

Matematica discreta - 17 gennaio 2022

Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (4 punti) Determinare la proiezione del vettore $u = (1, 1, 1)$ sul piano contenente i vettori $a = (2, 1, 0)$ e $b = (1, 0, 1)$.
2. (4 punti) Dati sottospazi $A = [(2, 0, 0, 1); (0, 0, -2, 0); (0, 0, 1, -1)]$ e $B = [(0, 1, 0, 0); (1, 1, 0, 0)]$, trovare le dimensioni dei sottospazi. Determinare la somma dei sottospazi e la relativa dimensione. Si tratta di una somma diretta?
3. (4 punti) Data la matrice A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

discutere la risolubilità del sistema lineare $Ax = b$, ove $b = (1, 0, 1)^T$ e, nel caso sia possibile, trovare le soluzioni.

4. (5 punti) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x, y) = (x - y, 0, 2x - 2y)$$

e sia $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$G(x, y, z) = (x, 0, x - z)$$

- Trovare la dimensione e una base di $\text{Imm}(F)$
 - Trovare la dimensione e una base di $\ker(F)$
 - Scrivere l'applicazione $G \circ F$ e la matrice che la rappresenta rispetto alle basi canoniche.
5. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1); (-1, 0)\}$, è $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio.
 6. (5 punti) Determinare gli autovalori e gli autospazi della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile, motivando e fornendo l'eventuale matrice che rende diagonale A .

7. (4 punti) Determinare il segno della forma quadratica $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz + z^2$. Individuare una base ortonormale rispetto a cui la forma quadratica è diagonalizzabile.
8. (3 punti) Sia r la retta di parametri direttori $v = (4, -1, 0)$ passante per $P = (0, 3, 0)$.
- Dare le equazioni parametrica e cartesiane di r .
 - Il punto $Q = (1, 4, 0)$ appartiene alla retta?
 - Sia s la retta di equazione:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

Le due rette sono parallele? In caso esistano, determinare i punti di intersezioni delle due rette.