Matematica discreta - fac-simile I parziale
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. Dati i punti $A = (5, 2, 0)$, $B = (7, 5, 1)$, $C = (8, 1, 2)$, scrivere la proiezione ortogonale $\overrightarrow{AD}$ di $\overrightarrow{AB}$ su $\overrightarrow{AC}$. Calcolare l'area del triangolo ABC (suggerimento: il triangolo ha base data dalla lunghezza di $\overrightarrow{AC}$ e altezza pari alla lunghezza del vettore dato dalla differenza tra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$).

2. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:
   - $(0, 0, 0)$
   - $\{(t, t, t) : 0 < t < 1\}$
   - $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

3. Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, dove $U = \{(x, y, z) : x - y = 0\}$ e $W = [(1, 0, 1)]$.

4. Dati $(1, 2, 0)$, $(0, 1, a)$, $(1, a, -2)$, stabilire per quali valori di a i vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$.

5. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
si dica se $A^T B$ e AB^T sono invertibili e in tal caso calcolare l'inversa.

6. Data la matrice A,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
   - determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio $\ker(A)$; individuarne la dimensione;
   - discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $Ax = b$, ove $b = (k + 1, 4, 1)^T$; ove possibile trovare le soluzioni.