Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica
Prova scritta dell'8/7/2016 – A.A. 2015–2016

1) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\sqrt{4+3x-x^2} \le 2x-1\,.$$

2) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{x+4}{x^2+3x+3},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+5} - x$$

e disegnarne il grafico.

4) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x$$

5) Trovare una soluzione della seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$$

Soluzioni e commenti

Nel seguito sono riportate le soluzioni degli esercizi del compito, includendo in generale solo quei commenti che risultino fondamentali per la comprensione della soluzione. Qualora uno stesso esercizio possa eventualmente essere risolto in più modi, in alcuni casi si riportano le descrizioni anche di qualche modo alternativo. Si invitano gli studenti a contattare i docenti per eventuali dubbi o chiarimenti.

Esercizio 1

Per l'esistenza della radice quadrata dobbiamo imporre $4+3x-x^2 \ge 0$. Risulta:

$$\Delta = 9+16 = 25 > 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \frac{3 \mp 5}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{3-5}{2} = -1;\ x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$
$$4+3x-x^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 4\,.$$

Ora, se $2x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1/2$, la disuguaglianza non è verificata. Supponendo quindi $x \ge 1/2$, cioè $2x-1 \ge 0$, possiamo elevare al quadrato la disuguaglianza:

$$\sqrt{4+3x-x^2} \le 2x-1 \quad \Leftrightarrow \quad 4+3x-x^2 \le 4x^2-4x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2-7x-3 \ge 0$$
$$\Delta = 49+60 = 109 > 0,\ x_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{109}}{10} \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{7-\sqrt{109}}{10} \approx -0.34 > x_1;\ x_4 = \frac{7+\sqrt{109}}{10} \approx 1.74 < x_2$$
$$\sqrt{4+3x-x^2} \le 2x-1,\ x \in [x_1,x_2],\ x \ge \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big(]-\infty, x_3] \cup [x_4, +\infty[\Big) \cap \left[\frac{1}{2}, x_2\right] = [x_4, x_2]\,.$$

Dunque la disuguaglianza è verificata per

$$x \in [x_4, x_2] = \left[\frac{7+\sqrt{109}}{10},\ 4\right] \approx [1.74, 4.00]\,.$$

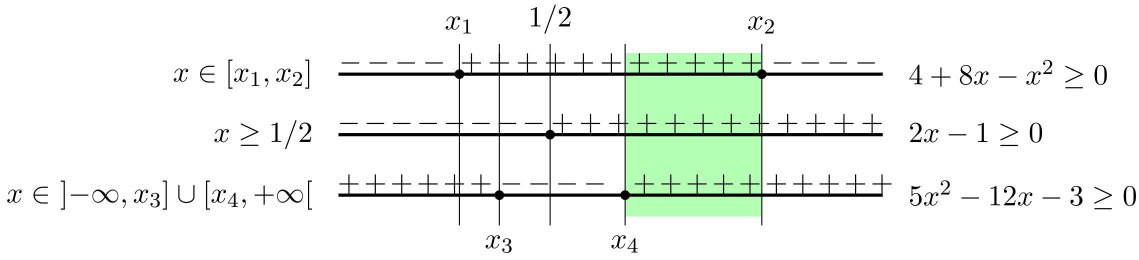

Figura 1: insieme delle soluzioni dell'esercizio 1.

Esercizio 2

Poichè per il denominatore $x^2 + 3x + 3$ si ha $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$, è

$$x^2 + 3x + 3 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Affinchè $b \in \mathbb{R}$ sia un minorante di A deve essere

$$\frac{x+4}{x^2+3x+3} \geq b \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 4 \geq b(x^2 + 3x + 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \qquad bx^2 + (3b-1)x + (3b-4) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad b < 0 \;\&\; \Delta < 0\,.$$

Si ha

$$\Delta = (3b-1)^2 - 4b(3b-4) = 9b^2 - 6b + 1 - 12b^2 + 16b = -3b^2 + 10b + 1\,.$$

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione $-3b^2 + 10b + 1 < 0$, per la quale si ha

$$\Delta_b = 25 + 3 = 28 > 0 \quad \Rightarrow \quad b_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{28}}{-3} = \frac{5 \mp 2\sqrt{7}}{3}$$
$$b_1 = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3} \approx -0.097 < 0, \qquad b_2 = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3} \approx 3.431 > 0\,.$$

Dunque $\Delta < 0 \Leftrightarrow b \in \,]-\infty, b_1] \cup [b_2, +\infty[$, ma dalla condizione $b < 0$ discende infine che b è un *minorante* di A se e soltanto se $b \in]-\infty, b_1]$. Poichè $\inf(A)$ è il massimo dei minoranti, concludiamo che

$$\inf(A) = \max\bigl\{b \in \mathbb{R} \,|\, b \in]-\infty, b_1]\bigr\} = b_1 \approx -0.097\,.$$

Analogamente, $d \in \mathbb{R}$ é un maggiorante di A se e solo se

$$\frac{x+4}{x^2+3x+3} \leq d \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 4 \leq d(x^2 + 3x + 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \qquad dx^2 + (3d-1)x + (3d-4) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad d \geq 0 \;\&\; \Delta < 0\,.$$

Come prima, si ha

$$\Delta = (3d-1)^2 - 4d(3d-4) = -3d^2 + 10d + 1$$

e la disequazione $-3d^2 + 10d + 1 < 0$ ammette le stesse soluzioni

$$d_1 = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3} \approx -0.097 < 0, \qquad d_2 = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3} \approx 3.431 > 0\,.$$

Dunque $\Delta < 0 \Leftrightarrow d \in \,]-\infty, d_1] \cup [d_2, +\infty[$, ma questa volta dalla condizione $d \geq 0$ discende infine che d è un *maggiorante* di A se e soltanto se $d \in [d_2, +\infty[$. Poichè $\sup(A)$ è il minimo dei maggioranti, concludiamo che

$$\sup(A) = \min\bigl\{d \in \mathbb{R} \,|\, d \in [d_2, +\infty[\bigr\} = d_2 \approx 3.431\,.$$

Esercizio 3

Per l'esistenza della funzione il radicando deve essere non negativo:

$$\Delta = 2 - 5 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 5 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R}\,.$$

Poichè se $x < 0$ risulta certamente $\sqrt{x^2+4x+5} > x$, si ha $f(x) > 0\ \forall x < 0$. Sia dunque $x \geq 0$: allora per il segno di $f(x)$ è

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+4x+5} \geq x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x+5 \geq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{5}{4}$$

che è certamente verificata. Se ne conclude che $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Si vede immediatamente che $f(-x) = \sqrt{x^2-4x+5} + x$ è diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, quindi $f(x)$ è una funzione *né pari, né dispari*. Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio di definizione: è immediato verificare che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Per il limite a $+\infty$, razionalizzando si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5} + x\right)}{\sqrt{x^2+4x+5} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\dfrac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+5/x}{\sqrt{1+4/x+5/x^2}+1} = 2$$

dove nel terzo passaggio abbiamo potuto portare x (e non $|x|$) fuori dalla radice quadrata perchè per $x \to +\infty$ è lecito supporre $x > 0$.

Dunque $y = 2$ è asintoto orizzontale di $f(x)$ per $x \to +\infty$. Dall'altra parte osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left\{ \frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} - 1 \right\} = \left\{ \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} \right\} - 1$$
$$= \left\{ \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{1+4/x+5/x^2} \right\} - 1 = -2$$

dove questa volta, poichè $x \to -\infty$, *dobbiamo* supporre $x < 0$ e dunque dalla radice esce $|x| = -x$. Quindi per $x \to -\infty$ esiste un asintoto obliquo $y = -2x + q$. Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+5} + x = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1+4/x+5/x^2} + x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1+4/x+5/x^2}+1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+4/x+5/x^2}+1}{1/x}$$
$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\dfrac{1}{2}\dfrac{-4/x^2-10/x^3}{\sqrt{1+4/x+5/x^2}}}{-1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2x^2}\frac{(4+10/x)x^2}{\sqrt{1+4/x+5/x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{2+5/x}{\sqrt{1+4/x+5/x^2}} = -2\,,$$

l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ è $y = -2x - 2$.

Studiamo ora la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1\,.$$

Si vede immediatamente che $D(f') = D(f)$ e per segno e zeri di $f'(x)$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2) - \sqrt{x^2+4x+5} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 \geq \sqrt{x^2+4x+5}\,.$$

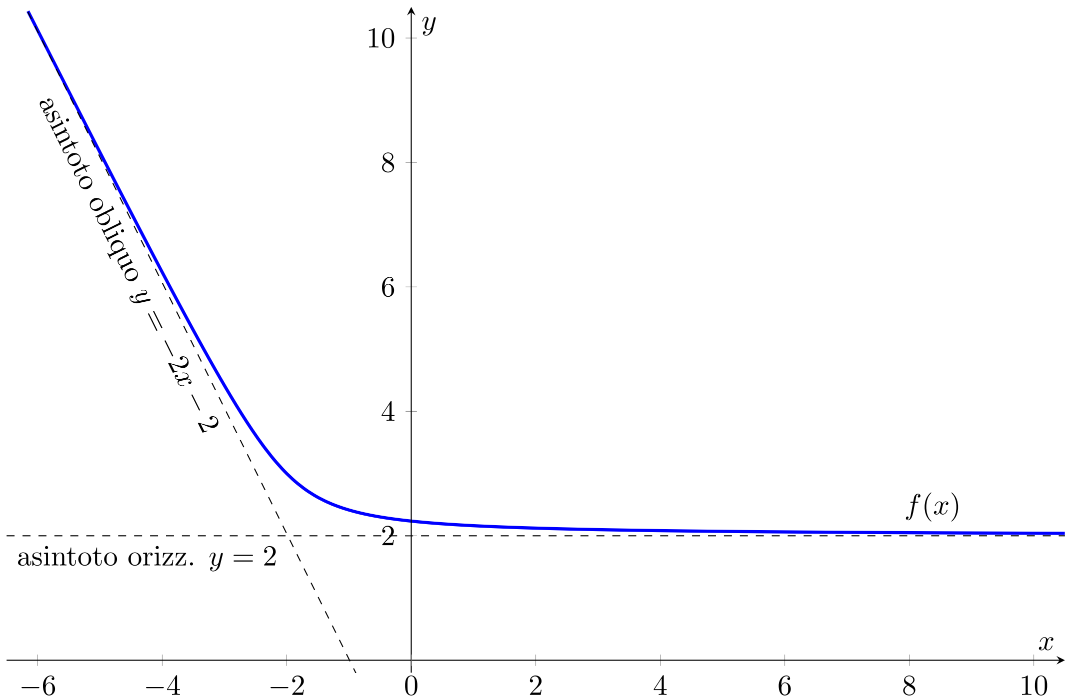

Figura 2: grafico della funzione dell'esercizio 3.

Chiaramente, se $x+2<0$, cioè se $x<-2$, questa disequazione non ammette soluzioni, ossia si ha $f'(x)<0$ $\forall x<-2$. Supponiamo dunque $x \geq -2$: in tal caso

$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x+2 \geq \sqrt{x^2+4x+5} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2 \geq x^2+4x+5 \;\Leftrightarrow\; x^2+4x+4 \geq x^2+4x+5 \;\Leftrightarrow\; 4 \geq 5$$

che è chiaramente falsa. Dunque $f'(x)<0$ anche per $x \geq -2$, ossia $f'(x)<0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, perciò $f(x)$ è descrescente in tutto $\mathbb{R}$. In particolare, non esistono massimi o minimi relativi (e assoluti).

Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+5} - (x+2)\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}}{x^2+4x+5} = \frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\left(x^2+4x+5\right)^{3/2}} = \left(x^2+4x+5\right)^{-3/2} > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi $f(x)$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$. Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è indicato in figura 2.

Esercizio 4a

Usando la relazione $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)$ e integrando per parti si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t/2}\cos(t)\mathrm{d}t$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la sostituzione $t=2x$, dalla quale $x=t/2$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$, $t=0$ per $x=0$ e $t=\pi$ per $x=\pi/2$. Ora, per l'ultimo integrale si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t/2}\cos(t)\mathrm{d}t &= \Big[2\mathrm{e}^{t/2}\cos(t)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\mathrm{e}^{t/2}\big(-\sin(t)\big)\mathrm{d}t \\
&= 2\Big[\mathrm{e}^{t/2}\cos(t)\Big]_0^{\pi} + 2\left\{\Big[2\mathrm{e}^{t/2}\sin(t)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\mathrm{e}^{t/2}\cos(t)\mathrm{d}t\right\} \\
\Rightarrow \qquad 5\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{t}\cos(t)\mathrm{d}t &= 2\Big[\mathrm{e}^{t/2}\big(\cos(t)+2\sin(t)\big)\Big]_0^{\pi} = -2\Big(\mathrm{e}^{\pi/2}+1\Big)\,.
\end{aligned}$$

Quindi, tornando all'integrale dell'esercizio:

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\pi/2}-1\Big) + \frac{2}{5}\frac{1}{4}\Big(\mathrm{e}^{\pi/2}+1\Big) = \frac{3\mathrm{e}^{\pi/2}-2}{5}\,.$$

Alternativamente si può procedere integrando direttamente per parti più volte:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\mathrm{e}^x \sin^2(x)\Big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\pi/2} - 2\left\{\Big[\mathrm{e}^x \sin(x)\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\big(\cos^2(x)-\sin^2(x)\big)\mathrm{d}x\right\} \\ &= \mathrm{e}^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\big(1-2\sin^2(x)\big)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi/2} + 2\Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

dove $\Big[\mathrm{e}^x \sin(x)\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = 0$. Discende allora che

$$5\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi/2} + 2\Big(\mathrm{e}^{\pi/2}-1\Big) \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\mathrm{e}^{\pi/2}-2}{5}\,.$$

Esercizio 4b

Utilizziamo la linearità dell'integrale

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln(2x+1)\mathrm{d}x - \int_1^2 \ln(2x-1)\mathrm{d}x$$

e poi le sostituzioni $t = 2x+1$ nel primo integrale (da cui $x = (t-1)/2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/2$, $t = 3$ per $x = 1$, $t = 5$ per $x = 2$) e $t = 2x-1$ nel secondo integrale (da cui $x = (t+1)/2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/2$, $t = 1$ per $x = 1$, $t = 3$ per $x = 2$):

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x &= \int_1^2 \ln(2x+1)\mathrm{d}x - \int_1^2 \ln(2x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^5 \ln(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^3 \ln(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\Big[t\ln(t)-t\Big]_3^5 - \Big[t\ln(t)-t\Big]_1^3\right) = \frac{1}{2}\Big(5\ln(5)-5-2(3\ln(3)-3)-1\Big) \\ &= \ln\big(5^{5/2}\big) - \ln\big(3^3\big) = \ln\left(\frac{5^{5/2}}{27}\right).\end{aligned}$$

Allo stesso risultato si arriva procedendo per parti:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x &= \left[x\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{2x-1}{2x+1}\,\frac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x \\ &= 2\ln\left(\frac{5}{3}\right) - \ln(3) + \int_1^2 \frac{4x}{(2x+1)(2x-1)}\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Ora usiamo il metodo di decomposizione nell'ultimo integrale:

$$\frac{4x}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{2(A+B)x - A + B}{(2x+1)(2x-1)} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2(A+B) = 4\\ -A+B = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}A = 1\\ B = 1\end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4x}{(2x+1)(2x-1)}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(2x+1)+\ln(2x-1)\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\Big[\ln\big((2x+1)(2x-1)\big)\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\Big(\ln(15)-\ln(3)\Big) \\ &= \ln\big(5^{1/2}\big)\,.\end{aligned}$$

Quindi, tornando all'integrale dell'esercizio:

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{5^2}{3^2}\right) - \ln(3) + \ln\big(5^{1/2}\big) = \ln\left(\frac{5^{5/2}}{27}\right)$$

esattamente come prima.

Esercizio 5

Si tratta di un'equazione differenziale del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, in cui $a = 1$, $b = -6$, $\alpha = 2$, $Q(x) = (x+1)$ e $\deg\big(Q(x)\big) = 1$. Il polinomio associato all'equazione differenziale è $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$ e risulta:

$$\Delta = 1 - 24 = 25 > 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{-1-5}{2} = -3,\ \lambda_2 = \frac{-1+5}{2} = 2\,.$$

Essendo $\alpha = 2 = \lambda_2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, α è una radice semplice (cioè di molteplicità uno) di $P(\lambda)$, ossia $P(\alpha) = 0$, ma $P'(\alpha) \neq 0$. Allora, una soluzione particolare dell'equazione differenziale è del tipo

$$\widetilde{y}(x) = x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x} = (Ax^2 + Bx)\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{con } A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}\,'(x) &= \mathrm{e}^{2x}\big(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B\big) = \mathrm{e}^{2x}\big(2Ax^2 + 2(A+B)x + B\big)\,,\\
\widetilde{y}\,''(x) &= \mathrm{e}^{2x}\big(4Ax^2 + 4(A+B)x + 2B + 4Ax + 2(A+B)\big) = \mathrm{e}^{2x}\big(4Ax^2 + 4(2A+B)x + 2(A+2B)\big)\,.
\end{aligned}$$

Ne possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
L(\widetilde{y}) &= \widetilde{y}\,''(x) + \widetilde{y}\,'(x) - 6\widetilde{y}(x)\\
&= \mathrm{e}^{2x}\Big((4A + 2A - 6A)\,x^2 + (8A + 2A + 4B + 2B - 6B)\,x + (2A + 4B + B)\Big)\\
&= \mathrm{e}^{2x}(10Ax + 2A + 5B)\,.
\end{aligned}$$

L'equazione differenziale è dunque verificata se

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ 2A + 5B = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/10 \\ 5B = 1 - 1/5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/10 \\ B = 4/25 \end{cases}$$

Pertanto una soluzione particolare dell'equazione data è

$$\widetilde{y}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}\left(\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{4}{5}\,x\right)\,.$$

Opzionalmente, possiamo notare che, poichè le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{2x}\,,$$

l'integrale generale dell'equazione data si scrive come

$$y^*(x) = \widetilde{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{10}\,x^2 + \frac{4}{25}\,x + c_2\right) + c_1\mathrm{e}^{-3x} \qquad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$