Matematica discreta - 10 novembre 2021
Ogni risposta deve essere giustificata.

1. (3 punti) Siano $u = i - 2j + 3k$ e $v = -3j$ vettori nello spazio cartesiano. Determinare:
   - i moduli dei vettori e i coseni direttori;
   - il loro prodotto scalare e vettoriale;
   - la proiezione di u nella direzione di v.

2. (5 punti) Si considerino i vettori: $u = (0; 1; 1; 4k)$; $v = (2k; 0; -2; 1 - 8k)$; $w = (2k; 4k; 0; 2k)$.
   - Stabilire al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da essi generato.
   - Per $k = 1/4$, determinare l'inversa della matrice avente come righe i vettori u, v, w e $(0; 0; 0; 1)$.

3. (6 punti) Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ k^2x + y + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

4. (5 punti) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore (x, y) nel vettore $(3x + 2y, x - y, x + y)$. Trovare $\ker(f)$ e $\dim(\mathrm{Imm}(f))$. Per quali valori del parametro reale k il vettore $(k + 4, 0, 2k)$ appartiene a $\mathrm{Imm}(f)$? Per tali valori trovare la sua controimmagine.

5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: $f(x, y, z) = (x - z, 2x + y, 2y + z)$. Si scriva la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1)(2, 0, 0), (-3, 1, 1)\}$ di R^3 (nel dominio e nel codominio).

6. (5 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

verificare se la matrice A è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare la matrice che permette di diagonalizzarla.

7. (2 punti) Fornire il segno della seguente forma quadratica $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$.

8. (2 punti) Trovare l'equazione del piano π passante per $P \equiv (2, 0, 4)$ e perpendicolare alla retta $r \equiv x = 3z - 1; y = 2z + 4$.