Matematica discreta - I° parziale 21/11/2017 (I° turno)
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (6 punti) Siano dati $u = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $v = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ e $w = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ vettori di $\mathbb{R}^3$.
   - Calcolare l'angolo compreso tra i vettori w e u.
   - Determinare la proiezione ortogonale di w su v.
   - Determinare la proiezione ortogonale di w sul piano generato da u e v.

2. (6 punti) Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono, rispettivamente, sottospazi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$:
   - $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$
   - $W_2 = \{(x, x, x) : \ x \geq 0\}$
   - $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 5y + 2z = 0, \ z = 0\}$.

3. (6 punti) Siano $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
   - Determinare una base per V e W rispettivamente.
   - Determinare $V + W$.
   - Stabilire se $V + W$ è somma diretta.

4. (7 punti) Siano date le seguenti matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Stabilire se le matrici $A \cdot B$ e $A \cdot C$ sono invertibili e, in tal caso, calcolarne l'inversa.

5. (7 punti) Siano dati i vettori $v_1 = (0, 1, \alpha, -3)$, $v_2 = (2, 1, -\alpha, 1)$, $v_3 = (\alpha - 1, 2\alpha, 0, -2)$ di $\mathbb{R}^4$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Sia inoltre $W = [v_1, v_2, v_3]$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1, v_2, v_3. Determinare la dimensione di W al variare di α.

6. (8 punti) Risolvere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ k^2x + ky + kz = k \\ -2x + z = 0 \end{cases}$$