Matematica discreta - facsimile II parziale
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = e_2$, $f(e_4) = e_3$, ove e_i sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, la dimensione e una base di $\mathrm{Imm}(f)$, la dimensione e una base di $\ker(f)$. Verificare se f è iniettiva o suriettiva.
   Scrivere la matrice che rappresenta f^2 rispetto alla base canonica, determinare la dimensione dell'immagine di f^2 e una base del $\ker(f^2)$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare associata alla matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   rispetto alla base
$$\mathcal{B} \;=\; \{(1,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0)\}$$
   sia nel dominio che nel codominio. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

3. Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi della seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Dire se la matrice è diagonalizzabile, motivando e fornendo l'eventuale matrice che rende diagonale A.

4. Determinare la forma quadratica associata alla seguente matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$
   Fornire il segno della forma quadratica. Individuare una base ortonormale rispetto a cui la forma quadratica è diagonalizzabile.

5. Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(2, 6, 0), (4, 2, 0)$, costruire una base ortonormale del sottospazio. Completare la base ottenuta in modo da generare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6. Si determini il piano π passante per $(1, 2, -3)$ e

   - perpendicolare alla retta $r \equiv y = 3x - 5; z = 2x + 3$
   - perpendicolare al piano $\pi_1 \equiv x + y + z - 7 = 0$ e parallelo alla retta $r \equiv x = -2z + 5; y = -5z + 7$