Matematica discreta - 21-6-2018
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Siano $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ vettori dello spazio. Determinare le componenti del vettore proiezione ortogonale di v_2 sul piano contenente v_1 e v_3.
2. (5 punti) Sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y+z-t = 0; z+t = 0; y+2z = 0\}$.
   - Scrivere una base per U.
   - Sia $W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$. Stabilire se $U + W = \mathbb{R}^4$ e, in tal caso, dire se si tratta di una somma diretta, fornendo le motivazioni della conclusione.
3. (5 punti) Determinare se esistono i valori del parametro k se esistono per cui la matrice A seguente ha rango 2:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{pmatrix}$$
   Trovare l'inversa della matrice ottenuta sostituendo a k il valore 0.
4. (5 punti) Discutere, al variare del parametro reale λ la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:
$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda^2 x + y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$
5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y, z, w) = (x-y+kw, 2x+4y+kz+6w, -3x+ky-9w)$, $k \in \mathbb{R}$. Si determinino, al variare di k, le dimensioni dell'insieme immagine e del nucleo di f . Si determini, al variare di k, una base dell'insieme immagine di f.
6. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dalla matrice
$$\mathcal{M}_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ del dominio e del codominio.

7. (5 punti) Data la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0),(2,1,0),(0,4,-1)$, costruire una base ortonormale. Trovare le coordinate del generico elemento (x,y,z) rispetto alla base ortonormale determinata (coefficienti di Fourier).

8. (5 punti) Dato l'operatore lineare $f(x,y,z) = (5x+y, -3y, x+5z)$, determinare autovalori, autovettori di f; verificare se l'operatore è diagonalizzabile.

9. (3 punti) Scrivere la forma quadratica di $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice simmetrica
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
Determinare il segno della forma quadratica.

10. (5 punti) Siano dati i punti $P = (1,3,-2)$ e $Q = (1,-1,-2)$.
    - Scrivere equazioni parametriche della retta passante per P e Q.
    - Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per Q e ortogonale alla retta PQ.
    - Scrivere un'equazione cartesiana di un piano passante per i punti P, Q e per l'origine $O = (0,0,0)$.