Matematica discreta - 1 febbraio 2022
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Dati i punti $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 2, 3)$, $C = (2, 3, 4)$, determinare l'angolo formato tra i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$; calcolare la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{AC}$ su $\overrightarrow{AB}$.

2. (4 punti) Si considerino i vettori: $v_1 = (-1, 2, 3)$; $v_2 = (0, -1, 0)$; $v_3 = (-1, 1, 3)$.
   - Determinare la dimensione del sottospazio V generato da v_1, v_2, v_3, indicando una base.
   - Considerato il sottospazio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0; x = z\}$, determinarne una base.
   - Determinare la dimensione del sottospazio somma $U + V$ e stabilire se esso è somma diretta.

3. (5 punti) Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = k + 1 \\ 4x + 5y + 6z = k \\ 7x + 8y + 9z = k + 1 \end{cases}$$
   Dato il sistema omogeneo associato a quello specificato, trovare l'insieme delle soluzioni.

4. (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) nel vettore $(x_1-x_2, 2x_1-x_2+x_4, -x_1+x_2+x_4)$. Trovare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare, una base per ciascuno dei due sottospazi e le dimensioni. Dire se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva. Trovare la controimmagine del vettore $(0, 2, 1)$.

5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare avente come matrice associata
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   rispetto alle basi $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1, -1), (1, 0)\}$ di $\mathbb{R}^2$. Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.

6. (4 punti)Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile, motivando e fornendo l'eventuale matrice che rende diagonale A.

7. (5 punti) Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1), (1,0,1,0), (0,0,0,1)$, costruire una base ortonormale del sottospazio. Completare la base ottenuta in modo da generare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

8. (4 punti)

    - Si determini il piano π ortogonale alla retta $r : x + y - 4 = 2x - z - 4 = 0$ e passante per $(0,1,1)$.
    - Si determinino le equazioni cartesiane e parametriche della retta s passante per $(1,0,1)$ e $(1,2,2)$.
    - La retta s e il piano π sono paralleli? In tal caso la retta appartiene al piano?