Matematica discreta - Soluzioni fac-simile I parziale

1. $A = (5, 2, 0)$, $B = (7, 5, 1)$, $C = (8, 1, 2)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (7-5, 5-2, 1-0) = (2, 3, 1) \\ \overrightarrow{AC} &= (8-5, 1-2, 2-0) = (3, -1, 2) \end{aligned}$$

Calcolo il versore $\overrightarrow{u}$ della retta parallela al vettore $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(3, -1, 2)}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, 2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u} = \frac{1}{14}(6-3+2)(3, -1, 2) = \\ &= \frac{5}{14}(3, -1, 2) = \frac{5}{14}(3, -1, 2). \end{aligned}$$

Sia BD l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AC:

$$\begin{aligned} BD &= AB - AD = (2, 3, 1) - \frac{5}{14}(3, -1, 2) = \big(2 - \frac{15}{14}, 3 + \frac{5}{14}, 1 - \frac{10}{14}\big) = \\ &= \big(\frac{13}{14}, \frac{47}{14}, \frac{4}{14}\big). \end{aligned}$$

L'area del triangolo ABC e' data da:

$$\frac{\|AC\|\|BD\|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\sqrt{\frac{2394}{14^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2394}{14}} = \frac{\sqrt{171}}{2}.$$

2.
   - $\{(0,0,0)\}$ è un sottospazio (sottospazio banale);
   - $S = \{(t, t, t) \colon 0 < t < 1\}$ non e' un sottospazio poiche' non contiene il vettore $(0, 0, 0)$;
   - $S = \{(x, 0, 0) \colon x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ non e' un sottospazio poiche' non contiene il vettore $(0, 0, 0)$.

3. $\dim W = 1$;
$U = \{(x, x, z,)\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)\} = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim U = 2$.
Quindi un sistema di generatori di $U + W$ è dato da

$$U + W = [(1, 0, 14), (1, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Si osservi inoltre che data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$, pertanto i vettori prima considerati sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $U + W$.
Da ciò segue $\dim(U + W) = 3$. Ricordando che

$$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim(U + W)$$

risulta: $\dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$. Da ciò si può concludere che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

4. Considerata la matrice A aventi per righe i vettori considerati, calcolo i valori di a per cui risulta $\det A \neq 0$ (in tal caso, $r(A) = 3$ e i vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -a^2 + 2a - 2$$

Si osservi che $-a^2 + 2a - 2 \neq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, quindi i vettori considerati sono una base di $\mathbb{R}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

5. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che $\det A^T B = 0$, segue che $A^T B$ non è invertibile.
Calcolo

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 28 & -2 \end{pmatrix}$$

Risulta $\det AB^T = -48 \neq 0$, quindi AB^T è invertibile e

$$(AB^T)^{-1} = -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -28 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\ker A = \left\{ (x, y, z) \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Calcolo il determinante di A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(2 - k^2) + (2 + 2) = 2 - 2k^2 + 4 = -2k^2 + 8.$$

Risulta $\det A = 0$ per $k = \pm 2$.
Quindi, se $k = \pm 2$, il nucleo è dato da:

$$\ker A = \{(x, y, z) \mid 2x + 2y + z = 0; x + 2y - z = 0\}$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Portando al secondo membro l'incognita z (che trattiamo come un parametro), troviamo le soluzioni mediante la regola di Cramer:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ z & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2z - 2z}{2} = -2z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2z + z}{2} = \frac{3}{2}z \end{aligned}$$

Quindi possiamo riscrivere il nucleo come

$$\ker A = \left[\left(-2, \frac{3}{2}, 1 \right) z \right]$$

e risulta $\dim(\ker A) = 1$.
Viceversa se $k \neq \pm 2$ allora $\det A \neq 0$ (quindi $r(A) = 3$) e risulta
$\ker A = \{(0, 0, 0)\}$ e $\dim(\ker A) = 0$.

Consideriamo il sistema $Ax = b$ con $b = (k + 1, 4, 1)^T$. Sappiamo che $r(A) \geq 2$.

- Se $k \neq \pm 2$ allora $\det A = -2k^2 + 8 \neq 0$ e $r(A) = 3 = r([A, b])$ quindi il sistema è compatibile e ammette una e una sola soluzione:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & k^2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2k^2 + 8}, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k+1 & 1 \\ 2 & 4 & k^2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2k^2 + 8}, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & k+1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2k^2 + 8}$$

- Se $k = 2$, allora $r(A) = 2$ e risulta

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & k+1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

pertanto $r([A, b]) = r(A)$ e il sistema è compatibile e ammette infinte soluzioni ottenute risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = -z + 3 \\ 2x = -4z + 4 \end{cases}$$

- Se $k = -2$ si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & k+1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 20 \neq 0$$

quindi $r(A) \neq r([A, b])$ e il sistema è incompatibile (non ammette soluzioni).