

Soluzioni compito 21 Giugno 2018

1. Esercizio 1

- $w = (0, 1, 0)$.

2. Esercizio 2

- Una base di U è data da $\{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1)\}$.
- $U + W = \{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ fornisce $\mathbb{R}^4$ ma non è somma diretta poichè $U \cap W \neq \{0\}$.

3. Esercizio 3

- Non esistono valori di k tali che la matrice A abbia rango 2
- L'inversa della matrice ottenuta da A per $k = 0$ è:

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Esercizio 4

- Per $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$ il sistema ammette unica soluzione $(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$.
- Per $\lambda = 0$, il sistema è incompatibile.
- Per $\lambda = 1$, il sistema ammette ∞^2 soluzioni: $(-y - z + 1, y, z)$.

5. Esercizio 5

- Per $k \neq 3$, $\dim \text{Im} f = 3$, $\dim \ker f = 1$ e $\text{Im} f = \{(1, 2, -3), (-1, 4, k), (k, 6, -9)\}$.
- Per $k = 3$, $\dim \text{Im} f = 2$, $\dim \ker f = 2$ e $\text{Im} f = \{(1, 2, -3), (-1, 4, 3)\}$.

6. Esercizio 6

- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Esercizio 7

- Base ortonormale $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$.
- Coefficienti di Fourier del generico elemento (x, y, z) : $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = -z$.

8. Esercizio 8

- La matrice associata all'applicazione lineare f ammette autovalori $\lambda_1 = 5$ con $\lambda_2 = -3$; l'autovalore λ_2 ha molteplicità algebrica e geometrica coincidenti mentre l'autovalore λ_1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, pertanto la matrice (e dunque l'applicazione lineare) non è diagonalizzabile.

9. Esercizio 9

- $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xz$.
- La forma quadratica è indefinita.

10. Esercizio 10

•

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 4t \\ z = -2 \end{cases}$$

- $\pi : y + 1 = 0$.
- $\pi' : 2x + z = 0$.

① Dati $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$
 si determina il vettore proiezione
 ortogonale di v_2 sul piano individuato
 da v_1 e v_3 .

$$u = \left\langle v_2, \frac{v_1 \times v_3}{\|v_1 \times v_3\|} \right\rangle \frac{v_1 \times v_3}{\|v_1 \times v_3\|}$$

$$v_1 \times v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + k$$

$$u = \left\langle v_2, \frac{k-i}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{k-i}{\sqrt{2}}$$

$$= \left\langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \right\rangle \frac{k-i}{2} = (0, 0, 0)$$

$$w = v_2 - u$$

$$= (0, 1, 0)$$

② Sia $U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z-t=0, z+t=0, y+2z=0 \}$

1) Scrivere una base per U .

(±) $t = y+z$ $t = -z$

II $z+y+z=0 \Rightarrow y = -2z$

III $-2z+2z=0$

$U = \{ (x, -2z, z, -z) \} = \left[(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1) \right]$
 I due vettori sono lin. indip. $\Rightarrow$ è una base

2) Sia $W = \left[(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \right]$

Stabilire se $U+W=\mathbb{R}^4$ e se si tratta di somma diretta.

$U+W = \left[(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \right]$

$U \cap W = \left[(1, 0, 0, 0) \right]$

Quindi $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$= 2 + 3 - 1 = 4$

è tratto di una somma che fornisce $\mathbb{R}^4$ ma non di somma diretta perché $U \cap W \neq \{0\}$

③

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$$

Per avere rango 2, occorre che $\det A = 0$ -

Poi occorre controllare se esiste un minore non nullo di ordine 2.

$$\det A = (k-1)(2-2k) = -2(k-1)^2$$

Per $k=1$ la matrice non ha rango 3 -

Tuttavia in tal caso non esiste un minore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{di ordine 2} \\ \text{che sia non nullo.} \end{array}$$

Dunque non esiste alcun valore di k per cui la matrice ha rango 2.

Inverso di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\text{adj } A^T}{\det A}$$

4.

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda^2 x + y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

Si calcola $\det A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = \lambda(\lambda-1)^2$$

Per $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$ il sistema è di Cramer.

La soluzione esiste ed è unica

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)^2} = \frac{1}{\lambda} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)^2} = -\frac{1}{\lambda}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Caso $\lambda = 0$.

$$\text{Rango}(A) = 2 -$$

Si verifica il rango di $(A|b)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|b)$$

Il sistema è impossibile.

Caso $\lambda = 1$.

Rango A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango } A = 1 \quad \text{rango}(A|b) = 1$$

Il sistema ha ∞^{3-1} soluzioni

$$x = -y - z + 1$$

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni è dato da

$$(-1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z + (1, 0, 0)$$

5. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y + kw \\ 2x + 4y + kz + 6w \\ -3x + ky - 9w \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

La matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k \\ 2 & 4 & k & 6 \\ -3 & k & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} A$$

$$\exists \text{ un minore } \neq 0 \text{ di ordine } 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & k \\ -3 & k & 0 \end{vmatrix} = -k(k-3)$$

Il minore è non nullo per $k \neq 0$ e $k \neq 3$

Si verifica se per $k=0$ esiste un minore di ordine 3 non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \quad \text{anche per } k=0 \text{ il rango è } 3$$

Si verifica se per $k=3$ esiste un minore di ordine 3 non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque per $k=3$
 $\operatorname{rang} A = 2$

Per $k \neq 3$ $\dim \text{Im} f = 3$

$$\dim \text{Ker}(f) = 4 - 3 = 1$$

La base di $\text{Im} f$ è

$$(1 \ 2 \ -3), (-1, 4, k), (\cancel{k}, \cancel{6}, -9)$$

Per $k = 3$ $\dim \text{Im} f = 2$ $\dim \text{Ker} f = 4 - 2 = 2$

La base di $\text{Im} f$ è

$$(1 \ 2 \ -3) \quad (-1 \ 4 \ 3)$$

6.

Se $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ della matrice

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $B = \{(0, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$.

I metodo

$$M_B^B(f) = M_B^C(i) \cdot M_C^C(f) \cdot M_C^B(i)$$

$$M_C^B(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_B^C(i) = \left(M_C^B(i) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II methods

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_C$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_C\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

Si calcolano le componenti di un vettore espresso in base canonica rispetto alla base B

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-z \\ z \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{cases} x = \beta + \gamma \\ y = \alpha - \beta \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x + y - z \\ \beta = x - z \\ \gamma = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_C\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$v_1' \ v_2' \ v_3'$ è base ortonormale

Sia dato il vettore (x, y, z) - le sue coord. note di Fourier sono

$$\alpha = x$$

$$\beta = y$$

$$\gamma = -z$$

$$8. \quad f(x, y, z) = (5x + y, -3y, x + 5z)$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 5) [(\lambda - 5)(\lambda + 3)]$$

$$\lambda = 5 \quad m. a = 2$$

$$\lambda = 3 \quad m. a = 1$$

$$V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} -y = 0 \\ 8y = 0 \\ -x = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad m. p = 1$$

$$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} -8x - y = 0 \\ -x - 8y = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -8 \\ 64 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad m. p = 1$$

La matrice (e dunque l'applicazione lineare) non è diagonalizzabile.

9. Scrivere la forma quadratico su $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificare il segno della forma quadratico.

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xz$$

$$I\lambda - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 1) [(\lambda - 2)(\lambda - 4) - 9] \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda - 1) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{40}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{6 - \sqrt{40}}{2}$$

La forma quadratico è indefinita.

10. Dati i punti

$$P = (1, 3, -2) \quad Q = (1, -1, -2)$$

(1) Equazioni parametriche della retta per P e Q

$$x = 1 + t(1-1) = 1$$

$$y = 3 + t(-1-3) = 3 - 4t$$

$$z = -2 + t(-2+2) = -2$$

(2) Equazione cartesiana di un piano passante per Q e ortogonale alla retta PQ

Fascio di piani per Q

$$a(x-1) + b(y+1) + c(z+2) = 0$$

Essendo un piano $\perp PQ$, (a, b, c) sono i parametri direttori della retta

$$a = 0 \quad b = -4 \quad c = 0$$

$$-4(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\boxed{y+1=0}$$

(3) Equazione cartesiana del piano passante per P, Q e l'origine.

Fascio di piani per l'origine

$$ax + by + cz = 0$$

$$\begin{cases} a + 3b - 2c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + z = 0$$