Matematica discreta - 10-7-2018
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Determinare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i vettori $i + j$, k, $-i + k$.

2. (5 punti) Sia $W = \{(x-y+z, 2x+y-4z, x-z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Mostrare che W un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Trovare una base e la dimensione di W. Verificare che $(2, -5, -1) \in W$ e trovare le coordinate del vettore rispetto alla base.

3. (5 punti) Per quali valori del parametro reale k, le seguenti matrici sono invertibili:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & k & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$
Preso $k = 0$, calcolare l'inversa della seconda matrice.

4. (5 punti) Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:
$$\begin{cases} -x + ky + kz = 1 \\ kx - 9y - 9z = -3 \end{cases}$$

5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f((x, y, z)^T) = (x+3y+4z, 2x+y+3z, -x+2y+z)^T$. Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, la dimensione di $\mathrm{Imm}(f)$, una base di $\ker(f)$. Per quali valori di h il vettore $(2, 3, h)^T$ appartiene all'immagine di f? L'applicazione è iniettiva o suriettiva?

6. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare associata alla matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
rispetto alle basi
$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \\ \mathcal{B}' &= \{(1, 1), (1, 0)\} \end{aligned}$$
Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

7. (4 punti) Sia $\mathcal{B} = \{(0,1,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,0,1),(0,0,1,0)\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Costruire a partire da essa una base ortogonale. Costruire una base ortonormale.

8. (5 punti) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, 3x_2, 3x_1)$. Trovare la matrice associata rispetto alla base canonica, autovalori (con molteplicità algebrica e geometrica) e autospazi. Dire se la matrice è diagonalizzabile.

9. (5 punti) Scrivere la matrice che rappresenta la forma quadratica $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ e stabilire il segno della forma quadratica. Determinare la base che diagonalizza la forma quadratica.

10. (5 punti)

    - Determinare il piano passante per il punto $(2,1,1)$ e parallelo al piano $2x - y + 3z + 5 = 0$.
    - Si verifichi che il piano $2x - y - 4z + 2 = 0$ e la retta $r : x = t, y = 1 - 2t, z = t$ sono paralleli.
    - Determinare le equazioni parametriche della retta passante per i punti $(1,0,1)$ e $(2,3,1)$.
    - Determinare le equazioni cartesiane della retta passante per i punti $(1,0,1)$ e $(2,3,1)$.
    - Determinare l'equazione del piano contenente il punto $(1,1,2)$ e parallelo ai vettori di componenti $(-1,2,3)$ e $(1,2,-1)$.