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ decrescente e tale che $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_X f(x)(< +\infty)$. Allora i sottolivelli

$$K_n = \{x \in X : f(x) \leq \alpha_n\}$$

sono non vuoti, sequenzialmente compatti Sia $x_n \in K_n$. Osserviamo che $x_p \in K_n$ per ogni $p \geq n$ poiché $K_{j+1} \subseteq K_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Poichè tutta la successione $(x_n)_n \subseteq K_1$ esiste una sottosuccessione (x_{p_n}) estratta da $(x_n)_n$ ed esiste $x_0 \in K_1$ tale che x_{p_n} τ-converge a x_0. Osserviamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale che $x_{p_n} \in K_{p_n} \subseteq K_m$ per $n \geq m$ (in quanto $p_n \geq n \geq m$) ed essendo K_m sequenzialmente chiuso, otteniamo che $x_0 \in K_m$ per ogni m ossia $f(x_0) \leq \alpha_m$ per ogni m. Passando al limite per $m \to \infty$ otteniamo $f(x_0) \leq \inf_X f(x) \leq f(x_0)$ ossia $f(x_0) = \min_X f(x)(\in \mathbb{R})$. □

Corollario 1.40. *Sia (X, τ) uno spazio topologico sequenzialmente compatto. Sia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \not\equiv +\infty$, una funzione sequenzialmente s.c.i.. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \min_X f(x) (\in \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Diamo due dimostrazioni:

(1) Dimostrazione: Essendo f sequenzialmente s.c.i., i suoi sottolivelli sono sequenzialmente chiusi in uno spazio sequenzialmente compatto. Quindi essi stessi sequenzialmente compatti. Basta quindi applicarela stessa dimostrazione del Teorema 1.39.

(2) Dimostrazione: Sia $(x_n)_n \subseteq X$ tale che $f(x_n)$ converge a $\inf_X f(x) (< +\infty)$. Essendo X τ-sequenzialmente compatto, esiste una sottosuccessione (x_{k_n}) estratta da $(x_n)_n$ ed esiste $x_0 \in X$ tale che x_{k_n} τ-converge a x_0. Essendo f sequenzialmente s.c.i. otteniamo che

$$-\infty < f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n) = \inf_X f(x)$$

ossia $f(x_0) = \min_X f(x) (\in \mathbb{R})$. □

1.3. **Schema riassuntivo.** Sia (X, τ) spazio topologico e $Y \subseteq X$.

(1) X è $T_2 \Longrightarrow X$ è T_1;

(2) X è $\mathcal{N}_2 \Longrightarrow X$ è $\mathcal{N}_1$ e separabile;

(3) Y è chiuso $\Longrightarrow Y$ è sequenzialmente chiuso;

(4) X è compatto e Y è chiuso $\Longrightarrow Y$ è compatto;

(5) X è T_2 e Y è compatto $\Longrightarrow Y$ è chiuso;

(6) se X è T_2 e Y è seq. compatto $\Longrightarrow Y$ è seq. chiuso;

(7) X è seq. compatto $\overset{se\, X T_1\, e \mathcal{N}_1}{\overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}}$ X soddisfa **(W)**;

(8) X è compatto $\overset{se\, X\ T_1\, e \mathcal{N}_2}{\overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}}$ X soddisfa **(W)**;

(9) X è T_1 e $\mathcal{N}_2$, allora
X è compatto $\Longleftrightarrow X$ è seq. compatto $\Longleftrightarrow X$ soddisfa **(W)**;

Sia (X, d) spazio metrico e $Y \subseteq X$.
Allora

(1) X è T_2 ed $\mathcal{N}_1$;

(2) X è $\mathcal{N}_2 \Longleftrightarrow X$ è separabile;

(3) Y è chiuso $\Longleftrightarrow Y$ è sequenzialmente chiuso;

(4) X compatto o sequenzialmente compatto $\Longrightarrow$ X separabile (e quindi $\mathcal{N}_2$);

(5) Y è compatto $\Longleftrightarrow$ Y è seq. compatto.

1.4. **Costruzione di topologie.** In quest'ultima sezione richiamiamo prima di tutto come sia possibile generare una topologia su un insieme X a partire da una famiglia di suoi sottoinsiemi.

Teorema 1.41. *Sia $X \neq \emptyset$ e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che*
(i) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$;
(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *e* $\forall x \in B_1 \cap B_2$ *esiste* $B_3 \in \mathcal{B}$ *tale che* $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
Allora esiste su X un'unica topologia τ tale che $\mathcal{B}$ è una base per (X, τ). Inoltre tale topologia τ è definita come
$$\tau := \{\cup_{i\in I} B_i : B_i \in \mathcal{B},\ I \text{ qualunque}\}.$$

Introduciamo ora la sequente relazione di equivalenza tra topologie su uno stesso insieme.

Definizione 1.42. *Siano τ, σ due topologie su uno stesso insieme $X \neq \emptyset$. Diciamo che la topologia σ è* **meno fine** *della topologia τ (e scriveremo $\sigma \prec \tau$) se ogni σ-aperto è τ-aperto.*

Osserviamo che se $\sigma \prec \tau$ e (Z, ρ) un altro spazio topologico allora
- ogni σ-chiuso è τ-chiuso.
- se $(x_n)_n \subseteq X$ τ-converge a $x \in X$ allora $(x_n)_n$ σ-converge a $x \in X$;
- se $f : (X, \sigma) \to (Z, \rho)$ è una funzione continua allora $f : (X, \tau) \to (Z, \rho)$ è una funzione continua.

Sia ora $X \neq \emptyset$, siano $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici assegnati e sia $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di funzioni con $\varphi_i : X \to Y_i$. Applichiamo il Teorema 1.41 per costruire su X una topologia σ che renda continue le assegnate funzioni $\varphi_i : (X, \sigma) \to (Y_i, \tau_i)$. Tale topologia σ deve infatti contenere le immagini inverse di aperti, ossia per ogni $V_i \in \tau_i$ deve valere che $\phi_i^{-1}(V_i) \in \sigma$. Inoltre anche le intersezioni finite di sottoinsiemi del tipo $\varphi_i^{-1}(V_i)$ devono stare in σ. Quindi definiamo
$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i) :\ V_i \in \tau_i\}.$$

Questa famiglia di insiemi verifica le proprietà (i) e (ii) del Teorema 1.41. Pertanto esiste una topologia su X che ha $\mathcal{B}$ come base. Gli aperti di questa topologia sono della forma
$$\bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i)$$
con V_i τ_i-aperto.

Inoltre è facile verificare che **questa topologia è meno fine di ogni altra topologia τ che renda continue le applicazioni** $\varphi_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ ossia se τ è un'altra topologia su X rispetto la quale le applicazioni $\varphi_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ sono continue allora ogni σ-aperto è anche τ-aperto.

Valgono poi la seguenti proposizioni:

Proposizione 1.43. *Sia* $(x_n) \subseteq X$. *Allora*

$$(x_n)\ \sigma\text{-converge a } x_0 \in X \iff (\varphi_i(x_n))_n\ \tau_i\text{-converge a } \varphi_i(x_0)\ \forall\, i \in I.$$

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Poichè $\varphi_i : (X, \sigma) \to (Y_i, \tau_i)$ è continua allora è sequenzialmente continua. Quindi la tesi.

"$\Longleftarrow$" Sia U un σ-intorno di x_0. Per semplicità possiamo assumere $U = \bigcap_{i\in F} \varphi_i^{-1}(V_i)$ con V_i τ_i-aperto e F un sottoinsieme finito di I. Fissiamo $i \in F$. Poichè $x_0 \in U$, allora l'aperto V_i contiene $\varphi_i(x_0)$. Poichè per ipotesi la successione $\varphi_i(x_0)$ τ_i-converge a $\varphi_i(x_0)$, deve esistere $N_i \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N_i$ $\varphi_i(x_n) \in V_i$. Scelto allora $N = \max_{i\in F} N_i$ si ha che $\varphi_i(x_n) \in V_i$ per ogni $n \geq N$ e per ogni $i \in F$. Quindi $x_n \in \bigcap_{i\in F} \varphi^{-1}(V_i) = U$ per ogni $n \geq N$. □

Proposizione 1.44. *Sia* (Z, τ) *uno spazio topologico e* $f : Z \to X$ *una funzione. Allora* $f : (Z, \tau) \to (X, \sigma)$ *è continua* $\iff$ *per ogni* $i \in I$ *la funzione* $\varphi_i \circ f : (Z, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ *è continua.*

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" ovvia.
"$\Longleftarrow$" Sia $U \subseteq X$ un σ-aperto. Dobbiamo provare che $f^{-1}(U)$ è un τ-aperto di Z. Ora U è della forma $U = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i)$ con V_i τ_i-aperto. Quindi

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} f^{-1}(\varphi_i^{-1}(V_i)) = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} (\varphi_i \circ f)^{-1}(V_i)$$

dove gli insiemi $(\varphi_i \circ f)^{-1}(V_i)$ sono aperti essendo le funzioni $\varphi_i \circ f : (Z, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ continue per ogni i. Segue quindi la tesi. □

Esempio 1.45. (La topologia prodotto) Sia $X = \prod_{i\in I} Y_i$ dove $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ è una famiglia di spazi topologici assegnati e sia $(\pi_j)_{j\in I}$ la famiglia di funzioni (dette **proiezioni**) $\pi_j : X \to Y_j$ definita da $\pi_j((y_i)_i) = y_i$. Allora la topologia Π meno fine su X che rende continue le proiezioni $(p_i)_i$ è detta **topologia prodotto** su X. Inoltre dalle Proposizioni 1.43 e 1.44 segue che

- se $(x_n)_n \subseteq X$ allora

  $$(x_n)_n\ \Pi\text{-converge a } x \iff (\pi_i(x_n))_n\ \tau_i\text{-converge a } \pi_i(x) \text{ in } Y_i\ \forall i \in I.$$

  In particolare se $x_n = (y_i^n)_{i\in I}$ e $x = (y_i)_{i\in I}$ allora

  $$(x_n)_n\ \Pi\text{-converge a } x \iff (y_n^i)_n\ \tau_i\text{-converge a } y_i\ \forall i \in I.$$

- se (Z, τ) è uno spazio topologico e $f : Z \to X$ una funzione definita da $f(z) = (f_i(z))$ dove $f_i : Z \to Y_i$ allora

  $$f : (Z, \tau) \to (X, \Pi) \text{ è continua } \iff f_i : (Z, \tau) \to (Y_i, \tau_i) \text{ è continua } \forall i \in I.$$

2. **Gli spazi normati**

In questa sezione K sarà uguale a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$ e X uno spazio vettoriale su K.

2.1. **Seminorme e norme.**

Definizione 2.1. *Diremo che* $p : X \to \mathbb{R}$ *è una* **seminorma** *su* X *se*

(1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *per ogni* $x \in X$ *e* $\lambda \in K$*;*

(2) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ *per ogni* $x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare).*

Osservazione 2.2. Sia p una seminorma su uno spazio vettoriale X. Allora

(a) $p(0) = 0$;

(b) $p(x) = p(-x)$ per ogni $x \in X$. In particolare, $p(x) \ge 0$ per ogni $x \in X$;

(c) $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$ per ogni $x, y \in X$;

(d) $p(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta p(x) + (1-\theta)p(y)$ per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\theta \in [0, 1]$ (ossia p è una funzione convessa)

(e) $S := \{x \in X : \ p(x) = 0\}$ è un sottospazio di X.

Infatti

(a) segue applicando la (1) con $x = 0$;
(b) basta applicare la (2) con $\lambda = -1$. Poi, dalla (2) segue che $2p(x) = p(x) + p(-x) \ge p(0) = 0$ ossia $p(x) \ge 0$ per ogni $x \in X$;
(c) applicando la (2) si ha che $p(x) \le p(x - y) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$. Scambiando il ruolo di x, y segue la (c).
(d) applicando la (2) e (1) si ha che

$$p(\theta x + (1-\theta)y) \le p(\theta x) + p((1-\theta)y) = \theta p(x) + (1-\theta)p(y);$$

(d) se $p(x) = p(y) = 0$ e $a, b \in K$, da (b), (2) e (1), segue che

$$0 \le p(ax + by) \le p(ax) + p(by) = |a|p(x) + |b|p(y) = 0$$

ossia $ax + by \in S$.

Definizione 2.3. *Sia* X *uno spazio vettoriale su* K*.*

(1) *Diremo che* $\|\cdot\|$ *è una* **norma** *su* X *se*
   (a) $\|x\| \ge 0$ *per ogni* $x \in X$ *e* $\|x\| = 0$ *se e solo se* $x = 0$*;*

   (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *per ogni* $x \in X$ *e* $\lambda \in K$*;*

   (c) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *per ogni* $x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare).*

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *si dice uno* **spazio normato**.

Osserviamo che uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è, in particolare, uno spazio metrico con $d(x, y) := ||x - y||$.

Osservazione 2.4. Dalla Remark 2.2 segue che

- una seminorma p è una norma se e solo verifica la seguente proprietà:
$$p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0;$$
- dalle proprietà delle seminorme segue che
$$|\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y||$$
per ogni $x, y \in X$ da cui segue che se $||x_n - x|| \to 0$ allora $||x_n|| \to ||x||$. Il viceversa è falso (si consideri $x_n = (-1)^n ...$).

Esercizio 2.5. Sia $C[0,1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[0,1]$. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $p_x : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definita da
$$p_x(f) := |f(x)|.$$
Allora per ogni $x \in [0,1]$ si ha che p_x è una seminorma (e non è una norma).

Definizione 2.6. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $(x_n) \subseteq X$ si dice* **di Cauchy** *(rispetto a d) se*
$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ \ \textit{se } n, m \geq n_0 \textit{ allora } d(x_n, x_m) < \epsilon.$$
Uno spazio metrico si dice **completo** *se tutte le sue successioni di Cauchy sono convergenti. Uno spazio normato si dice* **spazio di Banach** *se tutte le sue successioni di Cauchy sono convergenti.*

Osservazione 2.7. Sia (X, d) uno spazio metrico.

(1) **se una successione $(x_n) \subseteq X$ converge in X allora è di Cauchy**.
Infatti sia x_0 il suo limite. Sia $\epsilon > 0$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ vale $d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. In particolare per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n, m \geq n_0$ vale
$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = epsilon.$$

(2) se una successione $(x_n) \subseteq X$ di Cauchy ammette un'estratta convergente ad un punto $x_0 \in X$ allora tutta la successione (x_n) converge a x_0; infatti sia $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ convergente ad x_0. Sia $\epsilon > 0$. Allora, dal fatto che (x_n) è di Cauchy, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ vale $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$, mentre, dalla convergenza della successione (x_{k_n}) ad x_0, segue che $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_1$ vale $d(x_{k_n}, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. In particolare per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n, m \geq \max\{n_0, n_1\}$ vale che $k_n \geq n \geq n_1$ e quindi
$$d(x_n, x_0) \geq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(3) **se (X, d) è compatto, allora (X, d) è completo.**
Infatti, dalla compattezza segue che ogni successione di Cauchy ammette un'estratta convergente e quindi, dalla (2), segue che tutta la successione converge.
Il viceversa è falso. Infatti $\mathbb{R}$ è completo ma non è compatto.

(4) **se (X, d) è uno spazio metrico completo e $Y \subseteq X$ è chiuso allora (Y, d) è completo.**
Infatti ogni successione di Cauchy in Y risulta di Cauchy in X e come tale converge ad un punto di X che deve appartenere a Y in quanto Y è chiuso.

Il seguente teorema caratterizza gli spazi normati completi.

Teorema 2.8. (Criterio di Weirstrass per le serie) *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

(1) *X è di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|$;*
(2) *per ogni successione $(x_n) \subseteq X$, se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge allora esiste $y \in X$ tale che la successione $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ delle somme parziali converge a y nella norma $\|\cdot\|$ (ossia $\exists y \in X$ tale che $\|s_n - y\| \to 0$). Inoltre $\|y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.*

Osservazione 2.9. (**Norma sullo spazio prodotto di due spazi normati**) Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati. Allora sullo spazio prodotto $X \times Y$ è possibile definire una norma nel seguente modo:

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Si osservi che una successione

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad \text{in } X \times Y \iff \|x_n - x\|_X \to 0 \;\text{ e } \|y_n - y\|_Y \to 0.$$

Segue quindi facilmente che se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi di Banach, allora anche lo spazio prodotto $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ è uno spazio di Banach. Inoltre

(1) la funzione
$$(t, x) \mapsto tx$$
è continua da $K \times X$ in X;
(2) La funzione
$$(x, y) \mapsto x + y$$
è continua da $(X \times X, \|\cdot\|_{X\times X})$ in $(X, \|\cdot\|_X)$.

Definizione 2.10. *Sia X uno spazio normato. Un insieme $Y \subseteq X$ si dice* **limitato** *(in X) se $\sup_{y\in Y} ||y|| \in \mathbb{R}$. Equivalentemente $Y \subseteq X$ è limitato se esiste $R > 0$ tale che $Y \subseteq B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$. In particolare una successione $(x_n) \subseteq X$ si dice* **limitata** *se $\sup_n ||x_n|| \in \mathbb{R}$.*

Osservazione 2.11. Sia X uno spazio normato.

(1) **Se una successione $(x_n) \subseteq X$ è convergente, allora è limitata.**
Infatti se x_0 è il suo limite, allora $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x_0|| \in \mathbb{R}$.
(2) **se $Y \subseteq X$ è compatto, allora Y è chiuso e limitato;**
infatti se per assurdo non lo fosse, $\sup_{y\in Y} ||y|| = +\infty$ ed esisterebbe $y_n \subseteq Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} ||y_n|| = +\infty$. Tale successione (y_n) dovrebbe ammettere una estratta (y_{k_n}) convergente ad un punto $y_0 \in Y$. Questo implica che la successione
$$+\infty = \lim_{n\to\infty} ||y_n|| = \lim_{n\to\infty} ||y_{k_n}|| = ||y_0|| \in \mathbb{R}.$$
Assurdo. Il viceversa è falso. Per esempio i prenda $X = C[0, 1]$ munito della norma indotta dalla distanza
$$d(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$
Allora vale che la palla $\mathcal{B}_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ non è compatta (si prenda $f_n(x) = x^n$ e si verifichi che non ammette sottosuccessioni convergenti.)

Proposizione 2.12. *In uno spazio normato $(X, \|\cdot\|_X)$ sono equivalenti i seguenti fatti:*

(1) *la palla unitaria $\mathcal{B}_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è compatta;*
(2) *per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $R > 0$ la palla $\mathcal{B}_R(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq R\}$ è compatta;*
(3) *ogni successione $(x_n) \subseteq X$, limitata in $(X, \|\cdot\|_X)$ (ossia tale che $\sup_n ||x_n|| \in \mathbb{R}$), ammette un'estratta convergente in X.*

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2): per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $R > 0$ la funzione $t_{R,x_0} : X \to X$ definita come $t_{R,x_0}(x) = Rx + x_0$ è un'applicazione continua in quanto

$$|t_{R,x_0}(x) - t_{R,x_0}(y)| = R|x - y| \ \forall x, y \in X$$

e come tale trasforma insiemi compatti in insiemi compatti. Poiché $t_{R,x_0}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_R(0)$ segue che la palla $\mathcal{B}_R(x_0)$ è compatta.

(2) $\Longrightarrow$ (3): se $(x_n) \subseteq X$ è una successione limitata allora $(x_n) \subseteq \mathcal{B}_R(0)$ dove $R = \sup_n ||x_n||$. Essendo la palla $\mathcal{B}_R(0)$ compatta esiste una sottosuccessione estratta da (x_n) convergente in $\mathcal{B}_R(x_0)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Proviamo che $\mathcal{B}_1$ é sequenzialmente compatta. Sia $(x_n) \subseteq \mathcal{B}_1$. Essa è ovviamente limitata in X. Quindi ammette una sottosuccessione estratta convergente ad un punto $x_0 \in X$. Siccome la palla $\mathcal{B}_1$ è chiusa, il punto $x_0 \in \mathcal{B}_1$. □

Definizione 2.13. *Siano $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ due norme su uno spazio vettoriale X. Esse si dicono* **equivalenti** *se esistono due costanti $c, C > 0$ tali che per ogni $v \in X$*

$$c|v| \leq \|v\| \leq C|v|.$$

Osservazione 2.14. Siano $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ due norme equivalenti sullo spazio X e $(x_n) \subseteq X$. Dal fatto che

$$c|x_n - x_m| \leq \|x_n - x_m\| \leq C|x_n - x_m| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

segue che (x_n) è di Cauchy rispetto a $|\cdot|$ se e solo se (x_n) è di Cauchy rispetto a $||\cdot||$. Inoltre per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$c|x_n - x_0| \leq \|x_n - x_0\| \leq C|x_n - x_0|$$

e quindi

$$||x_n - x_0|| \to 0 \Longleftrightarrow |x_n - x_0| \to 0$$

ossia ogni successione in X convergente rispetto ad una norma converge allo stesso limite anche rispetto all'altra norma. In particolare

$$(X, |\cdot|) \text{ è completo } \Longleftrightarrow (X, ||\cdot||) \text{ è completo}$$

e

$$\{x \in X : |x| \leq 1\} \text{ è compatta in } (X, |\cdot|) \Longleftrightarrow \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \text{ è compatta in } (X, \|\cdot\|).$$

Esercizio 2.15. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazio metrici e sia $T : X \to Y$ un'isometria. Dimostrare che

(1) se X è completo, allora $T(X)$ è chiuso in Y;
(2) se X e Y sono completi, allora $T(X)$ è uno spazio completo.

2.2. **Una famiglia di seminorme: i funzionali di Minkoskii.**

Definizione 2.16. *Sia X uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq X$. A si dice*

(1) **convesso** *se $\theta x + (1-\theta)y \in A$ per ogni $x, y \in A$ e per ogni $\theta \in [0,1]$;*
(2) **assorbente o radiale** *se per ogni $x \in X$ esiste $t = t(x) > 0$ tale che $x \in tA$;*
(3) **equilibrato** *se per ogni $x \in A$ vale che $tx \in A$ per ogni $|t| \leq 1$.*

Esercizio 2.17. Sia X uno spazio vettoriale.

(1) se $A \subseteq X$ è convesso e radiale (o solo equilibrato), allora $0 \in A$. Infatti sia $x \in X$. Allora esistono $t = t(x) > 0$ e $s = s(x) > 0$ tali che $x \in tA$ e $-x \in sA$, ossia $t^{-1}x \in A$ e $-s^{-1}x \in A$. Essendo A convesso, il segmento che li congiunge é tutto contenuto in A. In particolare $0 \in A$. Analogamente si può provare che se $A \subseteq X$ è equilibrato, allora $0 \in A$.
(2) Sia p una seminorma su uno spazio vettoriale X. Provare che l'insieme
$$A := \{x \in X : \; p(x) < 1\}$$
è convesso, assorbente ed equilibrato. Inoltre $0 \in A$.

Nell'esercizio 2.17 abbiamo visto come ad ogni seminorma sia possibile associare un insieme convesso, radiale e bilanciato. Proviamo ora come costruire una seminorma a partire da un insieme che sia convesso, radiale e bilanciato.

Definizione 2.18. *Sia $A \subseteq X$ un insieme convesso e assorbente. La seguente nozione troverà applicazione nella dimostrazione della forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach.*

Si definisce **gauge** *di A o* **funzionale di Minkoskii** *associato ad A la funzione $p_A : X \to \mathbb{R}^+$ definita da*
$$p_A(x) := \inf\{t > 0 : \; x \in tA\}.$$

Teorema 2.19. *Sia $A \subseteq X$ un insieme convesso e assorbente (in particolare $0 \in A$). Allora*

(a) *$p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ per ogni $x \in X$ e $\lambda > 0$ (ossia è positivamente omogenea di grado 1);*
(b) *$\{x \in X : \; p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : \; p_A(x) \leq 1\}$.*
(c) *$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ per ogni $x, y \in X$ (disuguaglianza triangolare);*
(d) *p_A è una seminorma se A è equilibrato.*

Dimostrazione.

(a) Per ogni $x \in X$ e $\lambda > 0$ si ha che
$$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \; \lambda x \in tA\} = \lambda \inf\{\lambda^{-1}t > 0 : \; x \in \lambda^{-1}tA\} = \lambda p_A(x).$$
(b) Se $p_A(x) < 1$ allora esiste $0 < t < 1$ tale che $t^{-1}x \in A$. Poiché $0 \in A$ e A ï¿½ convesso, vale che $tt^{-1}x + (1-t)\cdot 0 \in A$ ossia $x \in A$. L'altra inclusione è banale.
(c) Per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $x, y \in X$ vale che $p_A(\frac{x}{p_A(x)+\epsilon}) < 1$ e $p_A(\frac{y}{p_A(y)+\epsilon}) < 1$. In particolare, $\frac{x}{p_A(x)+\epsilon} \in A$ e $\frac{y}{p_A(y)+\epsilon} \in A$ da cui, essendo A convesso, segue che il segmento
$$[\frac{x}{p_A(x)+\epsilon}, \frac{y}{p_A(y)+\epsilon}] \subseteq A.$$

Ora è facile dimostrare che esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$\frac{x+y}{p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon} = t\frac{x}{p_A(x)+\epsilon} + (1-t)\frac{y}{p_A(y)+\epsilon}.$$

Ciò implica che $\frac{x+y}{p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon} \in A$ e quindi

$$p_A(\frac{x+y}{p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon}) \leq 1.$$

Essendo p_A positivamente omogenea, segue che $p_A(x+y) \leq p_A(x)+p_A(y)+2\epsilon$. Per $\epsilon \to 0$ segue la tesi.

(d) per esercizio.

□

Proposizione 2.20. *Se $(X, ||\cdot||)$ è uno spazio normato e A è un convesso tale che $0 \in \overset{\circ}{A}$, allora A è assorbente ed esiste $C>0$ tale che*

$$p_A(x) \leq C||x||$$

per ogni $x \in X$. Inoltre se A é aperto, allora $A \equiv \{x \in X : \; p_A(x) < 1\}$.

Dimostrazione. Sia $B(0,r) := \{x \in X : \; ||x|| < r\} \subseteq A$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $x \in X$ si ha che $\frac{x}{||x||+\epsilon} r \in A$. In particolare A è assorbente e per definizione

$$p_A(x) \leq \frac{||x||+\epsilon}{r}$$

per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $x \in X$ Per $\epsilon \to 0$ si ottiene

$$p_A(x) \leq \frac{||x||}{r}$$

per ogni $x \in X$. Infine se $x \in A$, poiché A è aperto esiste $\epsilon_0 = \epsilon_0(x) > 0$ tale che $(1+\epsilon_0)x \in A$. In particolare

$$p_A(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon_0} < 1,$$

ossia $A \subseteq \{x \in X : \; p(x) < 1\}$. L'altra inclusione segue dal Teorema 2.19 (b).

□

2.3. **Gli spazi normati di dimensione finita.**

Proposizione 2.21. *Sia X uno spazio vettoriale su K e $dim_K X = N$. Sia $(e_1, \cdots, e_N)$ una base canonica. Per ogni $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i \in X$ sia $||v||_1 := \sum_{i=1}^N |v_i|$. Allora vale che*

(1) *$(X, ||\cdot||_1)$ è un spazio normato completo;*

(2) *da ogni successione in X limitata rispetto a questa norma si può estrarre una sotto-successione convergente. In particolare la palla chiusa $B_1 := \{x \in X : \|x\|_1 \leq 1\}$ è compatta.*

Dimostrazione.

(1) Dalle proprietà del modulo segue facilmente che $\|\cdot\|$ è una norma. Inoltre si osservi che se $v_n = \sum_{i=1}^N v_{i,n}$ e $v = \sum_{i=1}^N v_i$ vale che
$$\|v_n - v_0\|_1 \to 0 \Longleftrightarrow |v_{i,n} - v_i| \to 0 \; \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$
ossia se per ogni i la successione delle i-me componenti di v_n converge alla i-ma componente di v. In particolare dalla completezza di K segue che $(X, \|\cdot\|_1)$ è un spazio normato completo.

(2) Sia $(v_n)_n \subseteq X$ una successione in X limitata rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ sopra definita e sia $v_n = \sum_{i=1}^N v_{i,n} e_i$ con $v_{i,n} \in K$ per ogni $i \in \{1, \cdots, N\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Poichè la successione $(v_n)_n$ è limitata in norma $\|\cdot\|_1$, per ogni $i \in \{1, \cdots, N\}$ la successione delle i-me componenti $(v_{i,n})_n$ è limitata in K. Applicando il teorema di Bolzano-Weirstrass sulla successione (reale o complessa) delle prime componenti $(v_{1,n})_n$ si ottiene una sottosuccessione $(v_{1,k_n^1})_n \subseteq (v_{1,n})_n$ tale che $(v_{1,k_n^1})_n$ converga a $v_1 \in K$. Quindi si considera la sottosuccessione delle seconde componenti $(v_{2,k_n^1})_n$ e applicando il teorema di Bolzano-Weirstrass si ottiene una sottosuccessione $(v_{2,k_n^2})_n \subseteq (v_{2,k_n^1})_n$ tale che $(v_{2,k_n^2})_n$ converga a $v_2 \in K$. Osserviamo che anche la sottosuccessione $(v_{1,k_n^2})_n$ continua a convergere a v_1 essendo una sottosuccessione estratta da $(v_{1,k_n^1})_n$. Quindi si itera il procedimento fino ad ottenere una sottosuccessione $(v_{k_n^N})_n$ ed un elemento $(v_1, \cdots, v_N) \in K^N$ tale che $(v_{i,k_n^N})_n$ converge a v_i per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Segue che la sottosuccessione $(v_{k_n^N})$ converge a $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i \in X$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. □

Proposizione 2.22. *Sia X uno spazio vettoriale su K e $dim_K X = N$. Allora tutte le norme su X sono equivalenti.*

Dimostrazione. Basta verificare che ogni altra norma sia equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$ sopra definita. Sia $||\cdot||$ un'altra norma su X. Allora per ogni $v \in X$ se $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$ allora
$$||v|| \le \sum_{i=1}^N ||v_i e_i|| \le \sum_{i=1}^N |v_i| ||e_i|| \le C \sum_{i=1}^N |v_i| = C\|v\|_1$$
dove $C = \max_{0 \le i \le N} ||e_i||$. Viceversa: per assurdo assumiamo che non esista una costante $C > 0$ tale che $\|v\|_1 \le C\|v\|$ per ogni $v \in X$, ossia assumiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista $v_n \in X$ tale che $\|v_n\|_1 \ge n\|v_n\|$. Definiamo $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_1}$. Allora $\|w_n\|_1 = 1$ e $\|w_n\| \le \frac{1}{n}$. Segue che $w_n \to 0$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Inoltre esiste una sottosuccessione w_{k_n} convergente a $w \in X$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. In particolare $\|w\|_1 = \lim_n \|w_{k_n}\|_1 = 1$. Infine poichè
$$||w_{k_n} - w|| \le C\|w_{k_n} - w\|_1,$$
si ha che $||w_{k_n} - w|| \to 0$ da cui $w = 0$. Assurdo. □

Osservazione 2.23. Se lo spazio non è di dimensione finita, la proprietà (2) del Teorema 2.21 (detta proprietà di Bolzano-Weirtrass) non vale. Vedi Esempio 2.40.

Dalla Proposizione 2.21 e dall'Osservazione 2.14 segue che

Corollario 2.24. *Sia X uno spazio vettoriale normato su K di dimensione finita. Allora X è completo rispetto a qualunque norma.*

La proprietà affermata nel corollario precedente è falsa se lo spazio è infinito dimensionale. Vedi Esempio 2.37(3).

Corollario 2.25. *Sia X uno spazio normato su K e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio di dimensione finita. Allora Y è chiuso in X.*

Dimostrazione. Poiché Y è completo rispetto a qualunque norma, Y è completo rispetto alla norma di X. In particolare è sequenzialmente chiuso rispetto alla norma di X e quindi chiuso. □

Il seguente teorema caratterizza gli spazi normati di dimensione finita:

Teorema 2.26 (di Riesz). *Sia X uno spazio normato. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

(i) *X ha dimensione finita*
(ii) *ogni palla chiusa è compatta.*

Definizione 2.27. *Uno spazio vettoriale E su K si dice* **infinito dimensionale** *se per ogni $N \in \mathbb{N}$ esistono $x_1, \cdots x_N \in E$ che risultano linearmente indipendenti.*

Si vede facilmente che E è **infinito dimensionale** se e solo $E \neq span\{x_1, \cdots x_N\}$ per ogni $x_1, \cdots x_N \in E$. In particolare se E ha dimensione infinita si può costruire una successione di sottospazi di dimensione finita $(E_n)_n$ tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$ strettamente. Inoltre in base al Corollario 2.25 E_n è chiuso per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ricordiamo che se (X, d) è uno spazio metrico e $Y \subseteq X$ allora

$$x_0 \in \bar{Y} \Longleftrightarrow 0 = \inf\{d(x_0, y) : \ y \in Y\} =: d(x_0, Y).$$

Per dimostrare il Teorema 2.26 abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 2.28 (di Riesz). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato e sia $Y \subsetneq X$ un sottospazio chiuso. Allora*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x_0 \in X \ \textit{tale che} \ x_0 \notin Y, \ ||x_0|| = 1 \ \textit{e} \ d(x_0, Y) \geq 1 - \epsilon.$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$ tale che $x \notin Y$. Essendo Y chiuso, allora $d = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Si noti che se $0 < \epsilon < 1$ allora $\frac{d}{1-\epsilon} > d$. Quindi esiste $y_0 \in Y$ tale che

$$\|x - y_0\| \leq \frac{d}{1 - \epsilon}.$$

Poniamo $x_0 := \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}$. Allora $x_0 \notin Y$ (altrimenti $x \in Y$) e per ogni $y \in Y$ vale che

$$\|x_0 - y\| = \|\frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} - y\| = \frac{\|x - y_0 - y\|x - y_0\|\|}{\|x - y_0\|} = \frac{\|x - y_1\|}{\|x - y_0\|} \geq d \cdot \frac{1 - \epsilon}{d}$$

essendo $y_1 = y_0 - y\|x - y_0\| \in Y$. □

Dimostrazione. (del Teorema di Riesz)

(i) $\Longrightarrow$ (ii) segue dalla Proposizione 2.21 e dall'Osservazione 2.14

(ii)$\Longrightarrow$ (i): per assurdo X non sia di dimensione finita. Allora si può costruire una successione $(Y_n)_n$ di sottospazi di dimensione finita tali che $Y_n \subsetneq Y_{n+1}$. Grazie al Lemma di

Riesz (applicato alla coppia di spazi Y_n e Y_{n-1} con $\epsilon = \frac{1}{2}$), si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in Y_n \setminus Y_{n-1}$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $d(x_n, Y_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. In particolare

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

per ogni $m \neq n$ (infatti se $n < m$ allora $x_n \in Y_n \subseteq Y_{m-1}$ e

$$\|x_m - x_n\| = d(x_m, x_n) \geq d(x_m, Y_{m-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi non è possibile estrarre da $(x_n)_n \in B_1$ alcuna successione convergente contro l'ipotesi di compattezza della palla unitaria. □

Mettendo insieme i risultati di questa sezione, otteniamo il seguente teorema:

Teorema 2.29. *Sia X uno spazio normato. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

(i) *X ha dimensione finita;*
(ii) *ogni successione limitata ammette un' estratta convergente;*
(iii) *ogni palla chiusa è compatta.*

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ (ii) segue dalle Proposizioni 2.21 e 2.22.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii) Banale.

(iii)$\Longrightarrow$ (i) Segue dal Teorema di Riesz. □

Esercizio 2.30. *Sia X uno spazio normato di dimensione finita e $K \subseteq X$. Allora K è compatto se e solo K è chiuso e limitato in X.*

2.4. **Spazi di successioni.**

Esercizio 2.31. *(vedi anche esercizio 3.31 alla fine della sezione 3)* Sia $X = c_0$ lo spazio delle successioni di numeri reali che sono infinitesime.

(1) Verificare che $||(a_n)_n||_\infty = \sup_n |a_n|$ definisce una norma su X rispetto alla quale X è completo.
(2) Sia c_{00} il sottospazio di X costituito dalle successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero, ovvero per le quali esiste un $N \in \mathbb{N}$ per cui $x_n = 0$ se $n > N$. Dimostrare che c_{00} non è completo rispetto a questa norma;
(3) Verificare che la chiusura di c_{00} rispetto alla norma del sup è lo spazio c_0.

Soluzione

(1) E' banale verificare che $||(a_n)_n||_\infty = max_n|a_n|$ definisce una norma su X. Proviamo che X, munito di questa norma, è completo. Se $(a^k)_k \subseteq c_0$ ($a^k = (a^k_n)_n$) è una successione di Cauchy , allora per ogni n la successione $(a^k_n)_k$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Infatti per ogni $h, k \in \mathbb{N}$

$$|a^k_n - a^h_n| \leq \sup_n |a^k_n - a^h_n| = ||a_k - a_h||_\infty.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ è definito $\lim_k a^k_n = a_n$. Proviamo che $a = (a_n)_n \in c_0$: sia $\epsilon > 0$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k, h \geq n_0(\epsilon)$ $||a^k - a^h||_\infty \leq \epsilon$. Allora

$$|a^k_n| \leq |a^k_n - a^h_n| + |a^h_n| \leq ||a^k - a^h||_\infty + |a^h_n| \leq \epsilon + |a^h_n|$$

per ogni $k, h \geq n_0(\epsilon)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Cosi', per $k \to \infty$ otteniamo

$$|a_n| = \lim_k |a_n^k| \leq \epsilon + |a_n^h|$$

per ogni $h \geq n_0(\epsilon)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questo punto, per $n \to \infty$ segue che

$$\limsup_n |a_n| \leq \epsilon + \lim_n |a_n^h| = \epsilon.$$

Per $\epsilon \to 0$ segue la tesi.

Proviamo infine che $||a_n - a||_\infty \to 0$. Infatti sia $\epsilon > 0$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $||a^k - a^h||_\infty \leq \epsilon$ per ogni $k, h \geq n_0(\epsilon)$. Allora per ogni $k, h \geq n_0(\epsilon)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n^k - a_n| \leq |a_n^k - a_n^h| + |a_n^h - a_n| \leq ||a^k - a^h||_\infty + |a_n^h - a_n| \leq \epsilon + |a_n^h - a_n|$$

da cui, mandando $h \to \infty$ otteniamo che

$$|a_n^k - a_n| \leq \epsilon$$

per ogni $k \geq n_0(\epsilon)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ ossia

$$||a^k - a||_\infty \leq \epsilon$$

per ogni $k \geq n_0(\epsilon)$.

(2) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $y^k = (y_n^k)_n \in X$ cosi' definito $y_n^k = \frac{1}{n}$ se $n \leq k$, 0 altrimenti. La successione $(y^k)_k$ è di Cauchy. Infatti $||y^k - y^h|| = \frac{1}{h+1} \vee \frac{1}{k+1}$. Ma non converge in c_{00}: infatti se $||y^k - y|| \to 0$ allora $0 = \lim_k ||y^k - y||_\infty \geq |\frac{1}{n} - y_n|$ per ogni n, ossia $y_n = \frac{1}{n}$ e quindi $y \notin c_{00}$.

(3) Basta osservare che ogni $a = (a_n)_n \in c_0$ è il limite (rispetto alla norma del sup) della successione $(x_n)_n \subseteq c_{00}$ definita come $x_n = (a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots,)$.

Esempio 2.32. *Gli spazi l^p (vedi dispensa di Marigonda).*

Esercizio 2.33. Provare che c_{00} é denso in l^p per ogni $1 \leq p < +\infty$.

Risoluzione: Poiché l^p é uno spazio di Banach, vale che $\overline{c_{00}}^{l^p} \subseteq l^p$. Per concludere basta osservare che ogni $x = (x_n)_n \in l^p$ è il limite (rispetto alla norma $\| \cdot \|_p$) della successione $(x^{(n)})_n \subseteq c_{00}$ definita come $x^{(n)} = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots,)$. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x||_p = (\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$$

grazie al criterio di Cauchy per le serie convergenti.

2.5. **Esempi di spazi di funzioni.**

Definizione 2.34. *Sia X un insieme, $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazio normato e $f : X \to Y$. Si dice che f è* **limitata** *se esiste $M \geq 0$ tale che*

$$|f(x)|_Y \leq M \ \forall x \in X.$$

Proposizione 2.35. *Sia X un insieme, $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazio normato e sia*

$$B(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ limitata}\}.$$

Allora $B(X,Y)$ è uno spazio vettoriale su K (con l'usuale somma e moltiplicazione per uno scalare) e

$$||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|_Y$$

è una norma su $B(X,Y)$ (detta la norma del sup). Inoltre

$$(B(X,Y), ||\cdot||_\infty) \text{ è completo } \iff (Y, |\cdot|_Y) \text{ è completo.}$$

Dimostrazione. Proviamo solo l'equivalenza finale. "$\Longleftarrow$": Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy in $B(X,Y)$. Poiché

$$|f_n(x) - f_m(x)|_Y \le ||f_n - f_m||_\infty$$

si ha che $(f_n(x))_n$ è una successione di Cauchy in Y per ogni $x \in X$. Quindi per ogni $x \in X$ esiste un unico $f(x) \in Y$ tale che $|f_n(x) - f(x)|_Y \to 0$ quando $n \to \infty$. Facciamo vedere che f_n converge a f in $(B(X,Y), ||\cdot||_\infty)$. Sia $\epsilon > 0$ e $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||f_n - f_m||_\infty \le \epsilon$$

per ogni $n, m \ge \nu_0$. Allora per ogni $x \in X$ e per ogni $n, m \ge \nu_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)|_Y \le ||f_n - f_m||_\infty \le \epsilon. \tag{2.1}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ in (2.1) si ottiene che per ogni $x \in X$

$$|f(x) - f_m(x)|_Y \le \epsilon \quad \forall m \ge \nu_0$$

ossia

$$||f - f_m||_\infty \le \epsilon \quad \forall m \ge \nu_0.$$

Da quest'ultima relazione segue che $f = (f - f_m) + f_m \in B(X,Y)$ e che $(f_n)_n$ converge a f.

"$\Longrightarrow$": Se $(y_n) \subseteq Y$ è una successione di Cauchy, è facile provare che la successione di funzioni costanti $f_n : X \to Y$ definite come $f_n \equiv y_n$ è una successione di Cauchy in $B(X,Y)$ e quindi converge a una funzione f anche essa costante, ossia esiste $y_0 \in Y$ tale che $f(x) = y_0$ per ogni $x \in X$. Segue facilmente che y_n converge a y_0 in Y. □

Proposizione 2.36. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $(Y, |\cdot|_Y)$ uno spazi normato. Sia*

$$C_b(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ limitata e continua}\}.$$

Allora $C(X,Y)$ è uno sottospazio vettoriale chiuso di $(B(X,Y), ||\cdot||_\infty)$. In particolare

$$(C_b(X,Y), ||\cdot||_\infty) \text{ è completo } \iff (Y, |\cdot|_Y) \text{ è completo.}$$

.

Dimostrazione. Proviamo che $(C_b(X,Y), ||\cdot||_\infty)$ è un sottospazio chiuso di $(B(X,Y), ||\cdot||_\infty)$. Sia $(f_n)_n \subseteq C_b(X,Y)$ convergente a $f \in B(X,Y)$ rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$ e sia $x_0 \in X$. Allora

$$|f(x) - f(x_0)|_Y \le |f(x) - f_n(x)|_Y + |f_n(x) - f_n(x_0)|_Y + |f_n(x_0) - f(x_0)|_Y.$$

Sia ora $\epsilon > 0$ e $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||f_n - f||_\infty \le \frac{\epsilon}{3}$$

per ogni $n \geq \nu_0$. Allora scegliendo $n \geq \nu_0$ si ha che

$$|f(x) - f(x_0)|_Y \leq |f_n(x) - f_n(x_0)|_Y + \frac{2}{3}\epsilon.$$

Sfruttando la continuità di f_n in x_0, si ha che esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora

$$|f_n(x) - f_n(x_0)|_Y < \frac{1}{3}\epsilon.$$

Otteniamo così che se $|x - x_0| < \delta$ allora

$$|f(x) - f(x_0)|_Y \leq \epsilon.$$

Quindi f è continua in ogni $x_0 \in X$, ossia $f \in C_b(X, Y)$. In particolare, se Y è completo, allora $(C_b(X, Y), ||\cdot||_\infty)$ è completo, essendo un sottospazio chiuso di $(B(X, Y), ||\cdot||_\infty)$. Per provare il viceversa, procedere come nella dimostrazione della proposizione precedente. □

Osservazione 2.37. Dalla proposizione precedente segue che

(1) se una successione di funzioni continue e limitate $f_n : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ converge uniformemente ad una funzione f allora f è continua e limitata;

(2) se (X, τ) è uno spazio topologico compatto (o sequenzialmente compatto) ed $f : X \to \mathbb{R}$ è continua (rispettivamente sequenzialmente continua), allora f è limitata (per il teorema di Weistrass generalizzato, applicato alla funzione reale e continua $||f||_Y$, vedi Corollari 1.38 e 1.40). Pertanto lo spazio

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ continua}\} \equiv C_b(X, \mathbb{R}),$$

ed è uno spazio di Banach munito della norma $||\cdot||_\infty$.

(3) usando lo spazio delle funzioni continue proviamo che uno spazio X ha dimensione infinita potrebbe risultare completo rispetto ad una norma e non completo rispetto ad un'altra. In tal caso le norme su X non risultano essere equivalenti (vedi Osservazione 2.14). Si consideri per esempio lo spazio $X = C^0[-1, 1]$: esso è completo rispetto alla norma del sup. Non è invece completo rispetto alla norma $||u||_1 = \int_{-1}^{1} |u(x)|dx$. Infatti si prenda la successione

$$u_n(x) = \begin{cases} nx & se\ |nx| \leq 1 \\ 1 & se\ x \geq \frac{1}{n} \\ -1 & se\ x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}.$$

Per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha che $u_n(x)$ converge a $v(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$.

Utilizzando il teorema di Lebesgue è facile verificare che $(u_n)_n$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Altrimenti si osservi che

$$\int_{-1}^{1} |u_n(x) - u_m(x)|dx \leq \int_{-1}^{1} |u_n(x) - v(x)|dx + \int_{-1}^{1} |u_m(x) - v|dx$$

$$\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{0} |nx + 1|dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |1 - nx|dx + \int_{-\frac{1}{m}}^{0} |mx + 1|dx + \int_{0}^{\frac{1}{m}} |1 - mx|dx \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Se (u_n) convergesse rispetto alla norma $||\cdot||_1$ ad una funzione $w \in C[-1,1]$ allora

$$\int_0^1 |1-w(x)|dx \leq \int_0^1 |u_n(x)-1|dx + \int_0^1 |w(x)-u_n(x)|dx \leq \frac{1}{n} + \int_{-1}^1 |w(x)-u_n(x)|dx$$

e passando al limite per $n \to \infty$, otterremmo

$$\int_0^1 |1-w(x)|dx = 0.$$

Analogamente

$$\int_{-1}^0 |-1-w(x)|dx = 0.$$

Così avremmo $w(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$. Assurdo.

Osservazione 2.38. Sia $C^1[a,b]$ lo spazio delle funzioni continue con derivata continua su $[a,b]$. Osserviamo che $C^1[a,b]$ non è chiuso rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$. Infatti, si consideri la successione $u_n(x) := \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n^2}}$ e sia $u(x) := |x-\frac{1}{2}|$. Allora $u_n \in C^1[0,1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $||u_n - u||_\infty \to 0$ ma $u \notin C^1[0,1]$.

Esercizio 2.39.
(1) Per ogni $u \in C^1[a,b]$ sia $||u||_{C^1} := ||u||_\infty + ||u'||_\infty$. Provare che $||\cdot||_{C^1}$ è una norma che rende lo spazio $C^1[a,b]$ uno spazio di Banach.
(2) Per ogni $u \in C^1[a,b]$ sia $||u||_a = |u(a)| + ||u'||_\infty$. Verificare che $\|\cdot\|$ è una norma che rende lo spazio $C^1[a,b]$ uno spazio di Banach. La norma $||\cdot||_a$ è equivalente alla norma $||\cdot||_{C^1}$?
(3) Sia K un compatto di $\mathbb{R}$ aventi N componenti connesse $(C_k)_{1\leq k\leq N}$. Sia $a_k \in C_k$ per ogni k. Per ogni $u \in C^1(K)$ sia $|||u||| = \sum_{i=1}^k |u(a_i)| + ||u'||_\infty$. Verificare che $|||\cdot|||$ è una norma equivalente alla norma $||\cdot||_{C^1}$.

Esempio 2.40. Se lo spazio non è di dimensione finita, dal Teorema di Riesz segue che le palle chiuse non possono essere compatte: per esempio si consideri $X = C[0,1]$ munito della norma del sup e sia $f_n(x) = x^n$. È facile dimostrare che $\|f_n\|_\infty = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che la successione $(f_n)_n$ non ammette successioni estratte convergenti rispetto alla norma del sup.

Esercizio 2.41. Per ogni $u \in C^2[0,1]$ si definisca $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$. Dimostrare che $\|\cdot\|$ definisce una norma che rende $C^2[0,1]$ uno spazio di Banach.

2.6. **Appendice: Teorema di Ascoli–Arzelá.** Abbiamo visto che in generale i sottoinsiemi chiusi e limitati dello spazio delle funzioni continue non sono compatti. Il seguente teorema stabilisce che i sottoinsiemi limitati ed equicontinui di $C(K)$ (dove K è un compatto di $\mathbb{R}^N$) sono precompatti rispetto alla convergenza uniforme.

Teorema 2.42. *Sia $u_h : K \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni definite in un compatto $K \subset \mathbb{R}^N$. Supponiamo che:*

i) *la successione $\{u_h\}_h$ sia equilimitata: ossia esista $M > 0$ tale che*

$$|u_h(x)| \leq M\ \forall\, x \in K;\ \forall\, h \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

ii) *la successione* $\{u_h\}_h$ *sia equicontinua: ossia* $\forall \varepsilon > 0$ *esiste* $\delta_\varepsilon > 0$ *tale che* $\forall\, x, y \in K$ *con* $|x-y| < \delta_\varepsilon$ *e* $\forall\, h \in \mathbb{N}$ *si abbia:*

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq \varepsilon \tag{2.3}$$

Allora esiste una sottosuccessione di $\{u_h\}_h$ *che converge uniformemente in* K*.*

Dimostrazione.
1^0 **passo: procedimento diagonale.** Sia $D \subseteq K$ un sottoinsieme numerabile denso di K e supponiamo che

$$D = \{x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots\}$$

La successione di numeri reali $\{u_h(x_1)\}_h$ è limitata per la (2.2) e quindi contiene una sottosuccessione convergente. In particolare è possibile trovare una successione crescente di naturali che indicheremo con $\{h_k^{(1)}\}_k$ e $c_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(1)}}(x_1) = c_1$$

Consideramo ora la successione

$$u_{h_k^{(1)}}(x_2)$$

Sempre per l'ipotesi (2.2), tale successione è limitata e quindi posso trovare una nuova successione crescente di naturali $\{h_k^{(2)}\}_k \subseteq \{h_k^{(1)}\}_k$ e $c_2 \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(2)}}(x_2) = c_2$$

Essendo, per la scelta fatta di $\{h_k^{(2)}\}_k$, $\{u_{h_k^{(2)}}(x_1)\}_k$ una sottosuccessione di $\{u_{h_k^{(1)}}(x_1)\}_k$, risulta pure

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(2)}}(x_1) = c_1$$

Procedendo in questa maniera, per ogni numero naturale $s \in \mathbb{N}$, posso costruirmi una successione crescente di naturali $\{h_k^{(s)}\}_k$ sottosuccessione di $\{h_k^{(s-1)}\}_k$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(s)}}(x_s) = c_s$$

Essendo per costruzione

$$\{h_k^{(s)}\}_k \subseteq \{h_k^{(s-1)}\}_k \subseteq \ldots \subset \{h_k^{(2)}\}_k \subseteq \{h_k^{(1)}\}_k$$

risulta

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k^{(s)}}(x_j) = c_j \;\forall\, j = 1, 2, \ldots, s$$

Abbiamo quindi costruito la seguente matrice infinita di numeri naturali

$$\begin{array}{cccccc}
n=1 & h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \ldots & h_s^{(1)} & \ldots \\
\\
n=2 & h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & \ldots & h_s^{(2)} & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
n=s & h_1^{(s)} & h_2^{(s)} & \ldots & h_s^{(s)} & \ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

dove ogni riga è costituita da una successione crescente di naturali e ogni riga è contenuta nella riga precedente. Se consideriamo ora la successione diagonale di tale matrice, ossia la successione

$$h_k = h_k^{(k)} \ k \in \mathbb{N}$$

ottengo una successione crescente di naturali tale che

$$h_k \in \{h_j^{(s)},\ j \in \mathbb{N}\} \ \ \forall\, k \geq s$$

Ne deriva quindi che $\forall\, s \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k\to\infty} u_{h_k}(x_s) = c_s \ \forall\, s \in \mathbb{N}$$

2^0 **passo.** Verifichiamo che la successione $\{u_{h_k}\}_k$, sottosuccessione di $\{u_h\}_h$, converge uniformemente in K provando che è di Cauchy in $C(K)$.
Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \delta_\varepsilon$ la costante che compare nell'ipotesi (2.3). Essendo D denso in K, risulta

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} B_\delta(x_s)$$

Essendo K un insieme compatto, esiste un numero finito di elementi di D: $\{x_1, x_1, \ldots, x_p\}$, tali che:

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{p} B_\delta(x_s)$$

Siccome la successione $\{u_{h_k}(x_s)\}_k$ è convergente $\forall\, s \in \mathbb{N}$ e quindi di Cauchy, posso trovare un numero ν_ε tale che:

$$\left|u_{h_k}(x_s) - u_{h_{k'}}(x_s)\right| < \varepsilon \ \ \forall\, k, k' > \nu_\varepsilon, \ \ \forall\ s = 1, 2, \ldots, p \tag{2.4}$$

Fissato infine $x \in K$ e scelto $s_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tale che $x \in B_\delta(x_{s_0})$, possiamo scrivere:

$$\left|u_{h_k}(x) - u_{h_{k'}}(x)\right| \leq |u_{h_k}(x) - u_{h_k}(x_{s_0})| + \left|u_{h_k}(x_{s_0}) - u_{h_{k'}}(x_{s_0})\right| + \left|u_{h_{k'}}(x_{s_0}) - u_{h_{k'}}(x)\right|$$

Ne possiamo concludere, usando le (2.4), (2.3), che :

$$\left|u_{h_k}(x) - u_{h_{k'}}(x)\right| \leq 3\,\varepsilon.$$

□

3. **Gli operatori lineari e continui.**

In generale gli operatori lineari da uno spazio di dimensione finita su uno spazio normato qualunque sono funzioni continue. Vale infatti:

Proposizione 3.1. *Sia X uno spazio vettoriale normato su K di dimensione finita e Y un altro spazio vettoriale normato. Sia $T : X \to Y$ lineare. Allora T è continuo.*

Dimostrazione. Sia $dim_K X = N$ e sia $(e_1, \cdots, e_N)$ una base canonica di X. Muniamo X della norma $|\cdot|$ definita in Proposition 2.21. Allora per ogni $v \in X$, $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$ si ha che

$$||T(v)||_Y = ||\sum_{i=1}^N v_i T(e_i)||_Y \leq C|v|$$

dove $C = \sup_{1 \leq i \leq N} T(e_i)$. In particolare per ogni $v, w \in X$,

$$||T(v) - T(w)||_Y = ||T(v-w)||_Y \leq C|v-w|$$

e quindi T è continuo essendo una funzione lipschitziana da X in Y. □

Osservazione 3.2. *Il risultato della proposizione precedente non vale se X ha dimensione infinita e Y è di dimensione finita. Vedi l'esempio seguente in cui $Y = \mathbb{R}$.*

In generale le applicazioni lineari tra spazi di dimensione infinita possono non essere continue.

Esempio 3.3. Sia $X = C[0,1]$ e si considerino le due norme $||u||_1 := \int_0^1 |u(x)|dx$ e $||u||_\infty := \max_{[0,1]} |u(x)|$. Sia $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definito da $T(u) = u(1)$. È facile verificare che T è lineare, continuo su $(X, ||\cdot||_\infty)$ ma non continuo su $(X, ||\cdot||_1)$. Infatti sia $u_n(x) = x^n$. Allora $||u_n||_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ mentre $T(u_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $(T(u_n))_n$ non converge a $T(0)$.

La seguente proposizione caratterizza i funzionali lineari e continui definiti su un spazio normato. L'ultima proprietà è quella che si utilizza concretamente per verificare che un funzionale lineare è continuo.

Proposizione 3.4. *Siano X, Y due spazi vettoriali normati su K e sia $T : X \to Y$ lineare. Allora sono equivalenti le seguenti relazioni:*

(1) *T è continuo;*
(2) *T è continuo in 0;*
(3) *T è limitato in un intorno di 0;*
(4) *$\exists C > 0$ tale che $||T(x)||_Y \leq C||x||_X$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. (1)$\Longrightarrow$ (2) ovvia;

(2)$\Longrightarrow$ (3) ovvia;

(3)$\Longrightarrow$ (4) Sia T limitato in un intorno U di 0, ossia supponiamo che esiste $c > 0$ tale che $||T(x)||_Y \leq c$ per ogni $x \in U$. Sia $\overline{B_X(0,r)} \subseteq U$. Allora per ogni $x \in X$ vale che $||r\frac{x}{||x||}||_X \leq r$; segue che $||T(r\frac{x}{||x||_X})||_Y \leq c$ ossia $||T(x)||_Y \leq \frac{c}{r}||x||_X$ ossia, posto $C = \frac{c}{r}$, vale che

$$||T(x)||_Y \leq C||x||_X \quad \forall\, x \in X.$$

(4)$\Longrightarrow$ (1) Per ogni $x, y \in X$ vale che

$$||T(x) - T(y)||_Y = ||T(x-y)||_Y \leq C|x-y|$$

e quindi T è continuo essendo una funzione lipschitziana da X in Y. $\square$

Nel caso in cui $Y = K$ si ha la seguente caratterizzazione:

Proposizione 3.5. *Siano X uno spazio vettoriale normato su K e sia $T : X \to K$ lineare, $T \neq 0$. Allora sono equivalenti le seguenti relazioni:*

(1) *T è continua;*
(2) *$kerT$ è chiuso;*
(3) *$kerT$ non è denso;*
(4) *T è limitato in un intorno di 0;*
(5) *T è continua in 0;*
(6) *$\exists C > 0$ tale che per ogni $x \in X$*

$$|T(x)| \leq C||x||_X$$

Dimostrazione. Per semplicità dimostriamolo solo nel Caso $K = \mathbb{R}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Essendo T continua $kerT = T^{-1}(0)$ è chiuso.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Basta osservare che $\overline{kerT} = kerT \neq X$.

(3)$\Longrightarrow$ (4) Per ipotesi $\overline{kerT} \neq X$. Allora esiste $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \ ||x - x_0||_X < r\}$ tale che $B_X(x_0, r) \subseteq X \setminus \overline{kerT}$. Per assurdo supponiamo che $T(B_X(0, r))$ non è un sottoinsieme limitato di K. Allora $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, y_n \in \mathbb{R}^+$ ed $\exists\, x_n \in B_X(0, r)$ tali che $y_n \to +\infty$ e $|T(x_n)| = y_n$. A meno di sostituire x_n con $-x_n$, supponiamo che $|T(x_n)| = T(x_n) = y_n$. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $[-y_n, y_n] \subseteq T(B_X(0, r))$: infatti se $s \in [-y_n, y_n]$ esiste $\theta \in [0, 1]$ tale che

$$s = -\theta y_n + (1-\theta)y_n = -\theta T(x_n) + (1-\theta)T(x_n) = T(-\theta x_n + (1-\theta)x_n) \in T(B_X(0, r))$$

in quanto x_n e $-x_n$ appartengono all'insieme convesso $B_X(0, r)$. In particolare segue che $\mathbb{R} = \bigcup_n [-y_n, y_n] \subseteq T(B_X(0, r))$ e quindi esiste $x \in B_X(0, r)$ tale che $T(x) = -T(x_0)$. Segue che $T(x+x_0) = 0$ che è assurdo in quanto $x+x_0 \in B_X(x_0, r) \subseteq X \setminus kerT$. Infine le implicazioni (4)$\Longleftrightarrow$ (5) $\Longleftrightarrow$ (6)$\Longleftrightarrow$(1) seguono dalla proposizione precedente. $\square$

Applicando la proposizione precedente, si provi il seguente lemma (che utilizzeremo per dimostrare il Teorema di H.B.)

Esercizio 3.6. Sia X uno spazio normato. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ lineare e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora f è continuo se e solo se l'iperpiano $\{x \in X : \ f(x) = \alpha\}$ è chiuso.

3.1. **La norma di un operatore.** Siano X, Y due spazi vettoriali normati su K. Indichiamo con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio vettoriale dei funzionali $T : X \to Y$ lineari e continui. Se $Y = K$ indichiamo con $X' = \mathcal{L}(X, K)$ e se $Y = X$ indichiamo con $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.
Grazie alla Proposizione 3.4, sappiamo che, assegnato $T \in L(X, Y)$, allora

$$T \in \mathcal{L}(X, Y) \Longleftrightarrow \exists\, C > 0 \ : \ \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{|x|_X} \leq C < +\infty.$$

Poniamo
$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$
È facile provare che $||\cdot||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è una norma su $\mathcal{L}(X,Y)$.

Inoltre
$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y.$$
Infatti banalmente
$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq \sup_{\|x\|_X\leq 1} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \geq \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y \geq \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y.$$
D'altra parte per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x_\epsilon \in X$ tale che
$$\frac{\|T(x_\epsilon)\|_Y}{\|x_\epsilon\|_X} \geq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} - \epsilon.$$
In particolare
$$\sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y \geq |T(\frac{x_\epsilon}{\|x_\epsilon\|_X})|_Y = \frac{\|T(x_\epsilon)\|_Y}{\|x_\epsilon\|_X} \geq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} - \epsilon.$$
Per $\epsilon \to 0$ si ottiene che
$$\sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y \geq ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$
Se $Y = \mathbb{R}$ si osservi che allora
$$||T||_{X'} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \frac{T(x)}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} T(x) = \sup_{\|x\|_X=1} T(x)$$
in quanto per ogni $x \in X$ $|T(x)| = \max\{T(x), -T(x)\} = \max\{T(x), T(-x)\}$. Quindi il sup della funzione $|T(x)|$ nei vari casi coincide con il sup della funzione $T(x)$.

Osservazione 3.7. Sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Per provare che $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = C$ occorre provare le seguenti due relazioni:

(1) $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ per ogni $x \in X$

(equivalentemente $\|T(x)\|_Y \leq C$ per ogni $x \in X$ tale che $\|x\|_X \leq 1$).

Questo implica che $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C$.

(2) $\exists (x_n)_n \subseteq X$ tale che $\|x_n\|_X \leq 1$ e $\sup_n \|T(x_n)\|_Y \geq C$

(oppure $\exists (x_n)_n \subseteq X$ tale che $\|x_n\|_X \leq 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y \geq C$).

Questo implica che $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq C$.

In alcuni casi la (2) viene garantita dal fatto che la norma viene raggiunta, ossia dal fatto che $\exists\, \bar{x}$ tale che $\|\bar{x}\|_X \leq 1$ e $\|T(\bar{x})\| = C$.

Proposizione 3.8. *Siano X, Y due spazi vettoriali normati su K. Allora $||\cdot||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è una norma su $\mathcal{L}(X,Y)$ e se Y è uno spazio completo, anche $\mathcal{L}(X,Y)$ munito della norma $||\cdot||_{\mathcal{L}(X,Y)}$ è uno spazio completo.*

Dimostrazione. Sia $(T_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$. Poichè

$$|T_n(x) - T_m(x)|_Y \leq ||T_n - T_m||_{\mathcal{L}(X,Y)}|x|_X$$

si ha che $(T_n(x))_n$ è una successione di Cauchy in Y per ogni $x \in X$. Quindi per ogni $x \in X$ esiste un unico $T(x) \in Y$ tale che $|T_n(x) - T(x)|_Y \to 0$ quando $n \to \infty$. È facile verificare che T è lineare. Proviamo che T_n converge a T in $\mathcal{L}(X,Y)$ e che T è continuo. Sia $\epsilon > 0$ e $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||T_n - T_m||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon$$

per ogni $n, m \geq \nu_0$. Allora per ogni $x \in X$ con $|x| \leq 1$ e per ogni $n \geq \nu_0$

$$|T_n(x) - T_m(x)|_Y \leq ||T_n - T_m||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon. \tag{3.1}$$

Per $m \to \infty$ si ottiene cosí che per ogni $n \geq \nu_0$

$$\sup_{B_X} |T_n(x) - T(x)|_Y \leq \epsilon$$

ossia $T - T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ per ogni $n \geq \nu_0$ da cui $T = (T - T_n) + T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. Inoltre

$$||T - T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \epsilon \quad \forall n \geq \nu_0.$$

Da quest'ultima relazione segue che $(T_n)_n$ converge a T in $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Osserviamo anche che vale anche un vicevera del teorema precedente:

Teorema 3.9. Siano X, Y due spazi normati tale che $X' \neq \{0\}$. Se $\mathcal{L}(X,Y)$ è uno spazio completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ allora Y è uno spazio completo.

Dimostrazione. Si fissi $f \in X'$ $f \neq 0$. Sia $(y_n)_n \in Y$ una successione di Cauchy e sia $(T_n)_n$ la successione di funzionali lineari e continui $T_n : X \to Y$ definiti da $T_n(x) = f(x)y_n$. Si provi che $(T_n)_n$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$. Esiste quindi $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. In particolare scelto x tale che $f(x) \neq 0$ si ha che $f(x)y_n = T_n(x) \to T(x)$ ossia $y_n \to (f(x))^{-1}T(x)$. □

Osservazione 3.10. Grazie al teorema di Hahn-Banach, l'ipotesi $X' \neq \{0\}$ nel teorema 3.9 può essere sostituita dalla condizione piu' naturale che $X \neq \{0\}$.

Osservazione 3.11. Si osservi che se $||T_n - T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ allora per ogni $x \in X$ vale che $T_n(x) \to T(x)$ ma non vale il viceversa. Sia infatti $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$ definito come $T_n(x) = x_n$ per ogni $x = (x_n)_n \in c_0$. Allora $T_n(x) \to 0$ per ogni $x \in c_0$ ma $||T_n - 0||_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1 \not\to 0$.

3.2. **Esercizi.**

Esercizio 3.12. Sia $m \in C[a,b]$ e sia $T_m : C[a,b] \to C[a,b]$ che a u associa la funzione

$$T_m(u) : [a,b] \to \mathbb{R}$$

cosí definita:

$$T_m(u)(x) = u(x)m(x).$$

Sia
$$||T_m|| := \sup_{u\in C[a,b], u\neq 0} \frac{||T_m(u)||_\infty}{||u||_\infty} = \sup_{u\in C[a,b], ||u||_\infty\leq 1} ||T_m(u)||_\infty.$$
Provare che
$$||T_m|| = ||m||_\infty.$$
Infatti, osserviamo che
$$|T_m(u)(x)| = |m(x)u(x)| \leq ||m||_\infty ||u||_\infty$$
e quindi
$$||T_m(u)||_\infty \leq ||m||_\infty ||u||_\infty$$
quindi $||T_m|| \leq ||m||_\infty$. Viceversa sia $\bar{u}(x) = 1$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora $||\bar{u}||_\infty = 1$ e
$$||T_m(\bar{u})||_\infty = ||m||_\infty.$$

Esercizio 3.13. Siano X, Y due spazi vettoriali normati su K e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Provare che
$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \min\{M \geq 0 : \ |T(x)|_Y \leq M|x|_X \ \forall x \in X\}.$$

Esercizio 3.14. Siano X, Y, Z tre spazi vettoriali normati su K e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Provare che
$$||ST||_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq ||S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$
In particolare se $X = Y = Z$ allora
$$||T^n||_{\mathcal{L}(X,X)} \leq ||T||^n_{\mathcal{L}(X,X)}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(Osservare inoltre che in generale $||ST||_{\mathcal{L}(X,Z)} < |S||_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot ||T||_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Si considerino infatti le proiezioni $P_1(x,y) = (x,0))$ e $P_2(x,y) = (0,y)$ definite da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$...)

Osservazione 3.15. Se lo spazio X è infinito dimensionale, non sempre la norma di un funzionale su X è raggiunta, ossia in generale non esiste il $\max_{|x|\leq 1} |T(x)|_Y$. Consideriamo su c_0 la norma del sup. Sia $T : c_0 \to \mathbb{R}$ cosí definito: per ogni $a = (a_n) \in c_0$
$$T(a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$
Proviamo che T è lineare e continuo con $\boxed{||T|| = e - 1}$. Infatti,
$$|T(a)| \leq \|a\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-1)\|a\|_\infty.$$
Inoltre se $x_k = (x_n^k)_n \in c_0$ cosí definita $x_n^k = 1$ se $n \leq k$, $x_n^k = 0$ altrimenti. Allora $\|e_k\|_\infty = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $T(e_k) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} \to e - 1$ per $k \to \infty$.

Dimostriamo che non esiste alcun $a \in c_0$ con $||a||_\infty = 1$ tale che $|T(a)| = e - 1$. Se esistesse $a \in c_0$ con $||a||_\infty = 1$ tale che $|T(a)| = e - 1$ allora esisterebbe $b \in \{a, -a\}$ tale che $T(b) = e - 1$. Dall'uguaglianza
$$e - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

segue che

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-b_n}{n!}.$$

Poichè $b_n \in [-1,1]$, abbiamo una serie a termini positivi la cui somma è zero. Allora ogni termine deve essere nullo, ossia $b_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Assurdo.

Esercizio 3.16. Sia c_0 munito della norma del sup. Sia $T_k : c_0 \to c_0$ tale che $T_k(x) = (x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

(1) Provare che T_k è un operatore lineare e continuo per ogni k;
(2) calcolare la norma di T_k;
(3) provare che $|T_k(x)|_{c_0} \to 0$ quando $k \to \infty$;
(4) $T_k \to 0$ in c_0'?

Esercizio 3.17. Sia $X = C[0,1]$ munito della norma del massimo. Sia

$$T(u)=\int_0^1 u(x)dx-u(1).$$

Verificare che T è un funzionale lineare e continuo di norma 2. Provare che non esiste $u \in X$ di norma unitaria tale che $T(u) = 2$.

Risoluzione: si verifica facilmente che T è un funzionale lineare. Inoltre per ogni $u \in C^0[0,1]$ $||T(u)||_\infty \leq ||u||_\infty + |u(1)| \leq 2||u||_\infty$. Quindi $||T|| \leq 2$. Per dimostrare che $||T|| = 2$ proviamo che esiste una successione $(u_n) \subseteq C^0[0,1]$ tale che $||u||_\infty = 1$ e $\lim_n |T(u_n)| = 2$. Sia

$$u_n(x)=\begin{cases}1 & se\ 0\leq x\leq 1-\frac{1}{n}\\ -nx+n-1 & se\ 1-\frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}.$$

Allora

$$T(u_n)=1-\frac{1}{n}+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}(-nx+n-1)dx+1=2-\frac{1}{n}$$

che tende a 2 per $n \to \infty$.

Esercizio 3.18. Per ogni $n, \in N$ sia $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ dove X, Y sono spazi normati e assumiamo che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. Mostrare che se $x_n \to x$ in X allora $T_n(x_n) \to T(x)$ in Y.

Esercizio 3.19. Sia T : $c_0 \to c_0$ (dove c_0 denota lo spazio di Banach delle successioni infinitesime, dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$) l'operatore lineare definito da

$$T(x)=(x_n-x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

(1) Provare che T è continuo e calcolarne la norma;

(2) Per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ sia

$$||x||_T=\|Tx\|_\infty+||x||_\infty.$$

Si verifichi che $\|\cdot\|_T$ è una norma equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.

(3) dimostrare che T è iniettivo;

(4) stabilire se T è suriettiva su c_0. In caso contrario determinare l'insieme $T(c_0)$.

Esercizio 3.20. Sia c_0 lo spazio delle successioni reali che tendono a 0. Muniamo c_0 della norma del sup. Sia $T : c_0 \to \mathbb{R}$

$$T((a_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

Dimostrare che T è continuo e calcolare la norma. Esiste un elemento $a \in c_0$ tale che $||a||_\infty = 1$ e $T(a) = 2$?

Esercizio 3.21. Siano $f_n \in C(K)$ dove K è un compatto di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $f_n \to f$ rispetto alla norma del sup. Allora

(1) $|f_n| \to |f|$ rispetto alla norma del sup;
(2) per ogni $(x_n) \subseteq K$ se $x_n \to x_0$ allora $f_n(x_n) \to f(x_0)$;
(3) se $f_n(x_n) = \min_K f_n$ e $x_n \to x_0$ allora $f(x_0) = \min_K f$;
(4) se $f_n(x_n) = \max_K f_n$ e $x_n \to x_0$ allora $f(x_0) = \max_K f$.

Esercizio 3.22. Siano $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ due spazi normati e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Provare che l'applicazione $||\cdot||_T : X \to \mathbb{R}$ definita da

$$||x||_T := \|Tx\|_Y + ||x||_X$$

è una norma su X. Dimostrare inoltre che tale norma è equivalente alla norma $\|\cdot\|_X$ se e solo se T è continuo da $(X, ||\cdot||_X)$ in $(Y, ||\cdot||_Y)$.

Esercizio 3.23. Siano X, Y spazi normati e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Dimostrare che $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ se e solo se $T(A)$ è limitato in Y per ogni sottoinsieme limitato $A \subseteq X$.

Esercizio 3.24. Sia $T : X \to Y$ un funzionale lineare e iniettivo. Allora si ha che l'operatore inverso $T^{-1} : T(X) \to X$ è continuo $\iff \inf\{||T(x)||_Y : \ |x| = 1\} = \alpha > 0$. In tal caso $||T^{-1}||_{(T(X),Y)} = \frac{1}{\alpha}$.

Esercizio 3.25. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un funzionale lineare la cui matrice associata $A = (a_{ij})$ sia diagonale. Dimostrare che $||T|| = \sup\{|a_{ii}| : 1 \leq i \leq n\}$.

Esercizio 3.26. Sia $X = C^0[0,1]$ munito della norma del massimo. Sia $x_0 \in (0,1)$ e sia

$$T_{x_0}(u) = u(x_0) - \int_0^1 u(x)dx.$$

Verificare che T_{x_0} è un funzionale lineare e continuo di norma 2. Esiste $u \in X$ tale che $||u||_\infty = 1$ e $T_{x_0}(u) = 2$?

Esercizio 3.27. Sia $X = C^1[0,1]$ munito della norma del massimo e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$T_n(u) = \int_0^1 u(x)dx - \frac{1}{n}u(1)$$

Verificare che T_n è un funzionale lineare e continuo di norma $1 + \frac{1}{n}$. Dimostrare che T_n converge nella norma di X' all'operatore $T(u) = \int_0^1 u(x)dx$.

Esercizio 3.28. (**Serie di Neumann**) Sia $(X, |\cdot|)$ uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $||T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Allora

(1) la successione $(S_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X)$ definita da $S_k(x) = \sum_{k=0}^{n} T^k(x)$ dove
$$\begin{cases} T^k(x) = T(T^{k-1}(x)) & \forall k \geq 2 \\ T^0(x) = x,\ T^1(x) = T(x) \end{cases}$$
converge (nella norma di $\mathcal{L}(X)$) all'operatore $S \in \mathcal{L}(X)$ dato da
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(x);$$
(2) l'operatore $I - T$ ha inverso continuo dato da S;
(3) $||I - T||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1-||T||_{\mathcal{L}(X)}}$.

Dimostrazione.

(1) Osserviamo che per ogni $x \in X$ e per ogni $k \geq 2$
$$|T^k(x)| = |T(T^{k-1}(x))| \leq ||T||_{\mathcal{L}(X)}|T^{k-1}(x)|$$
e procedendo per induzione si ottiene che
$$|T^k(x)| \leq ||T||^k_{\mathcal{L}(X)}|x|.$$
In particolare
$$||T^k||_{\mathcal{L}(X)} \leq ||T||^k_{\mathcal{L}(X)}.$$
Poichè $||T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$ la serie geometrica
$$\sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k_{\mathcal{L}(X)}$$
converge e quindi anche la la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} ||T^k||_{\mathcal{L}(X)}$$
converge. In particolare si ha che $\lim_{n\to\infty} ||T^n||_{\mathcal{L}(X)} = 0$ e dal criterio di Weirstrass per le serie (Teorema 2.8) otteniamo che $||S_n - S||_{\mathcal{L}(X)} \to 0$. Segue cosí che per ogni $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = 0$$
(essendo $\lim_{n\to\infty} |T^n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} ||T^n||_{\mathcal{L}(X)}|x| = 0$) e
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$
(essendo $\lim_{n\to\infty} |S_n(x) - S(x)| \leq \lim_{n\to\infty} ||S_n - S||_{\mathcal{L}(X)}|x|$).

Inoltre, sempre dal criterio di Weirstrass per le serie,
$$||S||_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T^k||_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||T||^k_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{1 - ||T||_{\mathcal{L}(X)}}.$$

(2) Proviamo che $(I-T)S = I$ ossia che per ogni $x \in X$ $S(x) - T(S(x)) = x$. Infatti, essendo T continuo e lineare,

$$\begin{aligned} S(x) - T(S(x)) &= \lim_{n\to\infty} \big(\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - T(\sum_{k=0}^{n} T^k(x)) \big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1}(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} (T^0(x) - T^{n+1}(x) = x. \end{aligned}$$

Analogamente si prova la relazione $I = S(I-T)$.

Esercizio 3.29. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia inoltre X uno spazio di Banach e sia $T \in X'$ un operatore con norma $||T|| < R$. Si provi che

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ||T||^n \in \mathbb{R}$
(2) l'operatore $A : X \to \mathbb{R}$ definito da

$$A(v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n(v)$$

è ben definito, lineare e continuo, con norma

$$||A|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ||T||^n;$$

(3) $AT = TA$.

(si confronti con la serie di Neumann)

Esercizio 3.30. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che l'insieme

$$GL = \{T \in \mathcal{L}(X) : \exists\ T^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

è aperto in $\mathcal{L}(X)$.

Sia $T \in GL$. Sia G tale che $|T - G|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$ con ϵ da scegliere in modo che $G \in GL$. Ora

$$G \in GL \iff G = T + (G-T) = T \circ (I + T^{-1}(G-T)) \in GL \iff I + T^{-1}(G-T) \in GL.$$

Per l'esercizio precedente basta scegliere $\epsilon > 0$ in modo che $|T^{-1}(G-T)|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ ossia basta scegliere $\epsilon < \frac{1}{|T^{-1}|}$.

Esercizio 3.31. Sia l^∞ lo spazio delle successioni reali limitate e sia c_0 lo spazio delle successioni di numeri reali che sono infinitesime.

(1) Verificare che $||(a_n)_n||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ definisce una norma su l^∞ rispetto alla quale l^∞ è completo.
(2) Provare che c_0, munito della norma $||\cdot||_\infty$, é completo;
(3) sia c_{00} il sottospazio di X costituito dalle successioni $x = (x_n)_{n\in N}$ di numeri reali che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero, ovvero per le quali esiste un $N \in \mathbb{N}$ per cui $x_n = 0$ se $n > N$. Dimostrare che c_{00} non è completo rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$;

(4) Verificare che la chiusura di c_{00} rispetto alla norma del sup è lo spazio c_0.

Soluzione

(1) E' banale verificare che lo spazio $l^\infty = B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (attraverso la corrispondenza biunivoca che ad ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ associa la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$). Abbiamo già provato che $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ é uno spazio di Banach con la norma

$$||f||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

(2) Proviamo che c_0, munito di questa norma, è chiuso in l^∞. Seguirà che c_0 è completo. Sia $(a^{(k)})_k \subseteq c_0$ ($a^{(k)} = (a^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$) una successione convergente ad $a = (a_n)_n \in l^\infty$ e proviamo che $a \in c_{00}$: sia $\epsilon > 0$ e sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$||a^{(k)} - a||_\infty \leq \epsilon \quad \forall\, k \geq n_0(\epsilon).$$

In particolare, fissato $k \geq n_0(\epsilon)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ segue che

$$|a_n| \leq |a_n - a^k_n| + |a^k_n| \leq ||a - a^{(k)}||_\infty + |a^k_n| \leq \epsilon + |a^k_n|.$$

Mandando $n \to \infty$ otteniamo

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n| \leq \epsilon + \lim_{n\to\infty} |a^k_n| = \epsilon.$$

Per $\epsilon \to 0$ segue la tesi.

(3) Basta osservare che ogni $a = (a_n)_n \in c_0$ è il limite (rispetto alla norma del sup) della successione $(x^{(k)})_k \subseteq c_{00}$, $x^{(k)} = (x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita da $x^k_n := \begin{cases} a_n \text{ se } n \leq k \\ 0 \text{ se } n > k \end{cases}$. Infatti

$$||x^{(k)} - a||_\infty = \sup_{k\geq n+1} |a_k| \to 0 \quad \text{per } k \to \infty$$

in quanto $a \in c_0$.

(4) Sia $(x^{(k)})_k \subseteq c_{00}$ tale che $||x^{(k)} - a||_\infty \to 0$. Proviamo che $a \in c_0$. Allora

$$|a_n| \leq |a_n - x^k_n| + |x^k_n| \leq ||a - x^{(k)}||_\infty + |x^k_n|\; \forall\, k, n.$$

Fissato $\epsilon > 0$ esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq k_0$ vale $||a - x^{(k)}||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Poiché $x^{(k_0)} \in c_{00} \subseteq c_0$ allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|x^{k_0}_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $n \geq n_0$. In definitiva per ogni $n \geq n_0$ vale che

$$|a_n| \leq ||a - x^{(k_0)}||_\infty + |x^{k_0}_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

per ogni $n \geq n_0$.

Esercizio 3.32. Siano (X, τ) e $(Y, \mathcal{A})$ due spazi topologici. Supponiamo che (X, τ) sia $\mathcal{N}_1$ e $(Y, \mathcal{A})$ sia T_2, sia $D \subset X$ denso in X e siano $f, g : (X, \tau) \to (Y, \mathcal{A})$ due applicazioni continue tali che $f = g$ su D. Allora $f = g$ su X.

Risoluzione: Sia $x \in X$. Poiché $x \in \bar{D}$, per la Proposizione 1.16 esiste $(x_n) \subset D$ tale che $x_n \to x$. Poiché f, g sono continue vale che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. $\square$

4. **Teoremi di rappresentazione dei duali di l^p e $L^p(\Omega)$.**

Sia $1 \le p \le \infty$. Sia $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$ con p' (detto **coniugato** di p) definito da $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = 1$ se $p = \infty$). Allora per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, grazie alla disuguaglianza di Holder, si ha che

$$||(a_n b_n)_n||_{l^1} \le ||a||_{l^p} ||b||_{l^{p'}}.$$

Quindi l'operatore $T_b : l^p \to \mathbb{R}$ definito da

$$T_b(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

è ben posto ed è continuo con

$$||T_b||_{(l^p)'} \le ||b||_{l^{p'}}. \tag{4.1}$$

Il teorema seguente afferma che la norma di T_b in $(l^p)'$ é esattamente la norma di b in $l^{p'}$.

Teorema 4.1. *Sia $1 \le p \le \infty$. Sia $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$ con p' il coniugato di p. Allora l'operatore $T_b : l^p \to \mathbb{R}$ definito da*

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \forall a \in l^p$$

è un operatore lineare e continuo di norma

$$||T_b||_{(l^p)'} = ||b||_{l^{p'}}.$$

Quindi il teorema precedente afferma che l'operatore $T : l^{p'} \to (l^p)'$ definito da $T(b) = T_b$ è un'isometria. **Se $p \neq \infty$ tale isometria è suriettiva.**

Teorema 4.2. *Sia $1 \le p < \infty$. Allora l'applicazione $T : l^{p'} \to (l^p)'$ definita da $T(b) = T_b$ è un'isometria suriettiva ossia*

(1) $||T_b||_{(l^p)'} = ||b||_{l^{p'}}$ $\forall\, b \in l^{p'}$

(2) $\forall\, \varphi \in (l^p)'$ *esiste uno ed un solo $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$ tale che $\varphi = T_b$.*

In particolare il duale di l^p è lo spazio $l^{p'}$.

Osservazione 4.3. Nel caso $p = \infty$ nell'esercizio 5.10 viene esibito un funzionale lineare e continuo su l^∞ che non è rappresentabile nella forma

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \forall a \in l^\infty$$

con $b \in l^1$.

Dimostrazione del Teorema 4.1 nel caso $p = \infty$. Sia $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'} = l^1$ e si consideri $x^{(k)} = (x_n^k)$ definita da

$$x_n^k = \begin{cases} segn(b_n) & \text{se } n \le k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha che

$$||x^{(k)}||_{l^\infty} = 1$$

e, usando la definizione di norma degli operatori lineari e continui, segue che

$$||T_b||_{(l^\infty)'} \geq |T_b(x^{(k)})| = \sum_{n=1}^{k} |b_n| \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

in quanto $b_n segn(b_n) = |b_n|$. Per $k \to \infty$ si ottiene che

$$||T_b||_{(l^\infty)'} \geq \lim_k |T_b(x^{(k)})| \geq ||b||_1$$

che, unita alla (4.1), implica che

$$||T_b||_{(l^\infty)'} = ||b||_{l^1}.$$

Ossia la norma di T_b coincide con la norma di b in l^1. □

Dimostrazione del Teorema 4.2 e del Teorema 4.1 nel caso $1 \leq p < \infty$**.** Sia $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$. Proviamo che per ogni $1 \leq p < \infty$ e per ogni $\varphi \in (l^p)'$, posto $b_n = \varphi(e_n)$ dove $e_n = (\delta^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vale che

(i) $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$
(ii) $\varphi = T_b$ ossia $\varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \forall a \in l^p$;
(iii) $||T_b||_{(l^p)'} = ||\varphi||_{(l^p)'} = ||b||_{l^{p'}}$.

Distinguiamo due casi.
Primo caso: $1 < p < \infty$**.** Sia $x^{(k)} = (x^k_n) \in c_{00}$ definita da

$$x^k_n = \begin{cases} |b_n|^{p'-1} segn(b_n) & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha che $x^{(k)} \in c_{00} \subset l^p$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(x^{(k)})| = |\sum_{n=1}^{k} segn(b_n)|b_n|^{(p'-1)} T(e_n)| = \sum_{n=1}^{k} |b_n|^{p'} \leq |||\varphi||_{(l^p)'} ||x^k||_{l^p} = |||\varphi||_{(l^p)'} (\sum_{n=1}^{k} |b_n|^{p(p'-1)})^{\frac{1}{p}}$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{k} |b_n|^{p'} \leq |||\varphi||_{(l^p)'} (\sum_{n=1}^{k} |b_n|^{p'})^{\frac{1}{p}}$$

essendo $p(p'-1) = p'$. Quindi per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\big(\sum_{n=1}^{k} |b_n|^{p'}\big)^{\frac{1}{p'}} \leq ||\varphi||_{(l^p)'}.$$

In particolare la serie $\big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{p'}\big)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$ da cui segue che $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}$ e

$$||b||_{p'} \leq ||\varphi||_{(l^p)'}. \tag{4.3}$$

Inoltre per ogni $x \in c_{00}$, $x = (x_n)_n$ vale che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$.

Grazie alla linearità di φ e di T_b si ottiene che

$$T_b(x) = T_b(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n T_b(e_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n b_n = \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi(e_n) = \varphi(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n)\varphi(x)$$

ossia $T_b = \varphi$ su c_{00} che è denso in l^p (vedi Esercizio 2.33) ed entrambi sono operatori lineari e continui. Allora dall'Esercizio 3.32 segue che $T_b = \varphi$ su l^p e dalle disuguaglianze (4.1) e (4.3) si ottiene che

$$||b||_{p'} \leq ||\varphi||_{(l^p)'} = ||T_b||_{(l^p)'} \leq ||b||_{p'}.$$

Ossia la norma di φ coincide con la norma di b in $l^{p'}$.

Segue quindi che T è suriettiva ed e' un'isometria in quanto per ogni $c \in l^p$ posto $\varphi = T_c$ vale che l'elemento b associato tramite la relazione $b_n = \varphi(e_n) = T_c(e_n) = c_n$ e quindi

$$||T_c||_{(l^p)'} = ||\varphi||_{(l^p)'} = ||c||_{l^{p'}}.$$

Secondo caso: $p = 1$ (da cui $p' = \infty$). Dimostriamo la formula (4.3).

La dimostrazione di (i), (ii), (iii) continuerá poi come nel caso $1 < p < +\infty$. Si consideri $x^{(k)} = (x_n^k)_n$ definita da

$$x_n^k = segn(b_n)\delta_n^k.$$

Ovviamente (escludendo il caso banale $b = 0$) si ha che $||x^{(k)}||_{l^1} = 1$ e

$$||\varphi||_{(l^p)'} \geq |\varphi(x^{(k)})| = |b_k|$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questo implica che $||\varphi||_{(l^p)'} \geq \sup_k |b_k|$ da cui $b \in l^\infty$ e $||\varphi||_{(l^1)'} \geq ||b||_{l^\infty}$. □

Osservazione 4.4. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Sia $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e supponiamo che $T_c : l^p \to \mathbb{R}$ definito da

$$T_c(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \quad \forall a \in l^p$$

è un operatore lineare e continuo. Allora, $c \in l^{p'}$ e

$$||T_c||_{(l^p)'} = ||c||_{l^{p'}}.$$

Infatti se $1 \leq p < +\infty$, posto $\varphi = T_c \in l^{p'}$, dal Teorema di rappresentazione 4.2 vale che esiste l'elemento $b = (b_n)_n \in l^p$ tale che $\varphi = T_b$. Poiché $b_n = \varphi(e_n) = T_c(e_n) = c_n$ ossia $c = b \in l^p$ si ottiene che

$$||T_c||_{(l^p)'} = ||\varphi||_{(l^p)'} = ||c||_{l^{p'}}.$$

Invece se $p = +\infty$, si consideri $x^{(k)} = (x_n^k)$ definita da

$$x_n^k = \begin{cases} segn(c_n) & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha che

$$||x^{(k)}||_{l^\infty} = 1$$

e, usando la definizione di norma degli operatori lineari e continui, segue che

$$||T_c||_{(l^\infty)'} \geq |T_c(x^{(k)})| = \sum_{n=1}^{k} |c_n| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Segue quindi che $c \in l^1$.

Esercizio 4.5. Sia $X = l^1$ e sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosí definiti:

$$F_n(x) = \frac{x_n + x_{n+1}}{n}$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in N} \in X$.

(1) Calcolare $||F_n||$;

(2) Dimostrare che $F_n \to 0$ in X'.

Esercizio 4.6. Sia $X = l^1$ e sia $T : l^1 \to \mathbb{R}$ cosí definito: per ogni $a = (a_n) \in l^1$

$$T(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - \frac{1}{n}).$$

Provare che T è lineare e continuo con $||T|| = 1$. Esiste $a \in l^1$ con $|a|_{l^1} = 1$ tale che $T(a) = 1$?

Risoluzione: Si ha che

$$|T((a_n))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

e scelta la successione $(a_k)_k \subseteq l^1$ definita da $a_k = (\delta_n^k)_n$ si ha che $|a_k|_{l^1} = 1$ e

$$T(a_k) = (1 - \frac{1}{k}) \to 1$$

quando $k \to \infty$. Quindi $||T|| = 1$.
(Oppure: poiché T è della forma

$$T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

con $b = (b_n)_n = (1 - \frac{1}{n})_n \in l^\infty$, basta applicare il teorema di rappresentazione del duale di l^1 per concludere che T è un funzionale lineare e continuo su l^1 con $||T|| = |b|_\infty = 1$.) Infine non esiste alcun $a \in l^1$ con $|a|_{l^1} = 1$ tale che $T(a) = 1$. Infatti se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - \frac{1}{n}) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

che implicherebbe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - a_n(1 - \frac{1}{n}) = 0.$$

Poiché

$$a_n(1 - \frac{1}{n}) \leq |a_n(1 - \frac{1}{n})| < |a_n|$$

tale serie è una serie a termini strettamente positivi con somma nulla. Assurdo.

Esercizio 4.7. Sia $X = l^2$ e sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ la successione di funzionali cosí definiti:

$$F_n(x) = x_n$$

per ogni $x = (x_n)_{n \in N} \in X$.

(1) Calcolare $||F_n||$;

(2) Dimostrare che $F_n(x) \to 0$, per ogni $x \in X$ ma F_n non converge a zero in X'.

Esercizio 4.8. Sia $T_k : l_1 \to l_1$ tale che $T_k(x) = (\frac{x_{n+k}}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$.

(1) Provare che T_k è un operatore lineare e continuo per ogni k;
(2) calcolare la norma di T_k;
(3) provare che $|T_k(x)|_{l_1} \to 0$ quando $k \to \infty$;
(4) $T_k \to 0$ in norma?

Esercizio 4.9. Sia

$$K := \{(x_n) \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}.$$

(1) Si provi che K è un sottospazio chiuso di l^1;
(2) Si trovino tutti gli elementi $y = (y_n) \in l^\infty$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = 0$$

per ogni $x \in K$.

Teorema 4.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, sia $1 \le p \le \infty$ e sia $u \in L^{p'}(\Omega)$. Per ogni $v \in L^p(\Omega)$ sia*

$$T_u(v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Allora T_u è un funzionale lineare e continuo su $L^p(\Omega)$ con

$$||T_u||_{(L^p(\Omega))'} = ||u||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Proof. Dalla disuguaglianza di Holder segue che $||Tu||_{(L^p(\Omega))'} \le ||u||_{L^{p'}(\Omega)}$. Inoltre se $1 < p \le \infty$ per

$$v(x) := |u(x)|^{p'-2}u(x)$$

($v(x) = 0$ se $u(x) = 0$) si ha che $v \in L^p(\Omega)$ e $||v||_{L^p(\Omega)} = ||u||^{\frac{p'}{p}}_{L^p(\Omega)}$. Da ciò segue che

$$||Tu||_{(L^p(\Omega))'} \ge \frac{|T_u(v)|}{||v||_{L^p(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega |u(x)|^{p'}dx}{||u||^{\frac{p'}{p}}_{L^{p'}(\Omega)}} = ||u||_{L^{p'}(\Omega)}$$

ossia

$$||Tu||_{(L^p(\Omega))'} = ||u||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Se $p = 1$ allora per ogni $\epsilon > 0$ sia $B_\epsilon \subset \Omega$ misurabile tale che $|B_\epsilon| \in (0, +\infty)$ e

$$u(x) > ||u||_\infty - \epsilon \quad \forall x \in B_\epsilon.$$

Allora la funzione $v_\epsilon(x) := \frac{1}{|B_\epsilon|}\chi_{B_\epsilon}$ é tale che $||v_\epsilon||_{L^1(\Omega)} = 1$ e

$$T(v_\epsilon) = \int_\Omega v_\epsilon(x)u(x) \ge ||u||_\infty - \epsilon$$

da cui $||T|| \geq ||u||_\infty - \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$. Per $\epsilon \to 0$ segue la tesi.

Corollario 4.11. *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $T : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega)'$ l'applicazione definita da $T(u) := T_u$. Allora T é un'isometria.*

Osservazione 4.12. Alla fine del corso, dimostreremo che nel caso $1 \leq p < +\infty$ l'isometria nel Corollario 4.11 è suriettiva. Inoltre sarà esibito un funzionale T su $L^\infty(\Omega)$ che non è rappresentabile nella forma

$$T(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

con $u \in L^1(\Omega)$.

5. **Esercizi sul Lemma di Zorn e sul Teorema di Hahn-Banach**

Ricordiamo che una relazione d'ordine su un insieme X è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Se su X è data una relazione d'ordine $\leq$, l'insieme X o meglio la coppia $(X, \leq)$ si dice insieme parzialmente ordinato.

Definizione 5.1. *Sia $(X, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, sia $Q \subseteq X$ e $M \in X$.*

- *M si dice* **maggiorante per** Q *se $q \leq M$ per ogni $x \in Q$;*
- *Q si dice* **totalmente ordinato** *se per ogni $q, q' \in Q$ vale che $q \leq q'$ o $q' \leq q$;*
- *M si dice* **massimale in X** *se non esiste $x \in X - \{M\}$ tale che $M \leq x$;*
- *X si dice* **induttivo** *se ogni sottoinsieme $Q \subseteq X$ totalmente ordinato ammette un elemento maggiorante in X.*

Lemma 5.2. *(***di Zorn***) Sia $(X, \leq)$ un insieme non vuoto, parzialmente ordinato e induttivo. Allora X possiede elementi massimali.*

Nei prossimi esercizi utilizzeremo il lemma di Zorn per dimostrare l'esistenza di una base di Hamel e di un operatore lineare e non continuo su un qualunque spazio vettoriale normato di dimensione infinita. Sia E uno spazio vettoriale su K. Ricordiamo che un sottoinsieme qualunque $S \subseteq E$ è un **sistema di vettori linearmente indipendenti** se ogni sottoinsieme finito di vettori di S è linearmente indipendente.

Esercizio 5.3. Sia E uno spazio vettoriale normato infinito dimensionale su K.

(1) Sia $\mathcal{S} := \{S \subseteq E : \ S \text{ sistema di vettori linearmente indipendenti } \}$. Dimostrare che esiste un elemento $\mathcal{B}$ massimale rispetto alla relazione di inclusione tra insiemi.
(2) Dimostrare che per ogni $v \in E$ esiste un unico $n \in \mathbb{N}$, un'unica scelta di $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ distinti tra loro ed un'unica scelta di $c_1, \cdots, c_n \in K \setminus \{0\}$ tali che
$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$$
(per tale motivo $\mathcal{B}$ si dice **base algebrica o base di Hamel**).

Soluzione

(1) Sia $\mathcal{S} := \{S \subseteq E : \ S \text{ linearmente indipendente in } E\}$. Tale famiglia è non vuota ed è ordinata parzialmente per inclusione. Proviamo che se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ è totalmente ordinato, allora $\mathcal{F}$ ha un maggiorante. A tal scopo si osservi che l'insieme $M := \cup_{S \in \mathcal{F}} S$ costituisce un sistema di vettori linearmente indipendenti: infatti se $x_1, \cdots x_N \in M$ allora per ogni $i \in \{1, \cdots, N\}$ esiste $S_i \in \mathcal{F}$ tale che $x_i \in S_i$. Poichè $\mathcal{F}$ è totalmente ordinato, a meno di permutazioni, possiamo supporre $S_i \subseteq S_{i+1}$. Segue che $x_1, \cdots x_N \in S_N$ ed essendo S_N linearmente indipendente in E segue che $x_1, \cdots x_N$ sono linearmente indipendenti in E. In particolare $M \in \mathcal{S}$ ed è un maggiorante per $\mathcal{F}$ poichè $S \subseteq M$ per ogni $S \in \mathcal{F}$. Poichè $\mathcal{S}$ verifica tutte le ipotesi del lemma di Zorn, si ha che $\mathcal{S}$ ha almeno un elemento massimale $\mathcal{B}$.
(2) Sia $v \in E \setminus \mathcal{B}$ (altrimenti è banale). Poichè l'insieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{v\}$, si ha che $\mathcal{B} \cup \{v\}$ deve essere linearmente dipendente (per non contraddire la massimalitá di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{S}$).

Quindi devono esistere $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ e $a_0, \cdots, a_n \in K$ non tutti nulli tali che

$$a_0 v + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$$

Poichè $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, deve essere $a_0 \neq 0$ da cui segue che

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \quad \text{con } c_i = \frac{a_i}{a_0} b_i.$$

Infine siano

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i = \sum_{j=1}^{m} C_i \beta_i$$

con $c_1, \cdots, c_n, C_1, \cdots, C_m \in K \backslash \{0\}$ e $\{b_1, \cdots, b_n\}$ n elementi distinti di $\mathcal{B}$ e $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ m elementi distinti di $\mathcal{B}$. Allora, a meno di permutazioni, sia $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$ tale che

$$b_i = \beta_i \quad \text{se } 1 \leq i \leq k$$

e $b_{k+1}, \cdots, b_n, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_m$ tutti distinti tra loro. Allora da

$$\sum_{i=1}^{k} (c_i - C_i) b_i + \sum_{i=k+1}^{n} c_i b_i - \sum_{j=1+k}^{m} C_i \beta_i = 0$$

segue che $k = n = m$ (altrimenti esisterebbero degli elementi C_i o c_i uguali a 0) e $c_i = C_i$ per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

□

Esercizio 5.4. Sia E uno spazio vettoriale normato infinito dimensionale su $\mathbb{R}$. Dimostrare che esiste un'applicazione $T : E \to \mathbb{R}$ che sia lineare e non continua. (*Suggerimento: sia $\mathcal{B}$ una base di Hamel e senza perdere di generalita' supponiamo che $||b|| = 1$ per ogni $b \in \mathcal{B}$. Scegliamo un sottoinsieme numerabile $C = (b_n)_n \subseteq \mathcal{B}$. Definiamo $T(b) = n$ se $b = b_n$ e $T(b) = 0$ se $b \in \mathcal{B} \setminus C$....*)

Esercizio 5.5. Sia E uno spazio vettoriale infinito dimensionale su $\mathbb{R}$.

- Dimostrare che esiste un iperpiano (ossia un sottospazio proprio massimale rispetto l'inclusione).
  (*Suggerimento: Sia $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ e sia $\mathcal{S} =: \{S \subseteq E :\ S$ sottospazio di $E,\ x_0 \notin S\}$. Usando il lemma di Zorn imostrare che esiste un insieme massimale $H \in \mathcal{S}$ tale che $span\{H \cup \{x_0\}\} = E$. Tale H risulta un iperpiano.*)
- Sia $H \subset E$. Dimostrare che sono equivalenti:
  (1) H é un iperpiano;
  (2) esiste $f \in E^*$, $f \neq 0$ tale che $H = Ker f$;
  (3) H ha codimensione 1.
- se E é uno spazio vettoriale normato allora
  (1) ogni H iperpiano di E é chiuso o é denso;
  (2) $H \subset E$ é un iperpiano chiuso se e solo se esiste $f \in E'$, $f \neq 0$ tale che $H = Ker f$.

Esercizio 5.6. Data una famiglia finita $x_1, \cdots x_n$ di vettori linearmente indipendenti di uno spazio normato E di dimensione infinita, dimostrare che esiste almeno una base di Hamel che li contiene. (applicare lemma di Zorn)

Esercizio 5.7. Dare un esempio di funzionale lineare non continuo su c_{00} munito della norma del sup.

(Suggerimento: osservare che la famiglia $(e_k)_k$ definita da $e_k = (\delta_n^k)_n$ è una base di Hamel per lo spazio vettoriale c_{00}. Definire $f(e_k) = k$ ed estendere f dappertutto per linearita'. f non può essere continuo...)

Senza fare ricorso al teorema di Hahn-Banach si provi che

Esercizio 5.8. Sia X uno spazio normato, Y uno spazio di Banach, $D(T) \subseteq X$ un sottospazio denso in X. Sia $T : D(X) \to Y$ un funzionale lineare e continuo. Dimostrare che esiste un unico funzionale $\widehat{T} : X \to Y$ lineare e continuo tale che $\widehat{T} = T$ su $D(T)$ e tale che $||\widehat{T}||_{\mathcal{L}(X,Y)} = ||T||_{\mathcal{L}(D(X),Y)}$.

(Suggerimento: per ogni $x \in X$ sia $(x_n) \subseteq D(X)$ tale che $||x_n - x||_X \to 0$. Si dimostri che la successione $(T(x_n))_n$ è Cauchy in Y e si ponga $\widehat{T}(x) = \lim_n T(x_n)$. Si provi che tale definizione è indipendente dalla scelta della successione (x_n) convergente a x e si provi che $\widehat{T}$ soddisfa le proprietà richieste.)

Esercizio 5.9. Data una famiglia finita $x_1, \cdots x_n$ di vettori linearmente indipendenti di uno spazio normato E di dimensione infinita e dati comunque $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, dimostrare che esiste $f \in E'$ con la proprietà: $f(x_k) = a_k$ per ogni $k = 1, \cdots, n$.

(*Suggerimento: considerare G lo span dei vettori $x_1, \cdots x_n$, costruire il funzionale lineare g su G tale che $g(x_k) = a_k$ per ogni $k = 1, \cdots, n$. Poichè G ha dimensione finita, si ha che g è continuo e per H.B. può essere esteso...*)

Esercizio 5.10. Provare che esiste $f : l^\infty \to \mathbb{R}$ funzionale lineare e continuo che non è rappresentabile da un elemento di l^1 (ossia l'inclusione di l^1 in $(l^\infty)'$ è in generale stretta.)

Soluzione Sia c il sottospazio di l^∞ costituito dalle successioni $x = (x_n)_{n \in N}$ di numeri reali convergenti. Sia $T : c \to \mathbb{R}$ che ad $x = (x_n)_n$ associa $T(x) = \lim_n x_n$. Allora T è lineare e poichè

$$|T(x)| \leq ||x||_\infty$$

abbiamo che T è continuo. Si osservi inoltre che se $x = (1)_n$ allora $T(x) = 1 \geq ||x||_\infty$. Quindi $||T||_{c'} = \sup_{\{x \in c \, ||x||_\infty \leq 1\}} |T(x)| = 1$. Dal Teorema di Hahn Banach esiste $\tilde{T} : l^\infty \to \mathbb{R}$ lineare e continuo (chiamato *limite di Banach*) tale che $\tilde{T} = T$ su c e $||\tilde{T}||_{(l^\infty)'} = 1$. Per assurdo esista $a = (a_n)_n \in l^1$ tale che $\tilde{T}(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. Sia $x_k = (x_n^k) \in c$ cosí definita:

$$x_n^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $T(x_k) = 0 = \sum_{n=1}^k a_n$ mentre se scegliamo $x = (1)_n$ vale che $1 = T(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Assurdo. $\square$

Esercizio 5.11. Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e sia $T^* : Y' \to X'$ l'operatore definito da

$$T^*(f)(x) = f(T(x)) \quad \forall f \in Y', \forall x \in X.$$

Provare che T^* è continuo e che

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = ||T^*||_{\mathcal{L}(Y',X')}.$$

Esercizio 5.12. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$. Provare i seguenti fatti:

(1) per ogni $x, y \in X$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$;

(2) per ogni $x \in X$ vale che T_x è un funzionale lineare e continuo su X' tale che $||T_x||_{X''} = |x|_X$.

Esercizio 5.13. Sia X uno spazio normato.

(1) Sia M un sottospazio di X. Definiamo
$$M^\perp := \{f \in X' : \ f(x) = 0 \ \forall x \in M\}.$$
Provare che $M^\perp$ è un sottospazio chiuso di X (detto **ortogonale** di M).

(2) Sia N un sottospazio di X'. Definiamo
$$N^\perp := \{x \in X : \ f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$
Provare che $N^\perp$ è un sottospazio chiuso di X' (detto **ortogonale** di N).

(3) Usando la seconda forma geometrica del Teorema di H.B. provare che se M è chiuso allora $(M^\perp)^\perp = \bar{M}$. In particolare se M è chiuso allora $(M^\perp)^\perp = M$.

Esercizio 5.14. Sia X uno spazio normato. Sia M un sottoinsieme di X e N un sottoinsieme di X'. Definiamo

$$M^0 := \{f \in X' : \ |f(x)| \le 1 \ \forall x \in M\}$$

(e lo chiamiamo **polare** di M) e

$$N^0 := \{x \in X : \ |f(x)| \le 1 \ \forall f \in N\}$$

(e lo chiamiamo **polare di** N). Provare che

(1) se $B_X := \{x \in X : \ ||x|| \le 1\}$ e $B_{X'} = \{f \in X' : \ ||f|| \le 1\}$ allora $B_X^0 = B_{X'}$ e $B_{X'}^0 = B_X$.

(2) se M è un sottospazio allora $M^0 = M^\perp$.

Esercizio 5.15. Sia

$$K := \{(x_n) \in l^1 : \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}.$$

(1) Si provi che K è un sottospazio chiuso di l^1;

(2) Si trovino tutti gli elementi $y = (y_n) \in l^\infty$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = 0$$

per ogni $x \in K$;

(3) Si dimostri che $K \cap l^2$ è un sottospazio denso in l^2.

Esercizio 5.16. Sia X uno spazio normato, $C \subseteq X$ e sia

$$co(C) := \big\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i c_i : \; k \in \mathbb{N}, c_i \in C, \theta_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \big\}.$$

Provare che

(1) $co(C)$ è un convesso ed è il più piccolo convesso contenente C (per questo motivo é detto inviluppo convesso di C);
(2) se C è aperto in X, allora $co(C)$ é aperto in X;
(3) se C é limitato in X allora $co(C)$ é limitato in X;
(4) se C ha un numero finito di punti, allora $co(C)$ é compatto;
(5) se C é convesso, $x \in \overset{\circ}{C}$ e $y \in C$ allora $tx + (1-t)y \in \overset{\circ}{C}$ per ogni $t \in [0, 1[$;
(6) se C é convesso allora $\bar{C}$ é convesso e $\overset{\circ}{C}$ é convesso.

Esercizio 5.17 (Hahn Banach in dimensione finita). Sia E uno spazio vettoriale normato di dimensione finita. Sia C un convesso, non vuoto tale che $0 \notin C$. Provare che esiste un iperpiano che separa C e 0 in senso largo. Dedurre che se C_1 e C_2 sono due convessi, non vuoti e disgiunti esiste un iperpiano che li separa in senso largo.

Proof. Prima di tutto osservare che possiamo supporre $E = \mathbb{R}^k$ dove $k = dimE$. Si provino i seguenti steps:

(1) si scelga un insieme numerabile $D = (c_n)_n$ denso in C (perché esiste D?). Definiamo $C_n = co(c_1, \cdots, c_n)$. Provare che C_n é compatto e che $\bigcup_n C_n$ é densa in C;
(2) mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in \mathbb{R}^k$ tale che $||x_n|| = 1$ e $x_n \cdot c \geq 0$ per ogni $c \in C_n$. (Sia $||y_n|| = \min_{\{c \in C_n\}} ||c|| > 0$ e sia H_n l'iperpiano non omogeneo di equazione $y_n \cdot (x - y_n) = 0$. Allora per ogni $c \in C_n$ vale che $y_n \cdot (c - y_n) \geq 0$. (Infatti se per assurdo $y_n \cdot (\bar{c} - y_n) < 0$ con $c \in C$ allora la funzione

$$f(t) = ||ty_n + (1-t)\bar{c}||^2 - ||y_n||^2 = (t-1)[(t+1)||y_n||^2 + (1-t)||c||^2 + 2tc \cdot y_n)]$$

definita per $t \in (0, 1)$ tende a 0^- per $t \to 1^{-1}$ e quindi é negativa in un intorno di 1 contraddicendo la minimalitá di y_n.) Basta quindi porre $x_n = \frac{y_n}{||y_n||}$;
(3) dedurre che esiste $x \in \mathbb{R}^k$ tale che $||x|| = 1$ e $x \cdot c \geq 0$ per ogni $c \in C$..

Esercizio 5.18. Sia $f \in L(E, \mathbb{C})$ dove E é uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora le funzioni $u = \Re(f) : E \to \mathbb{R}$ e $v = \Im(f) : E \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

sono funzionali $\mathbb{R}$-lineari. Inoltre sono legati dalla relazione

$$v(x) = -u(ix) \quad \forall x \in E$$

(equivalentemente dalla relazione $u(x) = v(ix)\ \forall x \in E$).

Proof. La prima parte é banale. Riguardo la seconda, osserviamo che $iu(x) - v(x) = if(x) = f(ix) = u(ix) + iv(ix)$.

Esercizio 5.19. Siano $u \in L(E, \mathbb{R})$ dove E é uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora il funzionale $f : E \to \mathbb{C}$ definito da

$$f(x) = u(x) - iu(ix)$$

é un funzionale $\mathbb{C}$-lineare. Inoltre se $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ allora $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ e $||u||_{E'} = ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$.

Proof. Facilmente segue che per ogni $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in \mathbb{C}$ vale che

$$f((\alpha + i\beta \in \mathbb{C})x) = (\alpha + i\beta)f(x).$$

Poi osserviamo che

$$|f(x)| = \sqrt{\Re^2(f(x)) + \Im^2(f(x))} \geq |u(x)|$$

da cui segue che $||u||_{E'} \leq ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$. Viceversa

$$|f(x)| = f(x)e^{-\theta(x)} = f(xe^{-\theta(x)}) = \Re(f(xe^{-\theta(x)}) = u(xe^{-\theta(x)}) \leq ||u|| \cdot |xe^{-\theta(x)}| = ||u|| \cdot |x|.$$

Quindi segue che $||u||_{E'} \geq ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$.

Esercizio 5.20 (Versione analitica del Teorema di Hahn Banach nel caso complesso). Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Sia $G \subseteq E$ un sottospazio e sia $g : G \to \mathbb{C}$ tale che $|g(x)| \leq p(x)\ \forall x \in E$. Allora esiste $\tilde{g} : E \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare tale che $\tilde{g} = g$ su G e $|\tilde{g}(x)| \leq p(x)\ \forall x \in E$.

Proof. Sia $u(x) := \Re(g(x))$. Allora $u : G \to \mathbb{R}$ e $u(x) \leq |u(x)| \leq |g(x)| \leq p(x)$. Applichiamo allora ad u e G la versione analitica reale del teorema di Hahn Banach. Allora esiste $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare tale che $\tilde{u} = u$ su G e $\tilde{u}(x) \leq p(x)\ \forall x \in E$. In particolare il funzionale $\tilde{g}(x) := \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)$ é $\mathbb{C}$-lineare ed é tale che

$$\tilde{g}(x) = \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix) = u(x) - iu(ix) = g(x) \quad \forall x \in G$$

e

$$|\tilde{g}(x)| = \tilde{g}(x)e^{-\theta(x)} = \tilde{g}(xe^{-\theta(x)}) = \tilde{u}(xe^{-\theta(x)}) \leq p(xe^{-\theta(x)}) = |e^{-\theta(x)}|p(x) = p(x) \quad \forall x \in E.$$

5.1. **Gli iperpiani.**

Esercizio 5.21. *Sia X spazio vettoriale su K e sia $H \subset X$ un sottospazio. Dimostrare che sono equivalenti:*

(1) *H é un iperpiano (ossia un sottospazio proprio massimale);*
(2) *H ha codimensione* 1.
(3) *esiste $f \in X^*$, $f \neq 0$ tale che $H = Kerf$;*

Proof.
(1) $1 \implies 2$. Se H é un iperpiano sia $\sim_H$ la relazione $x \sim_H y \iff x - y \in H$ e sia $X_{\sim_H}$ lo spazio quoziente. Proviamo che la dimensione di $X_{\sim_H}$ é 1. Ovviamente, siccome $H \subsetneq X$ allora $dim X_{\sim_H} \geq 1$. Se $dim X_{\sim_H} > 1$ allora esisterebbero $x, y \in X$ tali che $[x]_{\sim_H}$ e $[y]_{\sim_H}$ sono linearmente indipendenti in $X_{\sim_H}$.

(2) $2 \implies 1$ Proviamo che H è massimale. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbe V sottospazio tale che $H \subsetneq V \subsetneq X$. In particolare esisterebbero $x, y \in X$ tali che $x \in V \setminus H$ e $y \in X \setminus V$. Siccome la dimensione di $X_{\sim_H}$ è 1 segue che $[x]_{\sim_H}$ e $[y]_{\sim_H}$ sono linearmente dipendenti in $X_{\sim_H}$. Quindi esiste $\lambda \in K$ tale che $[x]_{\sim_H} = \lambda[y]_{\sim_H}$ allora $x - \lambda y \in H$ da cui segue che $y \in V$. Assurdo.

(3) $2 \implies 3$ Poiché H ha codimensione 1 esiste $T : X_{\sim_H} \to K$ lineare e biettiva. Sia $I : X \to X_{\sim_H}$ l'applicazione quoziente. Poniamo $f := T \circ I$. Vale che $f \in X^*$ e $H = Kerf$.

(4) $3 \implies 2$ Siccome $H = Kerf \subsetneq X$ allora $dim X_{\sim_H} \geq 1$. D'altra parte l'applicazione $T : X_{\sim_H} \to K$ definita da $T([x]_{\sim_H}) = f(x)$ é ben posta ed è iniettiva. Quindi $dim\, X_{\sim_H} = dim\, T(X_{\sim_H}) \leq dim\, K = 1$. Quindi $dim\, X_{\sim_H} = 1$

Corollario 5.22. *Sia X spazio vettoriale normato di dimensione infinita, $X \neq \{0\}$. Allora in X esiste almeno un iperpiano chiuso che non é denso ed almeno un iperpiano denso che non é chiuso.*

Proof. Basta considerare $f \in X^* \setminus X'$, $f \neq 0$, (la cui esistenza é garantita dall'esercizio (5.4)) e applicare la caratterizzazione precedente per ottenere che $J = Kerf$ è un iperpiano. Esso è denso perché non chiuso. Se invece si considera $f \in X' \setminus \{0\}$ (la cui esistenza é garantita da un Corollario di Hahn-Banach) segue che $H = Kerf$ è un iperpiano chiuso.

6. Lemma di Baire

Definizione 6.1. Sia X uno spazio topologico.

(1) Un sottoinsieme $E \subseteq X$ si dice **mai denso** se l'interiore della chiusura è vuoto ossia $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$;
(2) X si dice **magro** o di **prima categoria** se X è unione numerabile di insiemi mai densi;
(3) X si dice **di seconda categoria** se non è di prima categoria.

Osservazione 6.2. Si osservi che $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$ non è equivalente a $\overset{\circ}{E} = \emptyset$. Infatti $\overset{\circ}{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$ (ossia $\mathbb{Q}$ non è mai denso) mentre $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$!

Esempio 6.3. L'insieme $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$ è di prima categoria in $\mathbb{R}$.

Osservazione 6.4. Vale che

(1) E è mai denso se e solo se $\bar{E}$ è mai denso;
(2) se E è chiuso allora
$$E \text{ è mai denso} \iff E^c (:= X \setminus E) \text{ è denso.}$$
Infatti, usando l'osservazione 1.6 e il fatto che E é chiuso, abbiamo che
$$E^c \text{ è denso} \iff X = \overline{E^c} = X \setminus \overset{\circ}{E} \iff \overset{\circ}{E} = \emptyset \iff \overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset.$$
Equivalentemente: se A è aperto allora
$$A \text{ è denso} \iff A^c \text{ è mai denso.}$$

Teorema 6.5 (**Lemma di Baire**)**.** *Sia X uno spazio metrico completo. Sia $(D_n)_n$ una famiglia numerabile di aperti densi in X. Allora $\bigcap_n D_n$ è denso in X.*

(per una dimostrazione, vedere il Brezis)

In particolare vale il seguente:

Teorema 6.6 (**Forma debole del Lemma di Baire**)**.** *Sia X uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $(D_n)_n$ una famiglia numerabile di aperti densi in X. Allora $\bigcap_n D_n \neq \emptyset$.*

Il lemma di Baire risulta essere equivalente al seguente:

Teorema 6.7. *Sia X uno spazio metrico completo. Sia $(C_n)_n$ una famiglia numerabile di chiusi mai densi. Allora $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_n C_n}} = \emptyset$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che il lemma di Baire implica l'asserto del Teorema 6.7. Sia $(C_n)_n$ una famiglia numerabile di chiusi mai densi e sia $D_n = X \setminus C_n$. Allora, grazie all'osservazione 6.4, si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme D_n è aperto e denso. Cosí applicando il lemma di Baire otteniamo che $\overline{\bigcap_n D_n} = X$ che implica
$$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_n C_n}} = \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_n (X \setminus D_n)}} = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus \bigcap_n D_n}} = X \setminus \overline{\bigcap_n D_n} = \emptyset$$

Viceversa dimostriamo che il Teorema 6.7 implica il lemma di Baire.

Sia $(D_n)_n$ una famiglia numerabile di aperti densi e sia $C_n = X \setminus D_n$. Allora, grazie all'osservazione 6.4, per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme C_n è chiuso e mai denso. Cosí applicando il teorema 6.7 otteniamo

$$\overbrace{\bigcup_n C_n}^{\circ} = \emptyset$$

che implica

$$X \setminus \overline{\bigcap_n D_n} = \overbrace{\bigcup_n (X \setminus D_n)}^{\circ} = \overbrace{\bigcup_n C_n}^{\circ} = \emptyset$$

ossia

$$\overline{\bigcap_n D_n} = X.$$

□

Il seguente corollario è equivalente alla versione debole del lemma di Baire.

Teorema 6.8. *Sia X uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $(C_n)_n$ una famiglia numerabile di chiusi tali che $\bigcup_n C_n = X$. Allora esiste n_0 tale che $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \emptyset$.*

In particolare il lemma di Baire afferma che **ogni spazio metrico completo è di seconda categoria**. Per questo viene chiamato anche **Teorema della categoria**.

Esempio 6.9. L'intervallo chiuso $[a, b]$ è di seconda categoria essendo uno s.m.c. Conseguentemente (a, b) non è di prima categoria, altrimenti lo sarebbe $[a, b]$. In particolare l'esempio mostra che esistono spazi metrici non completi che sono di seconda categoria.

Esercizio 6.10. Provare che

(i) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non si può scrivere come unione numerabile di chiusi;
(ii) $\mathbb{Q}$ non si può scrivere come intersezione numerabile di aperti.

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che grazie all'osservazione 1.6, le due affermazioni (i) e (ii) sono equivalenti. Basta quindi provare la (i). Se per assurdo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cup_n C_n$ con C_n chiuso, allora

$$\mathbb{R} = (\cup_n C_n) \bigcup (\cup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}).$$

Applicando il lemma di Baire esisterebbe n_0 tale che $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \emptyset$. Cio' implicherebbe l'esistenza di un aperto contenuto in C_{n_0} ossia in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Assurdo per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. □

Notare che la precedente dimostrazione si fonda sul fatto che $\{q\}$ è un s.i. chiuso di $\mathbb{R}$ a parte interna vuota. Se uno spazio metrico E è privo di punti isolati, tutti i s.i. del tipo $\{x\}$ con $x \in E$ sono chiusi a parte interna vuota. Applicando quindi la stessa dimostrazione dell'esercizio precedente, si può dimostrare che

Esercizio 6.11. Sia X uno spazio metrico completo privo di punti isolati. Allora ogni insieme denso numerabile non può essere intersezione numerabile di aperti.

Proposizione 6.12. *Sia X uno spazio di Banach. Allora X è finito dimensionale o ha una base di Hamel più che numerabile.*

Dimostrazione. Per assurdo esista una base numerabile $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X. Definiamo

$$V_n = span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

Questo è un sottospazio finito dimensionale e pertanto è chiuso. Inoltre è un sottospazio proprio. Quindi $\overset{\circ}{V_n}= \emptyset$ (altrimenti, se V_n contenesse una palla, per traslazione conterrebbe una pallina centrata in 0. Per dilatazione conterrebbe tutto lo spazio). Allora $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ e ogni V_n è mai denso. Assurdo per il Lemma di Baire.

Corollario 6.13. *Lo spazio dei polinomi non può essere completo rispetto ad alcuna norma: infatti ha una base di Hamel numerabile* $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdot, \}$

Risolvere il seguente esercizio:

Esercizio 6.14. Ogni spazio metrico completo numerabile ha almeno un punto isolato.

Dimostrazione. Sia $X = \cup_n \{x_n\}$. Dal lemma di Baire esiste n_0 tale che $\{x_{n_0}\}$ ha interiore non vuoto, ossia esiste un aperto $A \subseteq \{x_{n_0}\}$. Allora $A = \{x_{n_0}\}$. Quindi x_{n_0} è un punto isolato. □

Da questo esercizio si ritrova che $\mathbb{Q}$ non può essere completo, altrimenti dovrebbe avere un punto isolato.

7. Il teorema di Banach-Steinhaus

Teorema 7.1 (di Banach-Steinhaus o di Uniforme Limitatezza). *Sia X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $(T_i)_{i\in I}$ una famiglia di operatori lineari e continui di X in Y. Assumiamo che per ogni $x \in X$ esista una costante $M_x \geq 0$ tale che*

$$\sup_{i\in I} ||T_i(x)||_Y = M_x$$

(ossia la famiglia $(T_i)_{i\in I}$ è puntualmente limitata). Allora esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} = M$$

ossia esiste $M \geq 0$ tale che $\forall x \in X$,$\forall i \in I$

$$||T_i(x)||_Y \leq M||x||_X$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$C_n := \{x \in X : \sup_{i\in I} ||T_i(x)||_Y \leq n\} = \bigcap_{i\in I} \{x \in X : \ ||T_i(x)||_Y \leq n\}.$$

Poichè C_n è intersezione di chiusi, si ha che C_n è chiuso e per ogni $x \in X$, scelto $n \geq c_x$ vale che $x \in C_n$. Quindi $X = \bigcup_n C_n$. Dal Lemma di Baire esiste almeno un C_{n_0} tale che $\overset{\circ}{C}_{n_0} \neq \emptyset$. In particolare esiste una palla chiusa $\bar{B}_r(x_0) \subseteq C_{n_0}$. In particolare se $z \in X$ è tale che $|z| \leq r$ vale che $z + x_0 \in \bar{B}_r(x_0)$ e perciò

$$\|T_i(z)\|_Y \leq \|T_i(x_0)\|_Y + \|T_i(z + x_0)\|_Y \leq \sup_i \|T_i(z + x_0)\|_Y + \sup_i \|T_i(x_0)\|_Y \leq 2n_0$$

da cui

$$\sup_i \|T_i(z)\|_Y \leq 2n_0.$$

Da qui si ricava facilmente che per ogni $z \in X$

$$\sup_i \|T_i(z)\|_Y \leq \frac{2n_0}{r}\|z\|_Y$$

ossia

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Corollario 7.2. *Sia X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato. Sia $(T_n)_n$ una successione di operatori lineari e continui di X in Y. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista $\lim_n T_n(x) = T(x)$. Allora T è un operatore lineare continuo da X in Y,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} \in \mathbb{R}$$

e

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_n ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Dimostrazione. È facile provare che T è un operatore lineare. Inoltre per ogni $x \in X$ la successione $(T_n(x))_n$ è limitata in quanto convergente in Y. Quindi per il Teorema di Banach-Steinhaus, la successione delle norme $(||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)})_n$ è limitata. In particolare il

$$\liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Infine dalla relazione

$$||T_n(x)|| \leq ||T_n||||x||_X$$

segue che per ogni $x \in X$

$$||T(x)|| = \liminf_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq (\liminf_{n\to\infty} ||T_n||)||x||_X$$

da cui segue che T è un operatore continuo tale che

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n} ||T_n||_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Esercizio 7.3. Sia $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ dove X, Y sono di Banach e assumiamo che $T_n(x) \to T(x)$ per ogni $x \in X$. Mostrare che se $x_n \to x$ allora $T_n(x_n) \to T(x)$.

Dimostrazione. Dal Teorema di Banach-Steinhaus, T è un operatore lineare e continuo. Inoltre

$$\begin{aligned}|T_n(x_n) - T(x)| &\leq |T_n(x_n) - T_n(x)| + |T_n(x) - T(x)| \\ &\leq ||T_n|| \cdot |x_n - x| + |T_n(x) - T(x)|\end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0.

Corollario 7.4. *Sia X uno spazio normato e $B \subseteq X$. Allora B è limitato se e solo se per ogni $f \in X'$ l'insieme $f(B) = \{f(b) : b \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per ogni $b \in B$ sia $\varphi_b : X' \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da $\varphi_b(f) = f(b)$. Applicando un corollario al teorema di HB si ha che

$$||b|| = \sup_{f\in X', ||f||_{X'}\leq 1} |f(b)| = \sup_{f\in X', ||f||_{X'}\leq 1} |\varphi_b(f)| = ||\varphi_b||_{X''}.$$

Poichè per ogni $f \in X'$ vale che

$$\sup_{b\in B} |\varphi_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < +\infty$$

applicando il Teorema di B.S. alla famiglia $(\varphi_b)_{b\in B}$ definiti sullo spazio di Banach X', esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_{b\in B} ||\varphi_b||_{X''} \leq C. \tag{7.1}$$

In particolare segue che

$$\sup_{b\in B} ||b||_X = \sup_{b\in B} ||\varphi_b||_{X''} \leq C.$$

□

Corollario 7.5. *Sia X uno spazio di Banach, $B' \subseteq X'$. Allora B' è limitato in X' se e solo se per ogni $x \in X$ l'insieme $\{f(x) : f \in B'\}$ è limitato in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in B'$ sia $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da $\varphi_f(x) = f(x)$. Poichè per ogni $x \in X$ vale che
$$\sup_{f \in B'} |\varphi_f(x)| = \sup_{f \in B'} |f(x)| < +\infty,$$
applicando il Teorema di B.S. alla famiglia $(\varphi_f)_{f\in B'}$ si ha che esiste $C > 0$ tale che
$$\sup_{f \in B'} ||\varphi_f||_{X'} \leq C.$$
Allora per ogni $f \in B'$ e per ogni $x \in X$ si ha che
$$|f(x)| = |\varphi_f(x)| \leq C||x||$$
da cui segue che per ogni $f \in B'$
$$||f|| = \sup_{x\in X, ||x||\leq 1} |f(x)| \leq C.$$
□

Esercizio 7.6. *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare (ossia $T \in L(X, Y)$) tale che $f \circ T \in X'$ per ogni $f \in Y'$. Provare che T è continuo.*

Dimostrazione. Sappiamo che
$$T \text{ è continuo } \iff T \text{ è limitato sulla palla unitaria}$$
$$\iff \text{ l'insieme } B = \{T(x) : x \in X,\ |x| \leq 1\} \text{ è limitato in } Y.$$
Grazie al corollario 7.4 vale che
$$B \text{ è limitato in } Y \iff \forall f \in Y'\ f(B) = \{f(T(x)) : x \in X,\ |x| \leq 1\} \text{ è limitato in } \mathbb{R}.$$
Dimostriamo quindi che $f(B)$ è limitato per ogni $f \in Y'$. Poich è per ogni $x \in X,\ |x| \leq 1$ vale che
$$|f(T(x)))| \leq ||f \circ T||_{X'} \cdot |x| \leq ||f \circ T||_{X'}$$
segue che $f(B) \subseteq [-||f \circ T||_{X'}, ||f \circ T||_{X'}]$ ossia $f(B)$ è limitato.

Esercizio 7.7. Siano X, Y due spazi di Banach e assumiamo che la successione di operatori M_n in $\mathcal{L}(X, Y)$ verifica: per ogni $f \in Y'$ $f(M_n(x)) \to f(M(x))$ dove $M(x) \in Y$. Provare che $M \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Dimostrazione. Proviamo che $M \in L(X, Y)$: per ogni $x, y \in X$ e per ogni $f \in Y'$ si ha che $f(M_n(x + y)) \to f(M(x + y))$. D'altra parte dalla linearita' di M_n e di f, si ha che
$$f(M_n(x + y)) = f(M_n(x) + M_n(y))$$
$$= f(M_n(x)) + f(M_n(y)) \to f(M(x)) + f(M(y)) = f(M(x) + M(y)).$$
Quindi per ogni $f \in Y'$ si ha che
$$f(M(x + y)) = f(M(x) + M(y)).$$
Da un corollario al Teorema di H.B. segue che per ogni $x, y \in X$
$$M(x) + M(y) = M(x + y).$$
Analogamente si prova che $M(\lambda x) = \lambda M(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Per provare che M è continuo, grazie all'esercizio 7.6 è sufficiente provare che per ogni $f \in Y'$ si ha che

$f \circ M \in X'$. Poich è $(f \circ M_n)_n$ è una successione di funzionali lineari e continui su X tali che $f \circ M_n(x) \to f \circ M(x)$, dal Corollario 7.2 al teorema di B.S. segue che $f \circ M \in X'$.

Esercizio 7.8. Sia $X = c_{00}$.

(1) Dimostrare che X non è completo rispetto a nessuna norma;
(2) Muniamo X della norma del sup. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo il funzionale $T_m(x) = m \cdot x_m$. Dimostrare che è lineare e continuo e che $||T_m|| = m$. In particolare $\sup_m ||T_m|| = +\infty$;
(3) provare che per ogni $x \in X$ si ha $\sup_m |T_m(x)| < +\infty$. Perchè non c'è contraddizione con il Teorema di Banach-Steinhaus?

Soluzione

(1) Osserviamo che essendo X generato da una base numerabile, X non è completo rispetto ad alcuna norma.
(2) T_m è un funzionale lineare e continuo su X: infatti
$$T_m(ax + by) = m(ax_m + by_m) = aT_m(x) + bT_m(y).$$
Poi $sup_{||x|| \leq 1} |T_m(x)| \leq m$. Se scelgo $x = (x_n)$ tale che $x_m = 1$ e $x_n = 0$ per ogni $n \neq m$ allora $||x|| = 1$ e $T_m(x) = m$. Quindi $||T_m|| = m$. In particolare $\sup_m ||T_m|| = +\infty$.
(3) Per ogni $x \in X$ esiste n_0 tale che $x_n = 0$ per ogni $n > n_0$. Quindi $\sup_m |T_m(x)| = \sup_m |mx_m| = \sup_{m \leq n_0} |mx_m| \leq n_0 ||x|| \in \mathbb{R}$. Non c' è contraddizione con il Teorema di Banach Steinhaus dal momento che X non è uno spazio metrico completo.

Esercizio 7.9. Sia $X = c_0$ munito della norma del sup.

(1) Sia $\{b_n\}_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : c_0 \to \mathbb{R}$ definito da
$$T_k(a) = \sum_{h=1}^{k} b_h a_h$$
per ogni $a \in c_0$. Provare che T_k è un funzionale lineare e continuo con
$$||T_k|| = \sum_{h=1}^{k} |b_h|.$$
(2) Supponiamo che per ogni $a \in c_0$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ abbia limite finito; si provi allora che il funzionale $T : c_0 \to \mathbb{R}$,
$$T(a) = \lim_{k \to \infty} T_k(a)$$
è lineare e continuo, con $||T|| = \sum_{h=1}^{\infty} |b_h|$ e che $||T_k - T|| \to 0$.

Soluzione

(1) Si può procedere in 2 modi distinti.

<u>Primo modo</u> Osservare che per ogni k la successione (troncata) $x_k = (b_1, \cdots, b_k, 0, \cdots)$ appartiene a l^1 per ogni p e quindi applicare il teorema di rappresentazione del duale di c_0 per dedurre che T_k è un operatore lineare e continuo con norma $||T_k|| = |x_k|_{l^1} = \sum_{h=1}^{k} |b_h|$;

Secondo modo Dimostrare direttamente che l'operatore è lineare. Poi far vedere che

$$|T_k(a)| \leq (\sum_{h=1}^{k} |b_h|)\|a\|_\infty$$

(e ciò garantisce la continuità dell'operatore). Infine scegliere $\bar{a}_k = (a_h^k)_h$ definito da

$$a_h^k = \begin{cases} segno(b_h) = \frac{b_h}{|b_h|} & \text{se } b_h \neq 0 \text{ e } h \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ottenere che $||\bar{a}_k||_\infty = 1$ e $T_k(\bar{a}_k) = \sum_{h=1}^{k} |b_h|$.

(2) Si può procedere in 2 modi distinti per ottenere che $\sum_{h=1}^{\infty} |b_h|$ converge.

Primo modo Per un corollario di BS, il funzionale T, che è limite puntuale di funzionali lineari e continui, è esso stesso lineare e continuo. Inoltre essendo $T(a) = \lim_k T_k(a) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h a_h$, grazie al teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su c_0 segue che la successione $(b_h)_h$ è in l^1 e $||T|| = \sum_{h=1}^{\infty} |b_h|$.

Secondo modo Per il Teorema di B.S., esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_k ||T_k|| = \sup_k \sum_{h=1}^{k} |x_h| \leq M.$$

Ciò implica che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} |x_h|$ converge. In particolare $\sum_{h=1}^{\infty} x_h a_h$ converge per ogni $a = (a_h) \in c_0$ e quindi $T(a) = \lim_k \sum_{h=1}^{k} x_h a_h = \sum_{h=1}^{\infty} x_h a_h$. Inoltre, dal corollario al Teorema di B.S., T è un operatore lineare e continuo tale che

$$|(T - T_k)(a)| = |\sum_{h=k+1}^{\infty} x_h a_h| \leq \sum_{h=k+1}^{\infty} |x_h||a_h| \leq \epsilon ||a||_\infty$$

per $k \geq k_0(\epsilon)$ abbastanza grande (criterio di Cauchy per le serie). Quindi

$$||T - T_k||_{c_0'} \leq \epsilon$$

per $k \geq k_0(\epsilon)$. Ossia $||T - T_k||_{c_0'} \to 0$. Infine

$$||T||_{c_0'} = \lim_k ||T_k||_{c_0'} = \lim_k \sum_{h=1}^{k} |x_h| = \sum_{h=1}^{\infty} |x_h|.$$

Esercizio 7.10. Sia $X = l^p$ con $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $\{b_n\}_n$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : X \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$T_k(a) = \sum_{n=1}^{k} b_n a_n \ \forall a \in X.$$

(1) Provare che se $1 < p \leq +\infty$ allora T_k è un funzionale lineare e continuo con

$$||T_k|| = (\sum_{n=1}^{k} |x_n|^{p'})^{\frac{1}{p'}};$$

(2) provare che se $p = 1$ allora T_k è un funzionale lineare e continuo con

$$||T_k|| = \sup_{1 \le n \le k} |x_n|.$$

(3) Supponendo che per ogni $a \in X$ la successione reale $\{T_k(a)\}_k$ abbia limite finito si provi che la successione $\{x_n\}_n \in l^{p'}$.

Esercizio 7.11. *Sia X uno spazio di Banach e $f : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare che è separatamente continua in ogni variabile. Provare che esiste $C > 0$ tale che $|f(x, y)| \le C|x||y|$ per ogni $x, y \in X$. Dedurre che f è continua.*

Dimostrazione. Sia $y \in X$. Poichè $f(\cdot, y)$ è continua, allora esiste $c_y > 0$ tale che

$$|f(x, y)| \le c_y|x|$$

per ogni $x \in X$. Ora per ogni $x \in X \setminus 0$ sia $f_x(y) = \frac{f(x,y)}{|x|}$. Allora

$$\sup_{x \in X \setminus 0} |f_x(y)| \le c_y.$$

Per il teorema di B.S. (applicato alla famiglia di funzionali lineari e continui $(f_x)_{x \in X}$) vale che esiste $C > 0$ tale che

$$\sup_{x \in X \setminus 0} ||f_x||_{X'} \le C,$$

da cui

$$|f(x, y)| \le C|y||x|$$

per ogni $y \in X$ e per ogni $x \in X$. Infine siano $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq X$ tali che $x_n \to x \in X$ e $y_n \to y \in X$. Allora

$$|f(x_n, y_n) - f(x, y)| = |f(x_n, y_n) - f(x, y_n) + f(x, y_n) - f(x, y)|$$

$$\le |f(x_n, y_n) - f(x, y_n)| + |f(x, y_n) - f(x, y)| \le C|x_n - x||y_n| + C|x||y_n - y| \to 0.$$

Esercizio 7.12 (09-07-2012)**.** *Sia X uno spazio di Banach e sia $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che valga la seguente proprietà: se $(x_n)_n \subseteq [0, 1]$ è convergente, allora per ogni $f \in X'$ la successione reale $f(\alpha(x_n))$ è limitata. Provare che α è limitata su* $[0, 1]$.

Esercizio 7.13 (15-05-2012)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T_n : X \to Y$ una successione di funzionali lineari e continui tali che per ogni $f \in Y'$ la successione $(f \circ T_n)_n$ sia limitata in X'. Dimostrare che la successione $(T_n)_n$ è limitata in $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Esercizio 7.14 (17-09-2012)**.** *Sia X spazio di Banach, $T_n : X \to X$ una famiglia di operatori lineari e continui e $\mathcal{D} \subseteq X$ un sottoinsieme denso tale che:*

$$T_n x \to x \textit{ per } n \to \infty, \ \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} < \infty$

(2) $T_n x \to x, \ \forall x \in X$

Esercizio 7.15. *Siano X, Y spazi di Banach, $T_n : X \to Y$ una famiglia di operatori lineari e continui, $T : X \to Y$ un operatore lineare, $\mathcal{D} \subseteq X$ un sottoinsieme denso tale che:*

$$T_n x \to Tx \text{ per } n \to \infty, \ \forall x \in \mathcal{D}$$

Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) *T è continuo e $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} < \infty$;*

(2) $T_n x \to Tx, \ \forall x \in X$

Esercizio 7.16 (11-01-2013)**.** *Siano X, Y spazi di Banach e sia $\alpha : X \to Y$ una funzione.*

(1) *Dimostrare che α ha immagine limitata se e solo se per ogni $f \in Y'$ si ha che $f \circ \alpha : X \to \mathbb{R}$ ha immagine limitata.*
(2) *Sia $\alpha \in L(X, Y)$ e $T : Y' \to X^*$ è l'applicazione lineare definita da $T(f) = f \circ \alpha$. Provare T è iniettiva se e solo se $\alpha(X)$ è denso in Y.*

8. **Il teorema della mappa aperta e del grafico chiuso**

In generale se $f : X \to Y$ è continua e suriettiva, non è detto che f sia aperta. Infatti siano $X = Y = \mathbb{R}$ e sia $f(x) = x - x^3$. Allora $f(-\infty, 0) = (-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$.

Questo vale se gli spazi sono di Banach ed f è un funzionale lineare. In questa sezione per ogni $r > 0$ e $x_0 \in X$ indicheremo con $B_X(x_0, r) := \{x \in X \ : ||x - x_0||_X < r\}$. Analoga definizione per $B_Y(y_0, r)$ con $y_0 \in Y$. Invece con $B_X := \{x \in X \ : ||x||_X \leq 1\}$. Analoga definizione per B_Y.

Teorema 8.1 (**Teorema della mappa aperta).** *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare, continuo e suriettivo. Allora esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$.*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se C è un insieme convesso di X allora:

(1) se $T : X \to Y$ è lineare allora $T(C)$ è convesso;
(2) $\bar{C}$ è convesso;
(3) $C + C \subseteq 2C$.

Primo step. Proviamo che se X è uno spazio normato, Y è uno spazio di Banach e $T : X \to Y$ è un operatore lineare e suriettivo, allora esiste $c > 0$ tale che

$$B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}.$$

Allo scopo di dimostrare tale asserto, cominciamo con l'osservare che

$$Y = T(X) = T(\bigcup_n nB_X(0,1)) = \bigcup_n nT(B_X) \subseteq \bigcup_n n\overline{T(B_X(0,1))} \subseteq Y$$

ossia $Y = \bigcup_n n\overline{T(B_X)}$.

Poichè Y è uno spazio di Banach, dal lemma di Baire, deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0\overline{T(B_X)}$ abbia interiore non vuoto. Pertanto esiste $B_Y(\bar{y}, 4c) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Proviamo ora che $B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Poichè $\bar{y} \in \overline{T(B_X)}$ anche $-\bar{y} \in \overline{T(B_X)}$ (dalla simmetria della palla e dalla linearita' dell'operatore). Segue che se $x \in B_Y(0, 4c)$ si ha che

$$x = (x + \bar{y}) - \bar{y} \in B_Y(\bar{y}, 4c) + \overline{T(B_X)} \subseteq \overline{T(B_X)} + \overline{T(B_X)}$$

ossia $B_Y(0, 4c) \subseteq \overline{T(B_X)} + \overline{T(B_X)}$. Poichè $B_X)$ è convesso, dalla proprietà (1), (2) sopra, si ha che $\overline{T(B_X)}$ è convesso. Quindi, applicando la proprietà (3), abbiamo che

$$\overline{T(B_X)} + \overline{T(B_X)} \subseteq 2\overline{T(B_X)}$$

da cui segue che $B_Y(0, 4c) \subseteq 2\overline{T(B_X)}$ e quindi $B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$.

Secondo step. Proviamo che se X è uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $T : X \to Y$ è un operatore lineare e continuo tale che $B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$ per qualche $c > 0$ allora $B_Y(0, c) \subseteq T(B_X)$.

Infatti, sia $y_0 \in B_Y(0, c)$. Allora $2y_0 \in B_Y(0, 2c) \subseteq \overline{T(B_X)}$ e quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $w \in B_X$ tale che

$$||2y_0 - Tw||_X < \epsilon.$$

In particolare
$$\exists\, w_1 \in B_X \text{ tale che } ||2y_0 - T(w_1)||_X < c$$
ossia
$$||y_0 - T(\frac{w_1}{2})||_X < \frac{c}{2}.$$
Posto $x_1 := \frac{w_1}{2}$ abbiamo quindi dimostrato che
$$\exists\, x_1 \in \overline{B_X(0,\frac{1}{2})} \text{ tale che } ||y_0 - Tx_1||_Y < \frac{c}{2}.$$
Poiche' $y_1 = 2(y_0 - Tx_1) \in B_Y(0,c)$ applichiamo l'argomento precedente ad y_1. Allora
$$\exists\, w_2 \in B_X \text{ tale che } ||2y_1 - T(w_2)||_X < c$$
ossia
$$||y_0 - Tx_1 - T(\frac{w_2}{4})|| < \frac{c}{2^2}.$$
Posto $x_2 := \frac{w}{2^2} \in \overline{B_X(0,\frac{1}{2^2})}$ abbiamo quindi dimostrato che
$$\exists\, x_2 \in \overline{B_X(0,\frac{1}{2^2})} \text{ tale che } ||y_0 - Tx_1 - Tx_2||_Y < \frac{c}{2^2}.$$
Procedendo cosí si costruisce una successione $(x_n) \subseteq X$ tale che $x_n \in \overline{B_X(0,\frac{1}{2^n})}$ e
$$||y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)||_Y < \frac{c}{2^n}.$$
Sia $z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Allora
$$||z_n||_X \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||_X \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n}$$
e
$$||y_0 - Tz_n||_Y < \frac{c}{2^n}.$$
In particolare, $Tz_n \to y_0$ e, dal criterio di Weistrass, z_n converge a $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con
$$||z||_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$
ossia $z \in B_X$. Poichè T é continuo allora $Tz_n \to Tz$. Quindi $Tz = y_0$. □

Riportiamo anche questa versione del teorema della mappa aperta.

Teorema 8.2. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare e continuo. Se $T(X)$ è di seconda categoria in Y allora $T(X) = Y$ ed esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0,c) \subseteq T(B_X(0,1))$.*

Dimostrazione. Osserviamo che
$$T(X) = T(\bigcup_n nB_X(0,1)) = \bigcup_n nT(B_X(0,1)).$$
Poich è $T(X)$ è di seconda categoria in Y, dalla definizione di spazio di seconda categoria, deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0\overline{T(B_X(0,1)}$ abbia interiore non vuoto. In particolare segue

che $\overline{T(B_X(0,1)}$ ha interiore non vuoto. Sia $B(y_0, 4c) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$. A questo punto la dimostrazione procede analogamente alla dimostrazione del Teorema 8.1. Inoltre se $y \in Y$ allora $c\frac{y}{|y|+1} \in B_Y(0,c)$. Quindi esiste $x \in B_X(0,1)$ tale che $T(x) = c\frac{y}{|y|+1}$ ossia $T(\frac{|y|+1}{c}x) = y$. $\square$

Dal teorema della mappa aperta segue che un operatore lineare, continuo e suriettivo trasforma aperti in aperti e che un operatore lineare, continuo e biettivo ha inverso continuo.

Corollario 8.3. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e suriettivo. Allora per ogni aperto V di X si ha che $T(V)$ è un aperto di Y.*

Dimostrazione. Sia V un aperto di X e sia $y_0 \in T(V)$. Allora esiste $x_0 \in V$ tale che $T(x_0) = y_0$. Poichè V è aperto, esiste $\overline{B_X(x_0,s)} \subseteq V$, ossia $x_0+\overline{B_X(0,s)} \subseteq V$ da cui $y_0+T(\overline{B_X(0,s)}) \subseteq T(V)$. Dal teorema della mappa aperta esiste $c > 0$ tale che $B_Y(0,c) \subseteq T(B_X)$ da cui segue che $B_Y(0,cs) \subseteq T(\overline{B_X(0,s)})$. Quindi $B_Y(y_0,cs) = y_0+B_Y(0,cs) \subseteq y_0+T(\overline{B_X(0,s)}) \subseteq T(V)$. $\square$

Corollario 8.4. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e biettivo. Allora esiste $C > 0$ tale che*

$$\|x\|_X \leq C\|T(x)\|_Y$$

per ogni $x \in X$. In particolare T^{-1} è continuo.

Dimostrazione. Sia $c > 0$ tale che $B_Y(0,c) \subseteq T(B_X)$. In particolare

$$T^{-1}(B_Y(0,c)) \subseteq T^{-1} \circ T(B_X) = B_X.$$

In particolare per ogni $c' < c$ e per ogni $x \in X$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq c'$ vale che $\|x\|_X \leq 1$. Poichè per ogni $x \in X$ si ha che $\|T(c'\frac{x}{|Tx|_Y})\|_Y = c'$, si ottiene che $c'\|\frac{x}{\|Tx\|_Y}\|_X \leq 1$ ossia $\|x\|_X \leq \frac{1}{c'}\|Tx\|_Y$ per ogni $c' < c$. In particolare, per $c' \to c$ si ottiene che la tesi vale per $C = \frac{1}{c}$. $\square$

Corollario 8.5. *Sia X uno spazio normato e siano $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ due norme su X tali che*

(1) *X è completo rispetto ad entrambe*
(2) *esiste $c > 0$ tale che $|\cdot|_2 \leq c|\cdot|_1$.*

Allora le due norme sono equivalenti.

Dimostrazione. Basta osservare che l'operatore identita' $I : (X, |\cdot|_1) \to (X, |\cdot|_2)$ è continuo e biettivo. Dal Corollario 8.4 esiste $C > 0$ tale che

$$|x|_1 \leq C|I(x)|_2 = C|x|_2$$

per ogni $x \in X$. Quindi le due norme sono equivalenti. $\square$

Esempio 8.6. Muniamo $C^1[0,1]$ con la norma $||u||_{C^1} = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ e $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_\infty$. Sia $I : C^1[0,1] \to C[0,1]$ l'operatore definito da $I(u) = u'$. I è lineare e continuo e ha norma 1. Infatti, per ogni $\epsilon > 0$ sia $u_\epsilon(x) = \epsilon \sin \frac{x}{\epsilon}$. Allora

$$u_\epsilon(x) = \epsilon \Longleftrightarrow \frac{x}{\epsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Siccome $x = \frac{\pi}{2}\epsilon \in [0,1]$ per $\epsilon \le \frac{2}{\pi}$ vale che $||u_\epsilon||_\infty = \epsilon$ per $\epsilon \le \frac{2}{\pi}$. Poi $u'_\epsilon(x) = \cos\frac{x}{\epsilon}$ da cui $||u'_\epsilon||_\infty = 1$. Quindi $||u_\epsilon|| = 1+\epsilon$ per $\epsilon \le \frac{2}{\pi}$. In particolare

$$||I|| = \sup_{u\neq 0} \frac{||Iu||_\infty}{||u||_{C^1}} \ge \frac{||u'_\epsilon||_\infty}{||u_\epsilon||_{C^1}} = \frac{1}{1+\epsilon} \to 1$$

quando $\epsilon \to 0$. Ora, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, I è anche suriettivo. Applicando il teorema dell'applicazione aperta, segue che I è aperta. In particolare, se restringiamo I sull'insieme $M := \{u \in C^1[0,1] :\ u(0) = 0\}$, I risulta un isomorfismo da M su $C[0,1]$.

In generale, se X o Y non sono spazi di Banach, un funzionale lineare, continuo e biettivo potrebbe non essere aperto. L'esempio seguente si basa sul fatto che lo spazio $C[0,1]$ non è completo rispetto alla norma $||\cdot||_{L^1}$.

Esercizio 8.7. *Sia $I : (C[0,1], ||\cdot||_\infty) \to (C[0,1], ||\cdot||_{L^1})$ l'operatore identita'. Provare che*

(1) *I è lineare e continuo;*
(2) *I non è una applicazione aperta.*

Dimostrazione. Osserviamo che $C[0,1]$ non è completo rispetto alla norma integrale $||\cdot||_{L^1}$ (vedi Osservazione 2.37). Ora è facile verificare che I è lineare e continuo. Dimostriamo che I non può essere una mappa aperta. Per assurdo, se I fosse aperta, allora I sarebbe un isomorfismo ed esisterebbe $C > 0$ tale che per ogni $u \in C[0,1]$

$$||u||_\infty \le C||u||_1$$

Ma allora la norma $||\cdot||_1$ risulterebbe essere equivalente alla norma $||\cdot||_\infty$. Assurdo.

Esercizio 8.8. *Siano X e Y due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare, continuo e suriettivo. Allora esiste $c > 0$ tale che per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $T(x) = y$ e $||x|| \le C||y||$.*

Dimostrazione. Dal teorema dell'applicazione aperta esiste $c > 0$ tale $B_Y(0,c) \subseteq T(B_X(0,1))$. Sia $y \in Y$. Allora $y' = \frac{y}{||y||}\frac{c}{2} \in B_Y(0,c)$. Quindi, esiste $x' \in B_X(0,1)$ tale che $T(x') = y'$. In particolare $T(x'\frac{2||y||}{c}) = y$. Poniamo $x = x'\frac{2||y||}{c}$. Allora $T(x) = y$ e $||x|| \le \frac{2||y||}{c}$. □

Esercizio 8.9. *Siano X, Y, Z spazi di Banach e $J : Y \to Z$ un operatore lineare e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare, continuo e biettivo. Supponiamo che l'operatore lineare $S = J \circ T$ sia continuo. Provare che J è continuo.*

Dimostrazione. Grazie al teorema della mappa aperta, l'operatore $T^{-1} : Y \to X$ è continuo. In particolare l'operatore $J = J \circ T \circ T^{-1}$ è continuo. □

Esercizio 8.10. *Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare, continuo e iniettivo. Provare che $T^{-1} : T(X) \to X$ è continuo se e solo se $T(X)$ è chiuso in Y.*

Definizione 8.11. *Siano X e Y due spazi normati, M un sottospazio di X e $T : M \to Y$ una funzione. Diremo che T è chiuso se e solo per ogni $(x_n)_n \subseteq M$, $x_n \to x$ in X, $T(x_n) \to y$ in Y vale che*

(1) *$x \in M$*
(2) *$T(x) = y$.*

Dalla definizione segue che T è chiuso se e solo se il suo grafico è chiuso. Se una funzione f è continua e M è chiuso, allora f è chiusa. Osserviamo che in generale il viceversa è falso: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, ha grafico chiuso pur essendo discontinua. Infatti se $(x_n, f(x_n))$ sono tali $x_n > 0$ e $x_n \to x \in \mathbb{R}$ e $\frac{1}{x_n} = f(x_n) \to y \in \mathbb{R}$ allora passando al limite si ottiene $\frac{1}{x} = y$. Quindi l'insieme

$$Graf = \{(x, \frac{1}{x}) : \ x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

è chiuso in quanto h unione di insiemi chiusi.

Teorema 8.12 (Teorema del Grafico chiuso). *Siano $(X, |\cdot|_X)$ e $(Y, |\cdot|_Y)$ due spazi di Banach e $T : X \to Y$ un funzionale lineare. Supponiamo che il grafico di T, ossia l'insieme $Graf(T) := \{(x, T(x)) : \ x \in X\}$, sia un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$. Allora T è continuo. In particolare T è continuo se e solo se T è chiuso.*

Dimostrazione. Consideriamo su X la norma $|x|_T = |x|_X + |Tx|_Y$. Allora $|x|_T \geq |x|_X$ ed essendo $Graf(T)$ chiuso, è facile dedurre che $(X, |\cdot|_T)$ è uno spazio di Banach. Dal corollario 8.5, la norma $|\cdot|_T$ è equivalente a quella iniziale e quindi esiste $C > 0$ tale che $|\cdot|_T \leq C|x|_X$ per ogni $x \in X$ che implica

$$|Tx|_Y \leq |x|_T \leq C|x|_X$$

per ogni $x \in X$.

□

Se nel Teorema del grafico chiuso togliamo l'ipotesi che gli spazi X e Y siano di Banach, il teorema è falso. Vediamo il seguente esempio basato sull'osservazione che $C^1[0, 1]$, munito della norma $||\cdot||_\infty$, non è uno spazio di Banach.

Esempio 8.13. Ricordiamo che $C^1[0, 1]$ non è un sottospazio chiuso di $C[0, 1]$, ossia $C^1[0, 1]$, munito della norma $||\cdot||_\infty$, non è uno spazio di Banach. Consideriamo ora $C^1[0, 1]$ munito della norma $||\cdot||_\infty$.

Sia $I_1 : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ l'operatore definito da $I_1(u) = u'$. Allora I_1 è un operatore lineare, è chiuso, ma non è continuo! Infatti sia $(u_n)_n \subseteq C^1[0, 1]$ tale che $u_n \to u \in C[0, 1]$ rispetto alla norma $||\cdot||_\infty$ e $u_n' = I_1(u_n) \to v \in C[0, 1]$. Dimostriamo che $u \in C^1[0, 1]$ e $I_1(u) = v$. Infatti sia $x \in [0, 1]$. Per $n \to \infty$, passando al limite sotto il segno di integrale, otteniamo che

$$u(x) - u(0) = \lim_n u_n(x) - u_n(0) = \lim_n \int_0^x u_n'(t)dt = \int_0^x v(t)dt.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene allora che

$$u'(x) = v(x)$$

per ogni $x \in [0, 1]$ ossia $Iu = v$. Quindi I_1 è chiuso. Ma non è continuo: basta considerare la successione $u_n(x) = x^n$. Le derivate prime $u_n'(x) = nx^{n-1}$ da cui $\frac{||I_1(u_n)||_\infty}{||u_n||_\infty} = n \to \infty$ ossia I_1 non è limitato. Non vi è contraddizione con il teorema del grafico chiuso in quanto lo spazio $C^1[0, 1]$, munito della norma $||\cdot||_\infty$, non è uno spazio di Banach.

□

Esercizio 8.14. *Sia H uno spazio di Hilbert. Sia V un sottospazio di H e $x \in H$, $y \in V$ tali che*

$$(x - y, v) = 0 \ \forall v \in V.$$

Provare che $y = p_V(x)$.

Esercizio 8.15. *Sia H uno spazio di Hilbert e V un sottospazio di H. Provare che*
(1) $V^\perp = (\bar{V})^\perp$;
(2) $H = \bar{V} \oplus V^\perp$:

Esercizio 8.16. *(Teorema di Pitagora: prima versione) Sia H uno spazio di Hilbert, $v_1, v_2, \cdots v_n \in V$ tra loro ortogonali. Provare che*

$$||\sum_{i=1}^n v_i||^2 = \sum_{i=1}^n ||v_i||^2.$$

Esercizio 8.17. *(Teorema di Pitagora: seconda versione) Sia H uno spazio di Hilbert, $(v_n)_n \in V$ una successione di vettori tra loro ortogonali tali che $\sum_{i=1}^\infty ||v_i||^2 < +\infty$. Provare*

$$||\sum_{i=1}^\infty v_i||^2 = \sum_{i=1}^\infty ||v_i||^2.$$

Dimostrazione. Posto $s_n := \sum_{i=1}^n v_i$, si ha che la successione (s_n) è di Cauchy in H: a tal fine osservare che se $n > m$ si ha che

$$||s_n - s_m||^2 = ||\sum_{i=m+1}^n v_i||^2 = \sum_{i=m+1}^n ||v_i||^2.$$

In particolare esiste $s \in H$ tale che $s_n \to s (=: \sum_{i=1}^\infty v_i)$ in H....

Esercizio 8.18. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx, y) = (x, Ty)$ allora T è continuo.*

Dimostrazione. Proviamo che T è chiuso: sia $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$. Allora

$$(Tx_n, z) = (x_n, Tz)$$

per ogni $z \in H$ da cui

$$(y, z) = (x, Tz) = (Tx, z)$$

per ogni $z \in H$. In particolare $(y - Tx, y - Tx) = 0$ da cui $y = Tx$.

□

Esercizio 8.19. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx, x) \geq 0$ per ogni $x \in X$ allora T è continuo.*

Dimostrazione. Proviamo che T è chiuso: sia $x_n \to x$ e $Tx_n \to y \in H$. Senza perdere di generalita', supponiamo $x = 0$ e proviamo che $y = 0$. Per ipotesi, per ogni $t > 0$ $(T(x_n - ty), x_n - ty) \geq 0$ ossia

$$(T(x_n) - tT(y), x_n - ty) = (T(x_n), x_n) - t(T(x_n), y) - t(T(y), x_n) + t^2(T(y), y) \geq 0.$$

Passanso al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$-t(y,y) + t^2(T(y),y) \geq 0$$

per ogni $t > 0$. Quindi

$$||y||^2 \leq t(T(y),y)$$

per ogni $t > 0$. Per $t \to 0$ otteniamo che $y = 0$.

□

Esercizio 8.20. *Sia $C^1[0,1]$ munito della norma $||u||_{C^1} = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ e $C[0,1]$ sia munito della norma $||\cdot||_\infty$. Sia $I : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx$. Verificare che I ha grafico chiuso. É continuo?*

Dimostrazione. Sia $u_n, u \in C^0[0,1]$ tale che $u_n \to u$ in $C[0,1]$ e $Iu_n \to v \in C^1[0,1]$. Proviamo che $v = Iu$. Poich è $u_n \to u$ uniformente, si può passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere che per ogni $t \in (0,1)$

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} Iu_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t u_n(x)dx = \int_0^t u(x)dx$$

ossia

$$v(t) = \int_0^t u(x)dx.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che per ogni $t \in (0,1)$ $v'(t) = u(t)$ ossia per ogni $t \in (0,1)$

$$I(u)(t) = \int_0^t u(x)dx = \int_0^t v'(x)dx = v(t).$$

Infine I è continuo per il teorema del grafico chiuso essendo $C[0,1]$ e $C^1[0,1]$ spazi di Banach con le norme considerata. □

Esercizio 8.21. *Sia H uno spazio di Hilbert munito del prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ e sia $T : H \to H$ un operatore lineare e continuo. Provare che l'operatore (aggiunto) $T^* : H \to H$ definito da*

$$< T^*x, y >=< x, Ty > \quad \forall x, y \in H$$

è un operatore lineare e continuo.

Esercizio 8.22. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare e continuo che è un'isometria. Dimostrare che $T^*T = I$ (dove T^* è l'operatore aggiunto, I è l'identita').*

Risoluzione: sia $x \in H$. Allora per ogni $y \in Y$, essendo T un'isometria vale che

$$\begin{aligned} ||x-y||^2 &= ||T(x-y)||^2 \\ &= ||T(x) - T(y)||^2 = ||T(x)||^2 + ||T(y)||^2 - 2 < T(x), T(y) >= \\ &= ||T(x)||^2 + ||T(y)||^2 - 2 < T^*T(x), y >= \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 - 2 < T^*T(x), y > \end{aligned}$$

ossia

$$||x||^2 + ||y||^2 - 2 < x, y >= ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2 < T^*T(x), y > .$$

Cio' implica

$$< x, y > = < T^*T(x), y >$$

per ogni $y \in H$. Quindi $x = T^*T(x)$ per ogni $x \in H$ da cui $T^*T = I$.

Esercizio 8.23. *Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx)(y) = (Ty)(x)$ per ogni $x, y \in X$ allora T è continuo.*

Esercizio 8.24. *Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ un operatore lineare. Provare che se $(Tx)(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$ allora T è continuo.*

Esercizio 8.25. *Per ogni $u \in C^1[0,1]$ sia $||u|| = |u(0)| + ||u'||_\infty$.*

(1) *Verificare che $\|\cdot\|$ è una norma su $C^1[0,1]$ che rende lo spazio uno spazio di Banach.*
(2) *Sia $C[0,1]$ munito della norma $||\cdot||_\infty$ e sia $I : C^1[0,1] \to C[0,1]$ l'operatore definito da $I(u)(t) = u'(t)$. Verificare che I ha grafico chiuso. E' continuo?*

9. **La topologie debole e debole***.

9.1. **La topologia debole $\sigma(E, E')$.** Sia E uno spazio normato e sia E' il suo duale topologico. Vogliamo costruire su E la topologia meno fine che renda continue tutte le applicazioni $f : E \to \mathbb{R}$ con $f \in E'$. Applichiamo quanto fatto nella sottosezione 1.4 con $X = E$, $Y_i = \mathbb{R}$ e $(\varphi_i)_{i\in I} = (\varphi_f)_{f\in E'}$ dove $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ e' la funzione $\varphi_f(x) = f(x)$. Costruiamo la topologia meno fine che rende continue le applicazioni $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$. Chiameremo **topologia debole** tale topologia e la indicheremo con $\sigma(E, E')$ (mentre chiameremo **topologia forte** quella indotta dalla norma e la indicheremo con $\beta(E)$). Una base di aperti per questa topologia è la famiglia di intersezioni finite

$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} f_i^{-1}(V_i) : \ V_i \text{ aperto di } \mathbb{R}, \ f_i \in E' \}.$$

Inoltre se $(x_n) \subseteq E$ e $x_0 \in E$ scriveremo $x_n \rightharpoonup x_0$ per indicare che la successione (x_n) σ-converge a x_0 e diremo che la successione (x_n) **converge debolmente** a x_0. Grazie alla seguente proposizione, il limite debole è unico:

Proposizione 9.1. *La topologia debole $\sigma(E, E')$ è separata.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in E$, $x \neq y$. Da un corollario al teorema di HB, esiste $f \in E'$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Supponiamo $f(x) < f(y)$ e sia $f(x) < \alpha < f(y)$. Allora gli insiemi disgiunti $U := f^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $V := f^{-1}(\alpha, +\infty)$ sono aperti rispetto alla topologia debole e sono tali che $x \in U$, $y \in V$. □

Inoltre, grazie alla Proposizione 1.43, si ha che

$$x_n \rightharpoonup x_0 \Longleftrightarrow f(x_n) \to f(x_0) \ \forall f \in E'. \tag{9.1}$$

Proposizione 9.2. *Per ogni $x_0 \in E$ la famiglia di aperti*

$$\mathcal{U}(x_0) := \{U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon} : \ \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \ f_i \in E' \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ \}$$

dove

$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) := \{x \in E : | < f_i, x - x_0 > | < \epsilon, \ 1 \leq i \leq n\}$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni del punto x_0 rispetto alla topologia debole $\sigma(E, E')$.

Dimostrazione. Osserviamo intanto che

$$\begin{aligned} U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in E : f_i(x) \in]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $V_i =]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[$. Poiché $f_i^{-1}(V_i)$ è aperto rispetto alla topologia debole, gli insiemi $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ sono aperti rispetto alla topologia debole. Inoltre se $x_0 \in V$ dove V è un aperto rispetto alla topologia debole allora esiste $n \in \mathbb{N}$, esistono $f_1, \cdots, f_n \in E'$ e $V_i, \cdots, V_n$ aperti di $\mathbb{R}$ tali che

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subseteq V.$$

Quindi $f_i(x_0) \in V_i$ $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ da cui segue che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[\subseteq V_i$$

$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Quindi

$$U_{f_1, \cdots, f_n, \epsilon}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon[) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subseteq V.$$

□

Proposizione 9.3. *Sia E uno spazio normato e sia $(x_n) \subseteq E$. Allora vale che:*

(i) *se $x_n \to x_0$ in E (ossia se $||x_n - x_0|| \to 0$) allora $x_n \rightharpoonup x_0$;*

(ii) *se $x_n \rightharpoonup x_0$ allora la successione (x_n) è limitata in E e*

$$||x_0|| \leq \liminf_n ||x_n||$$

(ossia la norma è sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole);

(iii) *se $x_n \rightharpoonup x_0$ e $(f_n) \subseteq E'$ è tale che $||f_n - f_0||_{E'} \to 0$ allora $f_n(x_n) \to f(x_0)$.*

Dimostrazione.

(i) Se $x_n \to x_0$ in E e $f \in E'$ vale che $f(x_n) \to f(x_0)$. Quindi dalla (9.1) segue la tesi;

(ii) se $x_n \rightharpoonup x_0$ allora per ogni $f \in E'$ vale che $f(x_n) \to f(x_0)$. Quindi la successione $(f(x_n))_n$ è limitata in $\mathbb{R}$ per ogni $f \in E'$. Applicando il corollario 7.4 a $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ segue che la successione $(x_n)_n$ è limitata in E. Inoltre per ogni $f \in E'$ con $||f||_{E'} = 1$ vale che

$$|f(x_0)| = \lim_n |f(x_n)| \leq \liminf_n ||x_n||$$

da cui, applicando uno dei corollari al Teorema di HB, segue che

$$||x_0|| = \sup_{f \in E',\ ||f||_{E'}=1} |f(x)| \leq \liminf_n ||x_n||;$$

(iii) se $x_n \rightharpoonup x_0$, per la parte (ii) esiste $M > 0$ tale che $\sup_n ||x_n|| \leq M$. Sia $(f_n) \subseteq E'$ tale che $||f_n - f_0||_{E'} \to 0$ allora

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x_0)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \\ &\leq ||f_n - f||_{E'} ||x_n|| + |f(x_n) - f(x_0)| \\ &\leq M||f_n - f||_{E'} + |f(x_n) - f(x_0)| \end{aligned}$$

che tende a 0 per $n \to \infty$.

□

Osservazione 9.4. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $(x_n) \subseteq E$.Se $x_n \rightharpoonup x_0$ in H e se $||x|| = \lim_n ||x_n||$ allora $x_n \to x$ in H. Infatti*

$$||x_n - x||^2 =< x_n - x, x_n - x >= ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2 < x_n, x > \to 0.$$

Osservazione 9.5. Sia E uno spazio normato di dimensione finita N. Allora la topologia debole coincide con la topologia forte. Infatti ovviamente un aperto rispetto alla topologia debole è anche un aperto per la topologia forte. Per provare il viceversa è sufficiente dimostrare che per ogni palla $B(x_0, r) \subseteq E$ esiste V intorno di x_0 per la topologia debole tale che $V \subseteq B(x_0, r)$ (questo implica che ogni aperto "forte" si rappresenta come unioni di aperti deboli. Pertanto e' un aperto "debole"). Sia $\{e_1, \cdots, e_N\}$ una base ortonormale per E e sia $\Pi_i : E \to \mathbb{R}$ la proiezione sull'i-ma componente ossia se $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$, allora $\Pi_i(x) = x_i$. Per ogni $i \in \{1, \cdots, N\}$ l'applicazione Π_i è lineare e continua (essendo E di dimensione finita). Allora scelto $f_i = \Pi_i$, $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon N < r$ vale che

$$||x - x_0|| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i - x_{0,i}| = \sum_{i=1}^{N} |f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \epsilon N \leq r$$

per ogni $x \in U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ ossia $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) \subseteq B(x_0, r)$.

Osservazione 9.6. Sia E uno spazio di Banach di dimensione infinita, $x_0 \in E$, $f_1, \cdots, f_n \in E'$, $\epsilon > 0$. Allora:

(1) l' intorno $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ contiene una retta passante per x_0. Infatti sia $T : E \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare definita da $T(x) = (f_i(x))_{1 \leq i \leq n}$. Essendo T non iniettiva (altrimenti E di dimensione finita), esiste $\bar{x} \neq 0$ tale che $T(\bar{x}) = 0$. Allora la retta $x_0 + t\bar{x}$ $(t \in \mathbb{R})$ è tutta contenuta in $U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0)$ in quanto

$$|f_i(x_0 + t\bar{x}) - f_i(x_0)| = 0 < \epsilon$$

per ogni $1 \leq i \leq N$. Il fatto che ogni aperto per la topologia debole contiene rette implica che gli aperti per la topologia debole sono illimitati e che quindi le palle $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ non possono essere aperte per la topologia debole. In particolare l'insieme $B_X(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ ha interiore vuoto rispetto alla topologia debole. La topologia debole è quindi strettamente meno fine della topologia forte negli spazi di dimensione infinita;

(2) Vale che $B_X(0, 1) \subseteq \overline{S_1}^{\sigma(E,E')}$ dove $S_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Infatti se $x_0 \in B_X(0, 1)$ e V è un intorno di x_0 rispetto alla topologia debole, allora sappiamo che esiste $\bar{x} \in X$ tale che la retta $x_0 + t\bar{x}$ $(t \in \mathbb{R})$ è tutta contenuta in V. In particolare esiste un punto $x_1 \in V$ di norma 1: basta infatti osservare che la funzione $g(t) = \|x_0 + t\bar{x}\|$ è continua e tale che $g(0) < 1$ e $\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$. Quindi si ha che $V \cap S_1 \neq \emptyset$ per ogni V intorno "debole" di x_0, ossia $x_0 \in \overline{S_1}^{\sigma(E,E')}$;

(3) Dalla parte (2) segue che S_1, pur essendo chiuso forte, non è chiuso rispetto alla topologia debole.

Mentre in generale un insieme chiuso per la topologia forte non è detto che sia chiuso per la topologia debole, per gli insiemi convessi la proprietà di essere chiuso coincide nelle due topologie.

Teorema 9.7. *Sia E uno spazio di Banach e sia $C \subseteq E$ un sottoinsieme convesso. Allora C è debolmente chiuso se e solo se C è fortemente chiuso.*

Dimostrazione. Ovviamente se C è debolmente chiuso allora C è fortemente chiuso in quanto $\sigma(E,E') \prec \beta(E)$ dove $\beta(E)$ è la topologia forte. Viceversa sia C fortemente chiuso. Dimostriamo che il suo complementare $E \setminus C$ è aperto per la topologia debole ossia che per ogni $x_0 \in E \setminus C$ esiste un intorno aperto di x_0 rispetto la topologia debole e tutto contenuto in $E \setminus C$. Sia $x_0 \in E \setminus C$. Dal teorema di HB posso separare in senso stretto il compatto (convesso) $\{x_0\}$ dal convesso chiuso C attraverso un iperpiano chiuso, ossia esiste $f \in E'$ ed esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) < \alpha < f(x)$ per ogni $x \in C$. L'insieme $f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ è aperto per la topologia debole, contiene x_0 ed è tutto contenuto in $E \setminus C$. $\square$

Dal Teorema 9.7 segue che

Corollario 9.8. *Ogni funzione $\varphi : E \to]-\infty,+\infty]$ convessa e semicontinua per la topologia forte é semicontinua inferiormente per la topologia debole (in particolare é sequenzialmente semicontinua inferiormente per la topologia debole).*

Corollario 9.9. *Sia E uno spazio di Banach e sia $C \subseteq E$ un sottoinsieme convesso. Allora*
$$\bar{C}^{\sigma(E,E')} = \bar{C}^{\beta(E')}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\bar{C}^{\sigma(E,E')}$, essendo debolmente chiuso, e' anche fortemente chiuso. Poich è $C \subseteq \bar{C}^{\sigma(E,E')}$, si ha che
$$\bar{C}^{\beta(E')} \subseteq \bar{C}^{\sigma(E,E')}.$$
D'altra parte l'insieme $\bar{C}^{\beta(E')}$ e' un insieme convesso (perché chiusura di un insieme convesso) ed e' fortemente chiuso. Dal Teorema 9.7 si ha che $\bar{C}^{\beta(E')}$ è debolmente chiuso. Essendo C contenuto in $\bar{C}^{\beta(E')}$ segue che $\bar{C}^{\sigma(E,E')} \subseteq \bar{C}^{\beta(E')}$. $\square$

Osservazione 9.10. Dal corollario precedente segue che l'insieme convesso $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ è debolmente chiuso in E. Dall'Osservazione 9.6 (parte (2)) sappiamo che
$$S_1 \subseteq \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\} \subseteq \bar{S_1}^{\sigma(E,E')}.$$
In particolare $\bar{S_1}^{\sigma(E'E')}$ coincide con l'insieme B_E ossia $\bar{S_1}^{\sigma(E,E')} = B_E$.

Concludiamo questa sezione con la seguente osservazione:
$$\varphi : (E, \sigma(E,E')) \to \mathbb{R} \text{ è un funzionale lineare e continuo } \iff \varphi \in E'.$$

Questa proprietà si può generalizzare nel modo seguente.

Teorema 9.11. *Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare. Allora $T : (E, \beta(E)) \to (F, \beta(F))$ è continuo se e solo se $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$ è continuo.*

Dimostrazione. $'' \Longrightarrow''$ Sia $T : (E, \beta(E)) \to (F, \beta(F))$ continuo. Per provare che $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$ è continuo, grazie alla Proposizione 1.44 (applicata allo spazio $(X,\sigma) = (F, \beta(F))$, bastera' dimostrare che $\forall f \in F'$ il funzionale
$$f \circ T : (E, \sigma(E,E')) \to \mathbb{R}$$
è continuo. Sia $f \in F'$. Poichè T è continuo rispetto le topologie forti, si ha che $f \circ T \in E'$. In particolare, dalla definizione di topologie debole, segue che $f \circ T$ è continuo rispetto alla topologia debole.

$'' \Longleftarrow''$ Sia $T : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ continuo. In particolare il $GrafT$ è un insieme chiuso in $E \times F$ rispetto la topologia prodotto $\sigma(E, E') \times \sigma(F, F')$. Se proviamo che il $GrafT$ è chiuso anche per la topologia forte di $E \times F$, dal Teorema del Grafico chiuso segue che $T : (E, \beta(E)) \to (F, \beta(F))$ è continuo. Se $(x_n) \to x$ in X e $Tx_n \to y_0$ in Y allora $(x_n) \rightharpoonup x$ in X e $Tx_n \rightharpoonup y_0$ in Y. Essendo il $GrafT$ un insieme chiuso in $E \times F$ rispetto la topologia prodotto $\sigma(E, E') \times \sigma(F, F')$ segue che $y_0 = T(x_0)$. □

Osservazione 9.12. Si osservi in generale che se (X, τ) e (Y, σ) sono due spazi topologici, Y separato, e $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ é continua, allora $\text{Graf}f = \{(x, f(x))\ \ x \in X\}$ é chiuso nella topologia prodotto di $X \times Y$ (in particolare è sequenzialmente chiuso). Proviamo infatti che il complementare é aperto: se $(x, y) \notin \text{Graf}f$ allora $f(x) \neq y$. Quindi esiste U_1 intorno di $f(x)$ e U_2 intorno di y tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Usando la continuitá di f esiste V intorno di x tale che $f(V) \subseteq U_1$. In particolare $V \times U_2 = \Pi_X^{-1}(V) \cap \Pi_Y^{-1}(U_2)$ è un aperto per la topologia prodotto di $X \times Y$, contiene (x, y) e $V \times U_2 \subseteq (X \times Y) \setminus \text{Graf}f$.

9.2. **La topologia debole* $\sigma(E', E)$.** Sia E uno spazio di Banach e sia E' il suo duale topologico. Vogliamo costruire su E' la topologia meno fine che renda continue tutte le applicazioni $(\varphi_x)_{x \in E}$ dove $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ è definita da

$$\varphi_x(f) = f(x).$$

Costruiamo tale topologia applicando quanto fatto nella Sezione 1.4 con $X = E'$, $Y_i = \mathbb{R}$ e $(\varphi_i)_{i \in I} = (\varphi_x)_{x \in E}$. Chiameremo **topologia debole*** tale topologia e la indicheremo con $\sigma(E', E)$. Un base di aperti per questa topologia è la famiglia di intersezioni finite

$$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{finita} \varphi_{x_i}^{-1}(V_i) : \ V_i \text{ aperto di } \mathbb{R},\ x_i \in E\}.$$

Inoltre se $(f_n) \subseteq E'$ e $f_0 \in E'$ scriveremo $f_n \rightharpoonup^* f_0$ per indicare che la successione (f_n) $\sigma(E', E)$-converge a f_0 e diremo che la successione (f_n) converge rispetto la topologia debole $*$ a f_0. Grazie alla proposizione 1.43 si ha che

$$f_n \rightharpoonup^* f_0 \Longleftrightarrow f_n(x) \to f_0(x) \ \ \forall x \in E$$

ossia coincide con la convergenza puntuale degli operatori.

Proposizione 9.13. *La topologia debole $\sigma(E', E)$ è separata.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in E'$, $f \neq g$. Allora esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) \neq g(x_0)$. Sia $f(x_0) < \alpha < g(x_0)$. Allora gli insiemi disgiunti $U := \varphi_{x_0}^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $V := \varphi_{x_0}^{-1}(\alpha, +\infty)$ sono aperti in E' rispetto alla topologia debole* e sono tali che $f \in U$, $g \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. □

Le dimostrazioni delle seguenti proposizioni sono simili a quelle delle analoghe proprietà della topologia debole $\sigma(E, E')$.

Proposizione 9.14. *Per ogni $f_0 \in E'$ la famiglia di aperti*

$$\mathcal{U}(f_0) := \{U_{x_1, \cdots, x_n, \epsilon} : \ x_i \in E \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, n \in \mathbb{N},\ \epsilon > 0\}$$

dove

$$U_{x_1, \cdots, x_n, \epsilon}(f_0) := \{f \in E' : | < f - f_0, x_i > | < \epsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni del punto f_0 rispetto alla topologia debole*.

Proposizione 9.15. *Sia E uno spazio di Banach e sia $(f_n) \subseteq E'$. Allora vale che:*

(i) *se $f_n \to f_0$ in E' (ossia se $||f_n - f_0||_{E'} \to 0$) allora $f_n \rightharpoonup^* f_0$;*
(ii) *se $f_n \rightharpoonup^* f_0$ allora la successione (f_n) è limitata in E' e $||f_0|| \leq \liminf_n ||f_n||$ (ossia la norma è sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole $*$);*
(iii) *se $f_n \rightharpoonup^* f_0$ e $(x_n) \subseteq E$ è tale che $||x_n - x_0||_E \to 0$ allora $f_n(x_n) \to f_0(x_0)$.*

Dimostrazione.

(i) segue dal fatto che la convergenza rispetto alla norma implica la puntuale;
(ii) segue dal Corollario 7.2;
(iii) segue dall'Esercizio 7.3.

La seguente proposizione afferma che i funzionali lineari e continui $\varphi : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ sono tutti della forma $\varphi = \varphi_x$.

Proposizione 9.16. *Sia $\varphi : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Allora esiste $x \in E$ tale che $\varphi = \varphi_x$ ossia esiste $x \in E$ tale che*

$$\varphi(f) = f(x) \ \forall x \in E.$$

(senza dimostrazione)

Teorema 9.17. (di Banach-Alaoglou-Bourbaki) *La palla $B_{E'} = \{f \in E' : \ \|f\|_{E'} \leq 1\}$ è debolmente* compatta.*

Dimostrazione. Muniamo $\mathbb{R}^E$ della topologia prodotto Π che è la topologia meno fine su $\mathbb{R}^E$ che rende continue le proiezioni $\Pi_x : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}$ definite da $\Pi_x((\omega_y)_{y\in E}) = \omega(x)$. Consideriamo l'applicazione iniettiva $\Phi : E' \to \mathbb{R}^E$ definita da

$$\Phi(f) = (f(y))_{y\in E}.$$

Allora, grazie alla Proposizione 1.43, l'applicazione

$$\Phi : (E', \sigma(E', E)) \to (\mathbb{R}^E, \Pi)$$

è continua se e solo se per ogni $x \in E$ è continua l'applicazione

$$\Pi_x \circ \Phi : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}.$$

Fissato $x \in E$ vale che

$$\Pi_x \circ \Phi(f) = f(x) = \varphi_x(f)$$

per ogni $f \in E'$, ossia $\Pi_x \circ \Phi = \varphi_x$, e quindi l'applicazione $\Pi_x \circ \Phi$ risulta essere continua rispetto la topologia debole* per la definizione stessa di tale topologia.

Proviamo che anche la funzione inversa

$$\Phi^{-1} : (\Phi(E'), \Pi\left|_{\Phi(E')}\right.) \to (E', \sigma(E', E))$$

è continua: grazie alla Proposizione 1.43 tale applicazione è continua se e solo se per ogni $x \in E$ è continua l'applicazione $\varphi_x \circ \Phi^{-1} : (\Phi(E), \Pi\left|_{\Phi(E')}\right.) \to \mathbb{R}$. Poiché $\varphi_x \circ \Phi^{-1}((f(y)_{y\in E})) = f(x) = \Pi_x((f(y)_{y\in E})$ per ogni $x \in E$ e per ogni $f \in E'$ (ossia $\varphi_x \circ \Phi^{-1} = \Pi_x$ per ogni $x \in E$), la continuita' della mappa $\varphi_x \circ \Phi^{-1} : (\Phi(E), \Pi\left|_{\Phi(E')}\right.) \to \mathbb{R}$ segue dal fatto che $\Phi(E)$ è munito della topologia restrizione della topologia prodotto Π. Segue allora che Φ :

$(E', \sigma(E', E)) \to (\Phi(E'), \Pi\,|_{\Phi(E')})$ è un omeomorfismo e come tale la sua inversa trasforma compatti in compatti. Osserviamo che

$$\Phi(B_{E'}) = \{f : E \to \mathbb{R} : f(x+y) - f(x) - f(y) = 0,\ f(\lambda x) - \lambda f(x) = 0\ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$= \{(w_z)_z \in \mathbb{R}^E : w_{x+y} - w_x - w_y = 0,\ w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0,\ |w_x| \leq ||x||\ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definiti quindi

$$I^E = \prod_{x \in E} [-||x||, ||x||],$$

$$K_{x,y} := \{(w_z)_z \in \mathbb{R}^E :\ w_{x+y} - w_x - w_y = 0\},$$

$$E_{x,\lambda} := \{(w_z)_z \in \mathbb{R}^E :\ w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0\}$$

vale che

$$\Phi(B_{E'}) = \big(\bigcap_{x,y,\lambda} K_{x,y}\big) \cap \big(\bigcap_{x \in E, \lambda \in \mathbb{R}} E_{x,\lambda}\big) \cap I^E.$$

Grazie al Teorema di Ticonoff, il prodotto di un numero qualsiasi di insiemi compatti è compatto rispetto la topologia prodotto (quindi I^E è compatto in $\mathbb{R}^E$). Inoltre poiché

$$K_{x,y} = \{w \in \mathbb{R}^E :\ (\Pi_{x+y} - \Pi_x - \Pi_y)(w) = 0\} = Ker(\Pi_{x+y} - \Pi_x - \Pi_y)$$

e

$$E_{x,\lambda} = \{w \in \mathbb{R}^E :\ (\Pi_{\lambda x} - \lambda \Pi_x)(w) = 0\} = Ker(\Pi_{\lambda x} - \lambda \Pi_x)$$

e le proiezioni sono continue rispetto la topologia prodotto Π, si ha che per ogni $x, y \in E$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ gli insiemi $K_{x,y}$ e $E_{x,\lambda}$ sono chiusi in $\mathbb{R}^E$ munito della topologia prodotto. Poiché

$$\Phi(B_{E'}) = \big(\bigcap_{x,y,\lambda} K_{x,y}\big) \cap \big(\bigcap_{x \in E, \lambda \in \mathbb{R}} E_{x,\lambda}\big) \cap I^E$$

é un insieme chiuso contenuto nel compatto I^E, è esso stesso un insieme compatto in $\Phi(E')$ munito della restrizione della topologia prodotto. Quindi la palla $B_{E'} = \Phi^{-1}(\Phi(B_{E'}))$ è debolmente* compatta. □

Osservazione 9.18. *Si osservi che grazie al fatto che $B_{E'}$ è debolmente* compatta, tutte le palle $\overline{B(f_0, r)} = \{f \in E' :\ \|f - f_0\|_{E'} \leq r\}$ sono debolmente* compatte. Osservare infatti che l'applicazione $T_{f_0,r} : (E', \sigma(E', E)) \to (E', \sigma(E', E))$ definita come $T_{f_0,r}(f) = rf + f_0$ é continua e che $T(B_{E'}) = \overline{B(f_0, r)}$.*

9.3. **Gli spazi riflessivi.** Sia E spazio di Banach, sia E' il suo duale e sia $E'' := (E')'$. Chiamiamo **evalutation** o **valutazione** l'applicazione $J : E \to E''$ che ad ogni x associa il funzionale lineare e continuo $Jx : E' \to \mathbb{R}$ definito da

$$< Jx, f >= f(x)\ \ \forall f \in E'.$$

(ossia Jx coincide con il funzionale φ_x definito nella sezione dedicata alla topologia debole*). Si osservi che $Jx \in E''$ e J è un'isometria. Infatti Jx è lineare e da uno dei corollari al teorema di Hahn-Banach si ha che

$$\sup_{f \in E' :\ ||f|| \leq 1} | < Jx, f > | = \sup_{f \in E' :\ ||f|| \leq 1} |f(x)| = ||x||$$

da cui $Jx \in E''$ e $||Jx||_{E''} = ||x||$.

Definizione 9.19. *Lo spazio E si dice* **riflessivo** *se J è suriettiva su E''.*

Osservazione 9.20. Uno spazio E è riflessivo se e solo se tutti i funzionali lineari su E' continui rispetto la topologia forte sono della forma φ_x.

In particolare la famiglia $(\varphi_\xi)_{\xi\in E''}$ (che genera la topologia $\sigma(E', E'')$ su E') coincide con la famiglia $(\varphi_x)_{x\in E}$ ossia se E é riflessivo, su E' la topologia debole e debole* coincidono.

Osservazione 9.21. Se $dimE < +\infty$ allora J è suriettivo (in quanto $dimE = dimE' = dimE''$). In particolare la topologia $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$.

Osservazione 9.22. Sia E uno spazio normato di dimensione finita N. Allora la topologia debole* di E' coincide con la topologia forte. Infatti $\sigma(E', E'') = \beta(E')$ per l'osservazione 9.5 e $\sigma(E', E'') = \sigma(E', E)$ in quanto l'applicazione J è suriettiva e quindi le famiglie di funzioni $(\varphi_x)_{x\in E}$ e $(\varphi_\xi)_{\xi\in E''}$ coincidono.

Teorema 9.23. (di Kakutani) *E è riflessivo se e solo se la palla $B_E = \{x \in E : \|x\|_E \le 1\}$ è $\sigma(E, E')$ compatta.*

Allo scopo di dimostrare l'implicazione "$\Longleftarrow$" premettiamo il seguente lemma (senza dimostrazione) :

Lemma 9.24. (di Goldstine) *L'insieme $J(B_E)$ è denso in $B_{E''}$ rispetto la topologia debole* $\sigma(E'', E')$.*

Dimostrazione. (del Teorema 9.23).

"$\Longrightarrow$" Essendo J un'isometria suriettiva si ha che $B_E = J^{-1}(B_{E''})$. Dal Teorema di Banach-Alouglu-Bourbaki si ha che $B_{E''}$ è debolmente* compatta in E'' ossia $\sigma(E'', E')$-compatta. Se proviamo che

$$J^{-1} : (E'', \sigma(E'', E')) \to (E, \sigma(E, E')) \tag{9.2}$$

è continua, allora seguirá che $B_E = J^{-1}(B_{E''})$ è $\sigma(E, E')$-compatta (perché immagine di un compatto tramite una funzione continua). Grazie alla Proposizione 1.44, l'applicazione (9.2) è continua se e solo se $\forall f \in E'$ l'applicazione $f \circ J^{-1} : (E'', \sigma(E'', E')) \to \mathbb{R}$ è continua. Fissiamo $f \in E'$, $\xi \in E''$ e $x \in E$ tale che $Jx = \xi$. Allora

$$f \circ J^{-1}(\xi) = f(x) =< Jx, f >=< \xi, f >= \phi_f(\xi)$$

ossia $f \circ J^{-1} = \phi_f$ dove $\phi_f : E'' \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $\phi_f(\xi) = \xi(f)$. Essendo la topologia debole* su E'' la topologia generata dalle funzioni $(\phi_f)_{f\in E'}$, segue che $f \circ J^{-1} : (E'', \sigma(E'', E')) \to \mathbb{R}$ è continua.

"$\Longleftarrow$" Dal lemma di Goldstine si ha che $J(B_E)$ è densa in $B_{E''}$ rispetto la topologia $\sigma(E'', E')$. Se proviamo che $J(B_E)$ è compatta rispetto la topologia $\sigma(E'', E')$, allora $J(B_E) = B_{E''}$. Essendo J un'isometria, si conclude facilmente che $J(E) = E''$. Poiché J è continua, per il Teorema 9.11 l'applicazione

$$J : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E''')) \tag{9.3}$$

è continua. Essendo la topologia $\sigma(E'', E')$ meno fine della topologia $\sigma(E'', E''')$ segue che

$$J : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E')) \tag{9.4}$$

è continua. Poiché per ipotesi B_E è $\sigma(E, E')$-compatta segue che $J(B_E)$ è $\sigma(E'', E')$-compatta. □

Osservazione 9.25. *Si osservi che grazie al fatto che in uno spazio riflessivo B_E è debolmente compatta, tutte le palle $\overline{B(x_0,r)} = \{x \in E : \ \|x - x_0\|_{E'} \leq r\}$ sono debolmente compatte in uno spazio riflessivo. Osservare infatti che l'applicazione $T_{x_0,r} : (E, \sigma(E,E')) \to (E, \sigma(E,E'))$ definita come $T_{x_0,r}(x) = rx + x_0$ é continua e che $T(B_E) = \overline{B(x_0,r)}$.*

Corollario 9.26. *Sia E uno spazio riflessivo, sia C un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato. Allora C è $\sigma(E,E')$-compatto.*

Dimostrazione. Essendo C un convesso chiuso, per il Teorema 9.7, C è anche $\sigma(E,E')$-chiuso. Inoltre essendo C limitato, si ha che esiste $R > 0$ tale che $C \subseteq \overline{B(0,R)}$. Quindi C è un sottoinsieme $\sigma(E,E')$-chiuso contenuto in un insieme $\sigma(E,E')$-compatto. Allora C è $\sigma(E,E')$-compatto. $\square$

Esercizio 9.27. *Sia E uno spazio riflessivo, sia C un sottoinsieme convesso. Provare che C è $\sigma(E,E')$-compatto se e solo se C è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. " $\Longleftarrow$ " segue dal Corollario 9.26. " $\Longrightarrow$ " Essendo C $\sigma(E,E')$-compatto, dalla Proposizione 1.22 si ha che C è anche $\sigma(E,E')$-chiuso. Essendo C convesso, dalla Proposizione 9.7 si ha che C è (fortemente) chiuso. Allo scopo di provare che C è limitato, usiamo il Corollario 7.4. Proviamo quindi che per ogni $f \in E'$ l'insieme $f(C) = \{f(c) : c \in C\}$ è limitato in $\mathbb{R}$. Questo è una facile conseguenza del fatto che ogni $f \in E'$ è $\sigma(E,E')$-continua e come tale trasforma insiemi $\sigma(E,E')$-compatti in insiemi compatti (e quindi limitati) di $\mathbb{R}$.

Osservazione 9.28. Si noti che nell'esercizio precedente la dimostrazione di " $\Longrightarrow$ " non usa la riflessività dello spazio. Quindi, applicando la stessa dimostrazione, si ha che in uno spazio E normato qualunque

(1) se $C \subseteq E$ è $\sigma(E,E')$-compatto allora C è $\sigma(E,E')$-chiuso e limitato;
(2) se $C \subseteq E$ è convesso e $\sigma(E,E')$-compatto allora C è fortemente chiuso e limitato.

Allo stesso modo, applicando il Corollario 7.5 invece del Corollario 7.4 e il Teorema di Kakutani, si puo' provare che

Esercizio 9.29. *Sia E uno spazio di Banach e sia $C' \subseteq E'$. Provare che C' è $\sigma(E',E)$-compatto se e solo C è $\sigma(E',E)$-chiuso e limitato.*

Corollario 9.30. *Sia E uno spazio riflessivo, sia $F \subseteq E$ un sottospazio chiuso. Allora F è riflessivo.*

Dimostrazione. Grazie al Teorema di Kakutani, è sufficiente dimostrare che B_F è $\sigma(F,F')$-compatta. Essendo F un sottospazio chiuso, applicando il Corollario 9.26 si ha che F è $\sigma(E,E')$-chiuso. Poichè $B_F = B_E \cap F$ e B_E è $\sigma(E,E')$-compatta, segue che B_F è $\sigma(E,E')$-compatta. Se proviamo che $\sigma(E,E')_{|F} = \sigma(F,F')$ abbiamo concluso. A tal scopo dimostriamo che le famiglie di funzionali che generano le due topologie coincidono. Se $f \in F'$ allora, grazie al teorema di Hahn-Banach, si ha che $\exists\ g \in E'$ tale che $g_{|F} = f$. Viceversa se $f \in E'$ allora $f_{|F} \in F'$. $\square$

Corollario 9.31. *Sia E uno spazio riflessivo, sia C un sottoinsieme convesso chiuso non vuoto. Sia $\varphi : C \to]-\infty, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente, $\varphi \not\equiv +\infty$. Se C non è limitato si assuma ulteriormente che*

$$\lim_{\|x\| \to \infty,\ x \in C} \varphi(x) = +\infty. \tag{9.5}$$

Allora esiste $x_0 \in C$ *tale che* $\varphi(x_0) = \min_C \varphi(x)(\in \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Applicheremo il Teorema 1.37 con $X = C$ e τ la restrizione su C della topologia $\sigma(E, E')$. Se dimostriamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottolivello $E_\alpha := \{x \in C : \varphi(x) \leq \alpha\}$ è τ-compatto in C, allora la funzione ϕ ammette minimo su C. Ora E_α è chiuso per la topologia indotta dalla topologia forte $\beta(E)$ (in quanto φ è semicontinua inferiormente). Siccome $E_\alpha \subseteq C$ e C è chiuso forte, allora E_α è fortemente chiuso (vedi l'Esercizio 1.19). Inoltre E_α è un insieme convesso (perché φ è convessa). Per il Teorema 9.7 segue che E_α è $\sigma(E, E')$-chiuso. Infine E_α è limitato: infatti è ovvio se C è limitato. Se invece C non è limitato, supponiamo per assurdo che E_α non sia limitato. Esisterebbe allora una successione $(x_n)_n \subseteq E_\alpha$ tale che $\|x_n\| \to +\infty$. Dall'ipotesi (9.5) seguirebbe che $\varphi(x_n) \to +\infty$ contro il fatto che per definizione $\varphi(x_n) \leq \alpha$. Applicando quindi il Corollario 9.26 possiamo concludere che E_α è $\sigma(E, E')$-compatto. In particolare segue facilmente che E_α è τ-compatto. □

Esercizio 9.32. *Siano* E, F *due spazi di Banach e sia* $T : E \to F$ *un'isometria suriettiva. Allora* E *è riflessivo* $\iff$ F *è riflessivo. In particolare, se* E *è riflessivo e* $T : E \to F$ *un'isometria, allora* $T(E)$ *è riflessivo.*

Corollario 9.33. *Sia* E *uno spazio di Banach. Allora* E *è riflessivo* $\iff$ E' *è riflessivo.*

Dimostrazione. "$\Longrightarrow$" Grazie al Teorema 9.17 $B_{E'}$ è $\sigma(E', E)$-compatta. Essendo E riflessivo, si ha che $\sigma(E', E'') = \sigma(E', E)$ (vedi Osservazione 9.20). Pertanto $B_{E'}$ è anche $\sigma(E', E'')$-compatta e applicando il Teorema 9.23 segue che E' è riflessivo.

"$\Longleftarrow$" Essendo E' riflessivo, dall'implicazione ora dimostrata segue che E'' è riflessivo. Essendo J un'isometria, si ha che $J(E)$ è un sottospazio chiuso di E''. Quindi $J(E)$ è riflessivo. Essendo $J : E \to J(E)$ un'isometria suriettiva, dall'esercizio 9.32 segue che anche E è riflessivo. □

9.4. **Gli spazi separabili.**

Definizione 9.34. *Uno spazio topologico* X *si dice separabile se esiste* $D \subseteq X$ *denso e numerabile.*

Proposizione 9.35. *Sia* X *uno spazio metrico separabile e* $F \subseteq X$*. Allora* F *è separabile.*

Dimostrazione. Sia $D = (x_n)_n$ denso in X e per ogni $r \in \mathbb{Q}^+$ sia $y_{n,r} \in B(x_n, r) \cap F$ se $B(x_n, r) \cap F \neq \emptyset$. L'insieme $D' = (y_{n,r})_{n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}^+}$ è numerabile. Proviamo che D' è denso in F. Infatti sia $z \in F$ e $\epsilon > 0$ e proviamo che $D' \cap (B(z, \epsilon) \cap F) \neq \emptyset$. Sia $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \frac{\epsilon}{2}$. Allora, essendo D denso in X, esiste $x_n \in B(z, r)$. In particolare $z \in B(x_n, r)$ ossia $B(x_n, r) \cap F \neq \emptyset$. Quindi esiste l'elemento $y_{n,r} \in B(x_n, r) \cap F$ ed è tale che

$$d(y_{n,r}, z) \leq d(y_{n,r}, x_n) + d(x_n, z) \leq r + r < \epsilon$$

ossia $y_{n,r} \in (B(z, \epsilon) \cap F) \cap D'$. □

Teorema 9.36. *Sia* E *uno spazio di Banach. Se* E' *è separabile allora* E *è separabile.*

(senza dimostrazione)

Osservazione 9.37. Il precedente teorema non si inverte, ossia se E è separabile non è detto che E' sia separabile. Si consideri infatti $E = L^1(\Omega)$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Vale che E è separabile (senza dimostrazione) mentre $E' = L^\infty(\Omega)$ non è separabile (vedremo la dimostrazione).

Teorema 9.38. *Sia E uno spazio di Banach. Allora E è separabile e riflessivo se e solo se E' è separabile e riflessivo.*

Dimostrazione. "$\Longleftarrow$" Se E' è separabile, grazie al Teorema 9.36 vale che E è separabile. Inoltre essendo E' riflessivo, dal Teorema 9.33 segue che E è riflessivo.

"$\Longrightarrow$" Essendo E riflessivo e separabile, anche E'' è riflessivo e separabile (in quanto J è un'isometria suriettiva su E''). Applicando l'implicazione precedentemente provata segue che anche E' è separabile e riflessivo. □

Teorema 9.39. *Sia E uno spazio di Banach. Allora*

(1) *E è separabile $\Longleftrightarrow$ $B_{E'}$ è $\sigma(E', E)$-metrizzabile;*
(2) *E' è separabile $\Longleftrightarrow$ B_E è $\sigma(E, E')$-metrizzabile.*

(senza dimostrazione)

Da questo teorema segue il seguente corollario:

Corollario 9.40. *Sia E uno spazio di Banach.*

(1) *se E è separabile e $(f_n)_n \subseteq E'$ è limitata allora esiste $(f_{k_n})_n \subseteq (f_n)_n$ debolmente* convergente in E'.*
(2) *se E è riflessivo e $(x_n)_n \subseteq E$ è limitata allora esiste $(x_{k_n})_n \subseteq (x_n)_n$ debolmente convergente in E.*

Dimostrazione.

(1) Grazie al Teorema 9.17 l'insieme $B_{E'}$ è debolmente* compatto. Inoltre, essendo E è separabile, dal Teorema 9.39(1) segue che l'insieme $B_{E'}$ è $\sigma(E', E)$-metrizzabile. In particolare, grazie alla Proposizione 1.30 $B_{E'}$ è debolmente* compatta per successioni. Essendo $(f_n)_n \subseteq E'$ limitata, allora esiste $C > 0$ tale che $(f_n)_n \subseteq CB_{E'}$. Quindi $(\frac{f_n}{C})_n \subseteq B_{E'}$ ammette una sottosuccessione debolmente* convergente. In particolare esiste $(f_{k_n})_n \subseteq (f_n)_n$ debolmente* convergente.
(2) Sia $M_0 := span_{\mathbb{R}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $M := \overline{M_0}$. Essendo M un sottospazio chiuso, dal Corollario 9.30 segue che M è riflessivo. Essendo $(x_n)_n$ limitata, esiste $C > 0$ tale che $(x_n)_n \subseteq CB_M$. Se proviamo che M' è separabile, applicando il Teorema 9.39 (2) avremmo che l'insieme B_M è $\sigma(M, M')$-metrizzabile. In particolare, grazie alla Proposizione 1.30 seguirebbe che B_M è debolmente compatta per successioni e si potrebbe concludere ragionando come nella parte (1). Allo scopo di dimostrare che M' è separabile, è sufficiente provare che M è separabile ed, essendo M riflessivo, applicare il Teorema 9.38. Ora sia $\Lambda_n := span_{\mathbb{Q}}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Poichè Λ_n è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{Q}^n$, Λ_n è numerabile. È facile provare che l'insieme numerabile
$$span_{\mathbb{Q}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$$
è denso in M.

□

9.5. **Sintesi sulle topologie.**

(1) **La topologia debole $\sigma(E, E')$ su E:**

- è indotta dalle funzioni $(\varphi_f)_{f\in E'}$ dove $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ è definita come
$$\varphi_f(x) = f(x);$$
- $x_n \rightharpoonup x \iff f(x_n) \to f(x)\ \forall f \in E'$;
- gli intorni di $x_0 \in E$ sono della forma:
$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon}(x_0) = \{x \in E : | < f_i, x - x_0 > | < \epsilon,\ 1 \le i \le n\}$$
- i funzionali lineari e debolmente continui su E sono tutti della forma φ_f;
- la palla chiusa B_E è debolmente compatta se e solo se E è riflessivo;
- un convesso C è chiuso $\iff$ C è debolmente chiuso;
- se E è riflessivo, un insieme convesso C è chiuso e limitato $\iff$ C è debolmente compatto;
- E' è separabile $\iff$ la palla chiusa B_E è metrizzabile rispetto alla topologia debole

(2) **La topologia debole* $\sigma(E', E)$ su E':**
- indotta dalle funzioni $(\varphi_x)_{x\in E}$ dove $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ è definita come
$$\varphi_x(f) = f(x);$$
- $f_n \rightharpoonup^* f \iff f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in E$;
- Intorni di $f_0 \in E'$ della forma:
$$U_{x_1,\cdots,x_n,\epsilon}(f_0) = \{f \in E' : | < f - f_0, x_i > | < \epsilon,\ 1 \le i \le n\};$$
- i funzionali lineari e debolmente * continui su E' sono tutti della forma φ_x (senza dimostrazione);
- la palla chiusa $B_{E'}$ è debolmente * compatta,
- E è separabile se e solo se $B_{E'}$ è metrizzabile rispetto la topologia debole* (senza dimostrazione);
- $\sigma(E', E)$ è meno fine della topologia $\sigma(E', E'')$.

(3) **La topologia debole $\sigma(E', E'')$ su E':**
- è indotta dalle funzioni $(\varphi_\xi)_{\xi\in E''}$ dove $\varphi_\xi : E' \to \mathbb{R}$ è definita come
$$\varphi_\xi(f) = \xi(f);$$
si noti che $\forall x \in E$ il funzionale $\bar\xi = \varphi_x$ definito come $\bar\xi(f) = f(x)$ appartiene a E'' e che $\varphi_{\bar\xi} = \varphi_x$. In particolare la famiglia $(\varphi_x)_{x\in E} \subseteq (\varphi_\xi)_{\xi\in E''}$. Quindi la topologia $\sigma(E', E)$ è meno fine della $\sigma(E', E'')$.
- $f_n \rightharpoonup f \iff \xi(f_n) \to \xi(f)\ \ \forall \xi \in E''$;
- gli intorni di $f_0 \in E'$ sono della forma:
$$U_{\xi_1,\cdots,\xi_n,\epsilon} = \{f \in E' : | < \xi_i, f - f_0 > | < \epsilon,\ 1 \le i \le n\}.$$

(4) **La topologia debole* $\sigma(E'', E')$ su E'':**

- è indotta dalle funzioni $(\phi_f)_{f\in E'}$ dove $\phi_f : E'' \to \mathbb{R}$ è definita come
$$\phi_f(\xi) = \xi(f);$$
- $\xi_n \rightharpoonup^* \xi \Longleftrightarrow \xi_n(f) \to \xi(f)\ \forall f \in E'$;
- gli intorni di $\xi_0 \in E''$ sono della forma:
$$U_{f_1,\cdots,f_n,\epsilon} = \{\xi \in E : | < \xi - \xi_0, f_i > | < \epsilon,\ 1 \le i \le n\};$$
- la palla chiusa $B_{E''}$ è debolmente* compatta;
- $J(B_E)$ è debolmente* densa in $B_{E''}$ (senza dimostrazione).

9.6. **Gli spazi uniformente convessi.**

Definizione 9.41. *Uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ si dice* **uniformente convesso** *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in E$*
$$\|x\|, \|y\| \le 1,\ \|x-y\| > \epsilon \Longrightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1-\delta.$$

Osserviamo che questa proprietà non è stabile nel passaggio ad una norma equivalente. Per esempio $\mathbb{R}^2$ munito della norma euclidea è uno spazio uniformente convesso (vedremo che tutti gli spazi prehilbertiani sono uniformente convessi) mentre $\mathbb{R}^2$ munito della norma $|(u,v)| = |u| + |v|$ non lo è. Infatti se prendiamo $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$ vale che $\|x\|, \|y\| \le 1$, per ogni $0 < \epsilon < 2$ vale che $\|x-y\| = 2 > \epsilon$ e $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$ ossia non esiste $\delta > 0$ tale che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1-\delta$.

Proposizione 9.42. *Se H è uno spazio prehilbertiano, allora H è uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Dall'identità del parallelogramma
$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
Quindi se $\|x\|, \|y\| \le 1$ e $\|x-y\| > \epsilon > 0$ allora $\|x+y\|^2 \le 4-\epsilon^2$ da cui $\|\frac{x+y}{2}\| \le \sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}$. Basta quindi scegliere $0 < \delta < 1-\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}$ per avere che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1-\delta$. □

Teorema 9.43. *Per ogni $1 < p < +\infty$ e per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile lo spazio $L^p(\Omega)$ è uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Daremo la dimostrazione solo nel caso $2 \le p < +\infty$. Prima di tutto proviamo che in tal caso vale la seguente **prima disuguaglianza di Clarkson**:
$$\|\frac{f-g}{2}\|_p^p + \|\frac{f+g}{2}\|_p^p \le \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \quad \forall f, g \in L^p(\Omega) \tag{9.6}$$
(nel caso $p < 2$ ne vale un'altra piu' complicata che omettiamo).

Infatti è facile provare che la funzione $f(t) = (1+t^2)^{\frac{p}{2}} - 1 - t^p$ è crescente su $[0, +\infty)$ con minimo nel punto $t = 0$. Quindi $(1+t^2)^{\frac{p}{2}} - 1 - t^p \ge f(0) = 0$ ossia
$$(1+t^2)^{\frac{p}{2}} \ge 1 + t^p \quad \forall t \ge 0$$

da cui

$$\left(1+\left(\frac{t}{s}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} \geq 1+\left(\frac{t}{s}\right)^p \quad \forall t \geq 0,\ s>0$$

che implica

$$t^p+s^p \leq (t^2+s^2)^{\frac{p}{2}} \quad \forall t, s \geq 0.$$

In particolare applicando tale disuguaglianza a $t=\frac{|f(x)+g(x)|}{2}$ e ad $s=\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ si ottiene che per ogni $x \in \Omega$

$$\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{2}\right)^p+\left(\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\right)^p) \leq \left[\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{2}\right)^2+\left(\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}$$

$$=(\frac{(f(x))^2+(g(x))^2}{2})^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{2}|f(x)|^p+\frac{1}{2}|g(x)|^p$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla convessita' della funzione $h(x)=x^p$ (definita per $x \geq 0$) quando $p \geq 2$. Integrando su Ω si ottiene la (9.6). Ora per ogni $f, g \in L^p(\Omega)$ se $\|f\|_p, \|g\|_p \leq 1$ e $\|f-g\|_p>\epsilon>0$ allora

$$\|\frac{f-g}{2}\|_p^p+\|\frac{f+g}{2}\|_p^p \leq 1$$

da cui

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p \leq \sqrt[p]{1-(\frac{\epsilon}{2})^p}$$

Basta quindi scegliere $0<\delta<1-\sqrt[p]{1-(\frac{\epsilon}{2})^p}$ per avere che

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p<1-\delta.$$

□

Osservazione 9.44. *Procedendo come nel Teorema lpconv si può provare che per ogni $p \geq 2$ lo spazio l^p è uniformemente convesso.*

Teorema 9.45. *Sia E uno spazio di Banach uniformente convesso. Allora E è riflessivo.*

Dimostrazione. Si noti che essendo J un'isometria, $J(B_E)$ è chiuso in E'' (rispetto la norma). Se proviamo che

$$\overline{J(B_E)}=B_{E''} \tag{9.7}$$

allora seguirà che $J(B_E)=B_{E''}$ da cui la suriettivita' di J. Allo scopo di provare la (9.7), fissiamo $\xi \in B_{E''}$ e proviamo che per ogni $\epsilon>0$ esiste $x \in B_E$ tale che $||Jx-\xi||_{E''} \leq \epsilon$. Sia $\epsilon>0$. Senza perdere di generalita' possiamo supporre $\|\xi\|_{E''}=1$ (altrimenti $\eta=\frac{\xi}{\|\xi\|_{E''}}$ ha norma 1 e se $x \in B_E$ è tale che $||Jx-\eta||_{E''}<\frac{\epsilon}{||\xi||_{E''}}$ allora $||J(x\|\xi\|_{E''})-\xi||_{E''}<\epsilon$ con $x\|\xi\|_{E''} \in B_E$.) Essendo E uno spazio uniformente convesso, esiste $\delta>0$ tale che

$$\forall x, y \in E,\ \|x\|,\|y\| \leq 1,\ \|x-y\|>\epsilon \Longrightarrow \|\frac{x+y}{2}\|<1-\delta.$$

Essendo $\|\xi\|_{E''} = 1$, dalla definizione di norma esiste $f \in B_{E'}$ tale che

$$\xi(f) > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{9.8}$$

Consideriamo ora il seguente intorno di ξ (rispetto la topologia $\sigma(E'', E')$)

$$V := U_{f,\frac{\delta}{2}}(\xi) = \{\eta : | < \eta - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}\}.$$

Dal Lemma 9.24 si ha che $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Quindi esiste $x \in B_E$ tale che $Jx \in V$ ossia tale che

$$| < Jx - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}. \tag{9.9}$$

Se $\xi \in B_\epsilon(Jx)$ dove $B_\epsilon(Jx) = \{\eta : ||\eta - Jx||_{E''} \leq \epsilon\}$ avremmo la tesi. Per assurdo supponiamo che $\xi \in W := E \setminus B_\epsilon(Jx)$. Essendo W il complementare di un insieme $\sigma(E'', E')$ compatto (dal Teorema 9.17), si ha che W è un $\sigma(E'', E')$-aperto contenente ξ. Quindi $W \cap V$ è un $\sigma(E'', E')$-aperto contenente ξ e dal Lemma 9.24 si ha che $W \cap V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Esiste quindi $x' \in B_E$ tale che $Jx' \in W \cap V$. Quindi

$$| < Jx' - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}. \tag{9.10}$$

Addizionando (9.9) e (9.10) e ricordando che $< Jx, f >= f(x)$ segue che

$$-f(x) + \xi(f) - f(x') + \xi(f) < \delta$$

ossia

$$2\xi(f) < f(x + x') + \delta \leq ||f||_{E'} ||x + x'|| + \delta \leq ||x + x'|| + \delta.$$

Quindi, applicando la (9.8), si ottiene che

$$||\frac{x + x'}{2}|| \geq \xi(f) - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta.$$

Dalla scelta di δ segue che $\|x - x'\| \leq \epsilon$ e quindi $\|Jx - Jx'\| = \|x - x'\| \leq \epsilon$ in contraddizione con il fatto che $Jx' \in W$. □

Corollario 9.46. (1) *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora H è riflessivo.*
(2) *Sia $1 < p < +\infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora lo spazio $L^p(\Omega)$ è riflessivo.*

Dimostrazione.

(1) Applicare la Proposizione 9.42 e il Teorema 9.45.
(2) Nel caso $2 \leq p < \infty$ applicare la Proposizione 9.43 e il Teorema 9.45. Nel caso $1 < p < 2$ si consideri l'applicazione $T : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega))'$ definita come

$$Tu(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

per ogni $u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega)$. Grazie al Corollario 4.11 sappiamo che T ùn'isometria. Poichè $2 < p' < \infty$ si ha che $L^{p'}(\Omega)$ è uno spazio uniformente convesso e quindi riflessivo. Pertanto anche il suo duale $(L^{p'}(\Omega))'$ è riflessivo. Poichè T è un'isometria e $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach, si ha che $T((L^p(\Omega))$ è un sottospazio chiuso di $L^{p'}(\Omega)'$.

Grazie al Corollario 9.30 lo spazio $T((L^p(\Omega))$ è riflessivo ed essendo T un'isometria suriettiva da $L^p(\Omega)$ su $T((L^p(\Omega))$ segue che anche $L^p(\Omega)$ è riflessivo.

□

Teorema 9.47 (di Rappresentazione di Rietz). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, sia $1 \leq p < \infty$. Allora per ogni $\phi \in (L^p(\Omega))'$ esiste $v \in L^{p'}(\Omega)$ tale che $\phi = T_v$ dove*

$$T_v(u) := \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

In particolare l'applicazione $T : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ é un'isometria suriettiva.

Dimostrazione. **Diamo la dimostrazione solo nel caso** $p > 1$. Grazie al Corollario 4.11 sappiamo già che l'applicazione T é un'isometria. In particolare $T(L^{p'}(\Omega))$ è chiuso in $(L^p(\Omega))'$. Se proviamo che $T(L^{p'}(\Omega))$ è denso in $(L^p(\Omega))'$, possiamo concludere che $T(L^{p'}(\Omega)) = (L^p(\Omega))'$. Applichiamo uno dei corollari di Hahn-Banach. Sia $\xi \in (L^p(\Omega))''$ tale che $\xi = 0$ su $T(L^{p'}(\Omega))$. Proviamo che $\xi = 0$ su $(L^p(\Omega))'$. Essendo $L^p(\Omega)$ riflessivo, l'applicazione $J : L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))''$ è suriettiva. Quindi esiste $v \in L^p(\Omega)$ tale che $Jv = \xi$. In particolare, applicando la definizione di J, per ogni $u \in L^{p'}(\Omega)$ vale che

$$0 = \xi(Tu) = Jv(Tu) = Tu(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Scegliendo $u(x) := |v(x)|^{p-2}v(x)$ (si osservi che $u \in L^{p'}(\Omega)$) possiamo concludere che $0 = \int_\Omega |v(x)|^p dx$ ossia $v = 0$. Quindi $\xi = Jv = J0 = 0$ in $(L^p(\Omega))''$ ossia $\xi = 0$ su $L^{p'}(\Omega)$. □

Come conseguenza possiamo caratterizzare la convergenza in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < +\infty$ nel seguente modo: sappiamo che una successione $(u_n)_n \subseteq L^p(\Omega)$ converge debole a $u_0 \in L^p(\Omega)$ se per ogni $\phi \in (L^p(\Omega))'$ vale che $\phi(u_n)$ converge a $\phi(u_0)$. Dal Teorema 9.47 per ogni $\phi \in (L^p(\Omega))'$ esiste $v \in L^{p'}(\Omega)$ tale che $\phi = T_v$. Pertanto

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ in } L^p(\Omega) \iff T_v(u_n) \to T_v(u_0) \ \forall v \in L^{p'}(\Omega)$$

ossia

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ in } L^p(\Omega) \iff \int_\Omega u_n(x)v(x)dx \to \int_\Omega u_n(x)v(x) \ \forall v \in L^{p'}(\Omega).$$

Inoltre grazie al Teorema 9.47 si ha che $T(L^\infty(\Omega)) = (L^1(\Omega))'$ e pertanto possiamo dotare $L^\infty(\Omega)$ della topologia debole* di $(L^1(\Omega))'$ nel modo seguente.

Diremo che una successione

$$u_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} u_0 \text{ in } L^\infty(\Omega) \iff (Tu_n)_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} Tu_0 \text{ in } (L^1(\Omega))' \iff Tu_n(v) \to Tu_0(v) \ \forall v \in L^1(\Omega)$$

ossia

$$u_n \overset{w^*}{\rightharpoonup} u_0 \text{ in } L^\infty(\Omega) \iff \int_\Omega u_n(x)v(x)dx \to \int_\Omega u_0(x)v(x) \ \forall v \in L^1(\Omega).$$

9.7. **Esercizi vari sulle topologie.**

Esercizio 9.48. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$.

Provare i seguenti fatti:

(1) per ogni $x \in X$ vale che $T_x \in X''$ e $||T_x||_{X''} = |x|_X$;

(2) per ogni $x, y \in X$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale che $T_{ax+by} = aT_x + bT_y$;

(3) provare che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se $x_n \to x_0$ in X allora $T_{x_n} \to T_{x_0}$ in X'';

(4) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $T_{x_n} \rightharpoonup T_{x_0}$ debole in X'';

(5) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è tale che $\sup_n |T_{x_n}(f)| < +\infty$ per ogni $f \in X'$ allora (x_n) è limitata in X;

(6) se f_n converge a f debole* in X' allora $T_x(f_n) \to T_x(f)$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 9.49. Sia X uno spazio topologico e sia E uno spazio di Banach. Siano $u, v : X \to (E, \sigma(E, E')$ due applicazioni continue. Provare che
(1) l'applicazione $u + v : X \to (E, \sigma(E, E')$ è continua;
(2) Sia $a : X \to \mathbb{R}$ continua. Provare che l'applicazione prodotto definita da $au(x) = a(x)u(x)$ è continua da X su $(E, \sigma(E, E')$.

Esercizio 9.50. Provare che se E' è uno spazio finito dimensionale lo è anche E.

Esercizio 9.51. Provare che se E è uno spazio normato e $(x_n)_n \subseteq E$ è tale che x_n converge a $x \in E$ rispetto alla topologia debole.
(1) Provare che esiste una successione $(z_n)_n \subseteq \overline{co(\{x_n\}_n)}$ tale che converge a x forte.
(suggerimento: osservare che $x_0 \in \overline{co(\{x_n\}_n)}$ dove $co(V)$:=inviluppo convesso di V)
(2) Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $z_n \in \overline{co(\{x_k\}_{1\leq k\leq n})}$ tale che z_n converge a x forte.

Esercizio 9.52. Siano X, Y due spazi di Banach e assumiamo che la successione di operatori M_n in $\mathcal{L}(X, Y)$ verifica: per ogni $f \in Y'$ $f(M_n(x)) \to f(M(x))$ dove $M(x) \in Y$. Provare che $M \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Esercizio 9.53. Provare che se E è uno spazio normato e $(x_n)_n \subseteq E$ è tale che x_n converge a $x \in E$ rispetto alla topologia debole, allora $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \to x$ rispetto alla topologia debole (applicare teorema di Cesaro per le successioni reali).

Esercizio 9.54. Siano X e Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare. Allora T è continuo se e solo se per ogni $(x_n)_n \subseteq X$ tale che $x_n \rightharpoonup x_0$ in X vale che $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ in Y.

Esercizio 9.55. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach.

Provare i seguenti fatti:

(1) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sono tali che $||x_n - y_n||_X \to 0$ e $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $y_n \rightharpoonup x_0$ in X;

(2) se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$ sono tali che $||f_n - g_n||'_X \to 0$ e $f_n \overset{w*}{\rightharpoonup} f_0$ in X' allora $g_n \overset{w*}{\rightharpoonup} f_0$ in X'.

Esercizio 9.56. Sia X uno spazio di Banach e Y un suo sottoinsieme denso e $(F_n)_n$ una successione in X' . Dimostrare che:

(1) $(F_n)_n$ converge debolmente$*$ in X' $\iff$ $(F_n)_n$ è limitata in X' e $(F_n(y))_n$ converge per ogni $y \in Y$;

(2) Assumiamo che $(F_n)_n$ converga debolmente$*$ in X' al funzionale $F \in X'$ e sia $(x_n)_n \subseteq X$ tale che $x_n \to x \in X$. Provare che $\lim_n F_n(x_n) = F(x)$.

Esercizio 9.57. Sia H uno spazio di Hilbert, $C \subseteq H$ un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto. Sia $x_0 \in H$. Provare che esiste un unico $y_0 \in C$ tale che

$$||x_0 - y_0|| = \min_{x\in C} ||x - x_0||.$$

(usare il teorema di Weirstrass su H munito della topologia debole e con $f(x) = ||x-x_0||$. Per l'unicita' usare il fatto che in uno spazio di Hilbert H, se $x, y \in H$ sono tali che $||x|| = ||y|| = d$ e $x \neq y$ allora $||\frac{x+y}{2}|| < d$.))

Esercizio 9.58. Sia X uno spazio di Banach e $T : X \to X'$ lineare. Dimostrare che sono equivalenti i seguenti fatti:

(1) $T : (X,\ \|\cdot\|_X) \to (X',\ \|\cdot\|_{X'})$ continuo;

(2) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ e per ogni $x \in X$

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \overset{*}{\rightharpoonup} Tx.$$

Esercizio 9.59. Se X è uno spazio di Banach riflessivo, C un convesso chiuso non vuoto e $x_0 \in X$, mostrare che esiste un elemento di C di distanza minima da x_0. Tale elemento è necessariamente unico?

Esercizio 9.60. Sia E uno spazio di Banach e sia $F : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole * e tale che

$$\lim_{||f||\to\infty} F(f) = +\infty.$$

Allora esiste un punto di minimo di F su E'.

Esercizio 9.61. Sia E uno spazio di Banach, $M \subseteq E$ un sottospazio. Provare che il suo ortogonale $M^\perp(= M^0) \subseteq E'$ è chiuso rispetto alla topologia debole * di E'.

Esercizio 9.62. Sia E uno spazio di Banach, $M \subseteq E$ un sottospazio e sia $M^\perp(= M^0) \subseteq E'$ il suo ortogonale. Sia $f_0 \in E'$. Provare che esiste $g_0 \in M^\perp$ tale che

$$||f_0 - g_0|| = \min_{f\in M^\perp} ||f - f_0||.$$

(applicare i due esercizi precedenti)

Esercizio 9.63. Sia X spazio di Banach riflessivo. Provare che

(1) per ogni $f \in X'$ esiste x_0 nella palla chiusa unitaria di X tale che
$$||f||_{X'} = f(x_0);$$
(2) ogni $f \in X'$ assume minimo sulla palla chiusa unitaria di X;
(3) dedurre dal punto precedente che ogni $f \in X'$ assume massimo sulla sfera unitaria di X.

Lemma 9.64. *Se $f, g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ sono continue, allora $h = f + g : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ è continua.*

Dimostrazione. Infatti sia $x_0 \in X$ e sia $U = (-\epsilon + h(x_0), h(x_0) + \epsilon)$ un intorno di $h(x_0)$. Devo provare che esiste un intorno V di x_0 in X tale che $h(V) \subseteq U$. Essendo f e g continue in x_0 esistono V_1, V_2 aperti contenenti x_0 in X tali che $f(V_1) \subseteq (-\frac{\epsilon}{2} + h(x_0), h(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$ e $g(V_2) \subseteq (-\frac{\epsilon}{2} + h(x_0), h(x_0) + \frac{\epsilon}{2})$. In particolare per ogni $x \in V := V_1 \cap V_2$ si ha che $f(x) \in U$ e $g(x) \in U$ ossia $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Si noti che V è un aperto contentente x_0 e che per ogni $x \in V$ si ha che $|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$. □

Esercizio 9.65. Sia $(X, |\cdot|_X)$ uno spazio di Banach. Per ogni $x \in X$ sia $T_x : X' \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_x(f) = f(x)$. Provare che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se $x_n \rightharpoonup x_0$ in X allora $T_{x_n} \rightharpoonup T_{x_0}$ debole in X''.

Dimostrazione. Essendo T continuo "forte forte" (essendo un'isometria), allora T è continuo "debole debole". In particolare è sequenzialmente continuo "debole debole".

Esercizio 9.66. Sia $X = L^2(0,1)$, sia $g \in X$ e $F : X \to \mathbb{R}$ definito da
$$F(u) = \int_0^1 |u(x)|^2 dx - 2\int_0^1 g(x)u(x)dx.$$
è facile verificare che g è punto di minimo di F. Inoltre esso è unico perchè F è strettamente convesso. I suoi sottolivelli sono convessi, chiusi rispetto la topologia forte e in particolare rispetto alla topologia debole. Proviamo che sono compatti rispetto alla topologia debole. Infatti i sottolivelli sono limitati:
$$F(v) \leq \alpha \Rightarrow ||v||_2^2 - 2||v||_2||g||_2 \leq \alpha$$
e quindi
$$||v||_2 \leq \sqrt{||g||_2^2 + \alpha}.$$
Essendo L^2 riflessivo, i sottoinsiemi debolmente chiusi e limitati sono compatti rispetto la topologia debole. Possiamo quindi applicare la versione topologica del teorema di Weistrass per affermare l'esistenza di un punto di minimo (che è appunto g. Osserviamo che, rispetto alla topologia forte, F è continuo (usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). In particolare, essendo F convesso, si ha che F è semicontinuo rispetto alla topologia debole. I suoi sottolivelli sono chiusi rispetto alla topologia forte ma non sono compatti. Infatti sia $v_h(x) = \sin 2\pi hx$. Allora $||v_h||_2^2 = \frac{1}{2}$. In particolare segue che
$$F(v_h) \leq \frac{1}{2} + 2||g||_2$$

ossia $v_h \in E_t$ per ogni $t \geq \frac{1}{2} + 2||g||_2$. Provo $E_{\frac{1}{2}+2||g||_2}$ non è compatto dimostrando che non esiste una sottosuccessione estratta da (v_h) fortemente convergente ad un elemento di $E_{\frac{1}{2}+2||g||_2}$. Dal lemma di Riemann-Lebesgue vale che v_h converge debole in L^2 alla sua media integrale che è nulla. Se esistesse v_{n_h} fortemente convergente ad una funzione v allora $v = 0$ e questo è assurdo (visto che la norma di v dovrebbe essere $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

10. **Separabilita' degli spazi** L^p

Proveremo che

Teorema 10.1. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *misurabile allora per ogni* $1 \leq p < \infty$ *lo spazio* $L^p(\Omega)$ *è separabile.*

Premettiamo la dimostrazione di alcuni lemmi.

Lemma 10.2. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *misurabile e sia* $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *una funzione misurabile. Allora esiste* $s_n : \Omega \to [0, +\infty)$ *successione crescente di funzioni semplici tali che* $s_n(x) \to f(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$*. Inoltre se per* $p \in [0, +\infty]$ *si ha che* $f \in L^p(\Omega)$ *allora* $||f_n - f||_p \to \infty$*.*

Proof. Sia $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ tale che $1 \leq j \leq n2^n$ definiamo

$$C_{n,j} := \{x \in \Omega \ : \ \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}\},$$
$$C_n := \{x \in \Omega \ : \ f(x) \geq n\}$$

e

$$s_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{C_{n,j}} + n\chi_{C_n}$$

dove per ogni insieme E si definisce

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora vale che

1. $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n \in N$.
2. $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n \in N$.
3. $s_n(x) \geq f(x) - \frac{1}{2^n}$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $n > f(x)$.
4. $s_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Infatti

1. Se $x \in C_{n,j}$ allora $s_n(x) = \frac{j-1}{2^n} \leq f(x)$ mentre se $x \in C_n$ allora $s_n(x) = n \leq f(x)$.
2. Se $x \in C_{n,j}$ allora $\frac{2j-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2j}{2^{n+1}}$ ossia $x \in C_{n+1,2j-1} \cup C_{n+1,2j}$. In particolare
$$s_{n+1}(x) \geq \frac{2j-2}{2^{n+1}} = \frac{j-1}{2^n} = s_n(x).$$
Invece se $x \in C_n$ allora $x \in C_{n+1} \cup \{x \in \Omega : \ n \leq f(x) < n+1\} = C_{n+1} \cup C_{n+1,n2^{n+1}+1} \cup \dots \cup C_{n+1,(n+1)2^{n+1}}$ e quindi
$$s_{n+1}(x) \geq \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = s_n(x).$$
3. Se $n \geq f(x)$ allora esiste $1 \leq j \leq n2^n$ tale che $x \in C_{n,j}$ e quindi
$$s_n(x) = \frac{j-1}{2^n} = \frac{j}{2^n} - \frac{1}{2^n} \geq f(x) - \frac{1}{2^n}.$$

(4) Segue da (2) e (3).

Infine se $f \in L^\infty(\Omega)$ allora, per ogni $n > ||f||_{L^\infty(\Omega)}$, grazie alla (3) segue che

$$||s_n - f||_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega (f(x) - s_n(x)) \leq \frac{1}{2^n}$$

e quindi $||s_n - f||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$.

Invece se $f \in L^p(\Omega)$ allora per ogni $x \in \Omega$

$$|s_n(x) - f(x)|^p \leq 2^{p-1}(|s_n(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^p |f(x)|^p$$

e applicando il teorema della convergenza dominata sulla successione $(|s_n - f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ si ottiene che $||s_n - f||_{L^p(\Omega)} \to 0$. □

Lemma 10.3 (di Urysohn)**.** *Sia X uno spazio localmente compatto e T_2. Allora per ogni $K \subseteq X$ compatto e per ogni $A \subseteq X$ aperto esiste $f_0 \in C(X)$ tale che*

(1) $f_0 : X \to [0, 1]$
(2) $f = 1$ *su* K
(3) *supp* $f \subseteq A$.

In particolare $f_0 \in C_c(X) := \{f : X \to \mathbb{R} :$ supp f è compatto$\}$ e

$$f_0(x) := \begin{cases} 1 & se\ x \in K \\ 0 & se\ x \notin A \end{cases}$$

Lemma 10.4. *Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lo spazio $C_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$.*

Proof. **Step 1** Proviamo che $\forall\, E \subset \Omega$ misurabile e limitato e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $f_0 \in C_c(\Omega)$ tale che $||\chi_E - f_0||_{L^p(\Omega)} < \epsilon$.

Infatti sia $E \subset \Omega$ misurabile e limitato ed $\epsilon > 0$. Allora esistono $K, A \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che K è compatto, A aperto e $|A \setminus E| \leq \epsilon^p$. Per il lemma di Urysohn esiste $f_0 \in C(X)$ tale che

(1) $f_0 : X \to [0, 1]$
(2) $f = 1$ su K
(3) *supp* $f \subseteq A$.

In particolare

$$||\chi_E - f_0||_p^p = \int_K |\chi_E(x) - f_0(x)|^p dx + \int_{A\setminus K} |\chi_E(x) - f_0(x)|^p dx + \int_{\Omega\setminus A} |\chi_E(x) - f_0(x)|^p dx$$

$$= \int_{A\setminus K} |\chi_E(x) - f_0(x)|^p dx \leq |A \setminus K| < \epsilon^p.$$

Step 2 Proviamo che $\forall\, E \subset \Omega$ tale che $\chi_E \in L^p(\Omega)$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $f_0 \in C_c(\Omega)$ tale che $||\chi_E - f_0||_{L^p(\Omega)} < \epsilon$.

Infatti osserviamo che $\chi_E \in L^p(\Omega)$ se e solo se E è un insieme misurabile con $|E| < +\infty$. Poiché $|E| = \lim_{r\to\infty} |E \cap B_r|$ dove B_r è la palla di centro 0 e raggio r segue che se $\chi_E \in L^p(\Omega)$

allora esiste $r > 0$ tale che $|E \setminus E \cap B_r| < (\frac{\epsilon}{2})^p$. Dallo step precedente applicato all'insieme $E \cap B_r$ segue che esiste $f_0 \in C_c(\Omega)$ tale che $||\chi_{E\cap B_r} - f_0||_p < \frac{\epsilon}{2}$. In particolare

$$||\chi_E - f_0||_{L^p(\Omega)} = \|\chi_E - \chi_{E\cap B_r}||_{L^p(\Omega)} + \|\chi_{E\cap B_r} - f_0||_{L^p(\Omega)}$$

$$= \|\chi_{E\setminus(E\cap B_r)}||_{L^p(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2} = |E \setminus E \cap B_r|^{\frac{1}{p}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Step 3 Proviamo che per ogni $f \in L^p(\Omega)$, $f : \Omega \to [0, +\infty]$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $f_0 \in C_c(\Omega)$ tale che $||f - f_0||_{L^p(\Omega)} < \epsilon$.

Infatti grazie al Lemma 10.2 esiste $s : \Omega \to \mathbb{R}^+$ funzione semplice tale che $||f - s||_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$. Supponiamo $s(x) := \sum_{i=1}^k c_j \xi_{E_j}(x)$ per ogni $x \in \Omega$ con $E_j \subset \Omega$ sottoinsieme misurabile per ogni $j \in \{1, \cdots, k\}$. Sia $C := \sum_{j=1}^k |c_j|$. Applicando lo step 2 alle funzioni χ_{E_j} per ogni $j \in \{1, \cdots, k\}$ si ha che esiste $f_j \in C_c(\Omega)$ tale che $||\chi_{E_j} - f_j||_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2C}$. Definita

$$f_0(x) := \sum_{j=1}^k c_j f_j(x)$$

vale che $f_0 \in C_c(\Omega)$ e

$$||f - f_0||_{L^p(\Omega)} \leq ||f - s||_{L^p(\Omega)} + ||s - f_0||_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^k |c_j|||(f_j - \chi_{E_j}||_{L^p(\Omega)} < \epsilon.$$

Step 4 Per ogni $f \in L^p(\Omega)$ vale che $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = (-f) \vee 0$ sono non negative, appartengono a $L^p(\Omega)$ e sono tali che $f = f^+ - f^-$. Per lo step 3 per ogni $\epsilon > 0$ esistono $f_0^+, f_0^- \in C_c(\Omega)$ tali che $||f^+ - f_0^+||_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$ e $||f^- - f_0^-||_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$. In particolare posta $f_0 := f_0^+ - f_0^-$ vale che $f_0 \in C_c(\Omega)$ e $||f - f_0||_{L^p(\Omega)} < \epsilon$. □

Proof. (**del Teorema 10.1**). **Step 1** Proviamo che $L^p(\mathbb{R}^N)$ è separabile. Sia

$$\mathcal{R} := \{\prod_{i=1}^N (a_i, b_i) : \; a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$$

e

$$\mathcal{E} := span_{\mathbb{Q}}\{\chi_R : \; R \in \mathcal{R}\}.$$

Proviamo che l'insieme numerabile $\mathcal{E}$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Infatti sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ed $\epsilon > 0$. Per il Lemma 10.4 esiste $f_0 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $||f - f_0||_{L^p(\Omega)} < \frac{\epsilon}{2}$. Sia $R \in \mathcal{R}$ tale che $supp f_0 \subset R$. Per il teorema di Heine-Cantor la funzione f_0 è uniformemente continua su R e quindi per ogni $\epsilon_0 > 0$ (da scegliere dopo) esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in R$ sono tali che $|x - y| < \delta$ allora $|f_0(x) - f_0(y)| < \epsilon_0$. Dividiamo R in tanti cubetti aperti $(Q_i)_{i\in\{1,2,\cdots,M\}}$ di diametro minore di δ (basta tracciare degli opportuni iperpiani paralleli agli assi e a distanza $0 < l < \frac{\delta}{\sqrt{N}}$ l'uno dall'altro in modo che le diagonali dei cubetti che si formano abbiano lunghezza $d = \sqrt{N}l < \delta$. Il numero M di cubetti dipende da δ, N e dalle lunghezze dei lati di R). Osserviamo che $|R \setminus \bigcup_{i=1}^M Q_i| = 0$. Per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, M\}$ sia $(\rho_n^i)_n \subset \mathbb{Q}$ tale che $\lim_{n\to\infty} \rho_n^i = \inf_{U_i} f$ e sia

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} \rho_n^i & \text{se } x \in Q_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Scelto $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|\rho_n^i - \inf_{Q_i} f_0| < \epsilon_0$ per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, M\}$ segue che

$$\begin{aligned} ||f_0 - \tilde{f}_n||_{L^\infty(R)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} |f_0(x) - \tilde{f}_n(x)| = \sup_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q_i} |f_0(x) - \rho_n^i| \\ &\leq \sup_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} \sup_{x\in Q_i} |f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| + \sup_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} |\inf_{Q_i} f_0 - \rho_n^i| \\ &< \sup_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} \sup_{x\in Q_i} |f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| + \epsilon_0. \end{aligned}$$

Poiché per ogni i e per ogni $x, y \in Q_i$ vale che $|x - y| < \delta$ allora

$$|f_0(x) - f_0(y)| < \epsilon_0.$$

Passando all'inf rispetto a $y \in Q_i$ si ottiene che per ogni $x \in Q_i$

$$|f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| < \epsilon_0.$$

In particolare segue che

$$\sup_{i\in\{1,2,\cdots,M\}} \sup_{x\in Q_i} |f_0(x) - \inf_{Q_i} f_0| < \epsilon_0 \quad \forall n \geq n_0$$

da cui $||f_0 - \tilde{f}_n||_{L^\infty(R)} < 2\epsilon_0$ e quindi

$$||f_0 - \tilde{f}_n||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = ||f_0 - \tilde{f}_n||_{L^p(R)} < 2\epsilon_0 |R|^{\frac{1}{p}}.$$

Scelto $\epsilon_0 > 0$ tale che $2\epsilon_0|R|^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}$ si ottiene che

$$||f - \tilde{f}_n||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq ||f - f_0||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + ||f_0 - \tilde{f}_n||_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon.$$

Step 2 Poiché l'applicazione $I : L^p(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ che ad ogni $f \in L^p(\Omega)$ associa

$$(If)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è un'isometria e poiché $I(L^p(\Omega))$ è separabile in quanto sottoinsieme di uno spazio separabile, si ottiene che $L^p(\Omega)$ è separabile. $\square$

11. Cenni di teoria della distribuzioni

Vedere la dispensa della Prof.ssa Zanghirati. Esattamente:

(1) Paragrafo 2: Definizione 2.1.1. Osservazione 2.1.2. Proposizione 2.1.4. Lo spazio $\mathcal{D}$ non è metrizzabile (senza dimostrazione) Definizione 2.1.6. ed esempi dopo. Osservazione 2.1.7. Teorema 2.1.8. "Conseguenze" (pag 34). Per la dimostrazione che la δ non è una funzione vedete gli appunti. Teorema 2.2.8 (Caratterizzazione dei funzionali in $\mathcal{D}'$) senza dimostrazione.

12. **Immersioni di Sobolev**

Per una definizione sugli spazi di Sobolev in dimensione $N = 1$ vedere sul Brezis il capitolo 8 (paragrafo 2), mentre in dimensione $N \geq 2$ vedere capitolo 9 (paragrafo 2). Per le principali proprieta' degli spazi di Sobolev (completezza, riflessivita' e separabilita') vedere Proposizione 8.1 e Proposizion 9.1.

Estendiamo ora il teorema fondamentale del calcolo integrale alle funzioni di Sobolev:

Teorema 12.1. *Sia $g \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq +\infty$, I aperto limitato o non limitato. Allora esiste $\tilde{g} \in C(\bar{I})$ tale che $g = \tilde{g}$ q.o. in I e*

$$\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y) = \int_x^y g'(t)dt.$$

Per la dimostrazione premettiamo il seguente lemma:

Lemma 12.2. *Sia $g \in L^1_{loc}(I)$.*

(1) *Se $\int_I g(t)\psi'(t)dt = 0$ per ogni $\psi \in C^1_c(I)$ allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $g = C$ q.o. in I:*
(2) *Sia $x_0 \in I$ e sia $f(x) := \int_{x_0}^x g(t)dt$. Allora $f \in C(I)$ e per ogni $\psi \in C^1_c(I)$*

$$\int_I f(t)\psi'(t)dt = -\int_I g(t)\psi(t)dt.$$

(senza dimostrazione)

Proof. (**del Teorema 12.1**) Sia $x_0 \in I$ e sia $f(x) := \int_{x_0}^x g'(t)dt$. Per la parte (2) del lemma sopra vale che $f \in C(I)$ e per ogni $\psi \in C^1_c(I)$

$$\int_I f(t)\psi'(t)dt = -\int_I g'(t)\psi(t)dt = \int_I g(t)\psi'(t)dt.$$

In particolare per ogni $\psi \in C^1_c(I)$

$$\int_I (f(t) - g(t))\psi'(t)dt = 0$$

e per la parte (1) del lemma sopra segue che esiste una costante tale che $f - g = C$ q.o.. □

Teorema 12.3 (**Disuguaglianze di Sobolev in $W^{1,p}(I)$, $N = 1$**)**.** *Sia I intervallo aperto qualunque di $\mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Allora*

(1)
$$W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$$
con inclusione continua. Piu' precisamente esiste una costante $C = C(I)$ tale che

$$||f||_{L^\infty(I)} \leq C||f||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall f \in W^{1,p}(I); \tag{12.1}$$

(2) *se I è limitato e $1 < p \leq +\infty$ allora*
$$W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$$
con inclusione compatta;

(3) *se I è limitato e $p = 1$ allora per ogni $1 \leq q < +\infty$ vale che*

$$W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$$

con inclusione compatta.

Dimostrazione. Vediamo solo il caso (2). Sia $(f_n)_n \in W^{1,p}(I)$ tale che $||f_n||_{W^{1,p}(I)} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Proviamo che esiste una sottosuccessione convergente uniformente su $\overline{I}$. Grazie al Teorema 12.1 e applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha che

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{p'}} ||f_n'||_{L^p(I)} \leq C|x-y|^{\frac{1}{p'}} ||f_n'||_{L^p(I)}$$

per ogni $x, y \in \bar{I}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $(f_n)_n$ è equicontinua su $\overline{I}$. Inoltre dalla (12.1) si ha che

$$||f_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la successione $(f_n)_n$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelá. Pertanto ammette una sottosuccessione convergente uniformente su $\overline{\Omega}$. □

Teorema 12.4 (**Caso $\Omega = \mathbb{R}^N$**)**.** *Sia $N \geq 2$, $1 \leq p < +\infty$. Allora*

(1) **(Disuguaglianza di Sobolev-Gagliardo-Niremberg)**
Se $1 \leq p < N$ allora posto $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ vale che

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

con inclusione continua. Piu' precisamente esiste una costante $C = C(p, N) = \frac{p(N-1)}{p+N}$ tale che

$$||f||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||Df||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \tag{12.2}$$

(2) *Se $p = N$ allora per ogni $N \leq q < +\infty$*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

con inclusione continua;

(3) **(Disuguaglianza di Morrey)** *se $p > N$ allora, posto $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, esistono $C_1 = C_1(p, N) > 0$ e $C_2 = C_2(p, N) > 0$ tali che per ogni $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*

$$||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_1||f||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \tag{12.3}$$

e

$$|f(x) - f(y)| \leq C||x-y||^\alpha ||Df||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{12.4}$$

q.o. $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Vediamo ora le disuguaglianze di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definizione 12.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Per ogni $1 \leq p < +\infty$ definiamo $W_0^{1,p}(\Omega)$ la chiusura del sottospazio $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto la norma $|| \cdot ||_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Teorema 12.6 (**Disuguaglianze di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$**)**.** *Sia $N \geq 2$, $1 \leq p < +\infty$. Allora*

(1) *Se* $1 \leq p < N$ *allora posto* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ *vale che*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$$

con inclusione continua. Piu' precisamente esiste una costante $C(= C(p,N) = \frac{p(N-1)}{p+N})$ *tale che*

$$||f||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||Df||_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega); \tag{12.5}$$

(2) *Se* $p = N$ *allora per ogni* $N \leq q < +\infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

con inclusione continua;

(3) *se* $p > N$ *allora, posto* $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$*, esistono* $C_1 = C_1(p,N) > 0$ *e* $C_2 = C_2(p,N) > 0$ *tali che* $\forall f \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1||f||_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{12.6}$$

e

$$|f(x) - f(y)| \leq C_2||x-y||^\alpha||Df||_{L^p(\Omega)} \tag{12.7}$$

q.o. $x, y \in \Omega$.

Osservazione 12.7. Dalle immersioni di Sobolev segue che

(1) se $1 \leq p < N$ allora $p^* = \frac{pN}{N-p} > p$ e dalle disuguaglianza di interpolazione segue che

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

per ogni $p \leq q \leq p^*$;

(2) se Ω è un aperto limitato e se $1 \leq p < N$, allora

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

per ogni $1 \leq q \leq p^*$; mentre se $p = N$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

per ogni $1 \leq q < +\infty$;

(3) se $p > N$ segue che ogni funzione $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (o in $W_0^{1,p}(\Omega)$) ha un rappresentante continuo. Infatti sia

$$D := \{x \in \Omega : \quad (12.7) \text{ vale q.o. } y \in \Omega\}.$$

Essendo $\Omega \setminus D$ di misura nulla, si ha che D è denso in Ω. Quindi è possibile estendere f in modo continuo su tutto Ω.

Corollario 12.8 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aperto limitato. Allora per ogni* $1 \leq p < +\infty$ *esiste* $C = C(p,N,\Omega)$ *tale che*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq C||Df||_{L^p(\Omega)}$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. In particolare su* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la norma* $||f||_{W^{1,p}(\Omega)}$ *é equivalente alla norma* $||Df||_{L^p(\Omega)}$.

Definizione 12.9. *Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare e continuo. Si dice che T è* **compatto** *se $T(B_E)$ è relativamente (fortemente) compatta in F dove B_E è la palla unitaria chiusa di E.*

Se $T : E \to F$ è un operatore compatto e $(x_n)_n \subset E$ è limitata in E allora $(Tx_n)_n$ ammette una sottosuccessione fortemente convergente in F. In particolare

Proposizione 12.10. *Sia $T : E \to F$ un operatore compatto. Allora per ogni $x_0, (x_n)_n \subset E$, se $(x_n)_n \subset E$ converge debolmente a x_0 in E allora $(Tx_n)_n$ converge fortemente a Tx_0 in F.*

Teorema 12.11. *Sia $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora*

(1) *Se $1 \leq p < N$ allora per ogni $1 \leq q < p^*$ vale che $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con immersione compatta;*
(2) *se $p = N$ allora per ogni $N \leq q < +\infty$ vale che $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con immersione compatta;*
(3) *se $p > N$ allora*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$
con immersione compatta.