

## Matematica discreta - 17 gennaio 2022

Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (4 punti) Determinare la proiezione del vettore  $u = (1, 1, 1)$  sul piano contenente i vettori  $a = (2, 1, 0)$  e  $b = (1, 0, 1)$ .
2. (4 punti) Dati sottospazi  $A = [(2, 0, 0, 1); (0, 0, -2, 0); (0, 0, 1, -1)]$  e  $B = [(0, 1, 0, 0); (1, 1, 0, 0)]$ , trovare le dimensioni dei sottospazi. Determinare la somma dei sottospazi e la relativa dimensione. Si tratta di una somma diretta?
3. (4 punti) Data la matrice  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

discutere la risolubilità del sistema lineare  $Ax = b$ , ove  $b = (1, 0, 1)^T$  e, nel caso sia possibile, trovare le soluzioni.

4. (5 punti) Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$F(x, y) = (x - y, 0, 2x - 2y)$$

e sia  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$G(x, y, z) = (x, 0, x - z)$$

- Trovare la dimensione e una base di  $\text{Imm}(F)$
  - Trovare la dimensione e una base di  $\ker(F)$
  - Scrivere l'applicazione  $G \circ F$  e la matrice che la rappresenta rispetto alle basi canoniche.
5. (4 punti) Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{(1, 1); (-1, 0)\}$ , è  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Determinare la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio.
  6. (5 punti) Determinare gli autovalori e gli autospazi della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile, motivando e fornendo l'eventuale matrice che rende diagonale  $A$ .

7. (4 punti) Determinare il segno della forma quadratica  $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz + z^2$ . Individuare una base ortonormale rispetto a cui la forma quadratica è diagonalizzabile.
8. (3 punti) Sia  $r$  la retta di parametri direttori  $v = (4, -1, 0)$  passante per  $P = (0, 3, 0)$ .
  - Dare le equazioni parametrica e cartesiane di  $r$ .
  - Il punto  $Q = (1, 4, 0)$  appartiene alla retta?
  - Sia  $s$  la retta di equazione:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

Le due rette sono parallele? In caso esistano, determinare i punti di intersezioni delle due rette.