Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica
Prova scritta del 16/06/2014 – A.A. 2013–2014

Svolgere, **alternativamente, una sola** delle seguenti tre sezioni di esercizi.

Sezione 1: esercizi per la prova totale

1) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\sqrt{4x+5-x^2} \leq x-2\,.$$

2) Sia dato l'insieme $A = \left\{ \sqrt{n^2-3n+4} - n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\} \right\}$. Trovare $\inf(A)$ e $\sup(A)$ e dire se sono, rispettivamente, $\min(A)$ e $\max(A)$.

3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (x+1)\left|e^x - 1\right|$$

determinando tutte le proprietà (esistenza, segno, crescenza/decrescenza, convessità/concavità, ...), fino a disegnarne il grafico.

4) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$\text{(a)} \quad \int e^{-x}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

5) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 3e^{-x}\sin(2x)$$

6) Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\arctan(x)y'(x)}{(1+x^2)^{-1}} + 3y^3(x) = 0 \\ y\big(\sqrt{3}\big) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big(\ln(\pi/3)\Big)^{-1/2} \end{cases}$$

Sezione 2: recupero del primo modulo

*) Svolgere gli esercizi 1 e 2.

7) Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+\sqrt[3]{n}}{n+4}\right)^n \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{x^2+\sqrt{x}+1}\,\ln\Big(x^2+2^x\Big)$$

8) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1} \qquad\qquad \text{con} \quad x \in A = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

mostrare se è iniettiva o meno e determinarne l'immagine $f(A)$.

Sezione 3: recupero del secondo modulo

*) Svolgere gli esercizi da 3 a 6.

9) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin(x)}{\sin(x)\ln(1+3x^2)}\,.$$

Soluzioni e commenti

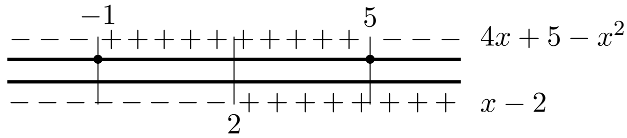
Per brevità, a differenza di quanto fatto per le prove parziali, nel seguito sono riportate le soluzioni degli esercizi del compito includendo solo quei commenti che risultino fondamentali per la comprensione della soluzione. Qualora uno stesso esercizio possa eventualmente essere risolto in più modi, in generale è descritto un solo modo di soluzione. Si invitano gli studenti a contattare i docenti per eventuali dubbi o chiarimenti.

Esercizio 1

Imponendo la condizione di non negatività del radicando $p_2(x) = -x^2 + 4x + 5$ si ha:

$$\Delta = 4 + 5 = 9 > 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{-1} = 2 \mp 3 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 5$$

$$4x + 5 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 5$$



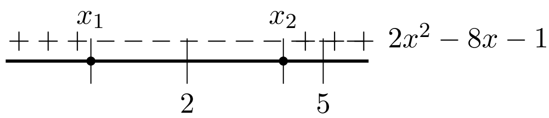
Dobbiamo quindi studiare la disequazione *solo* nell'intervallo $[-1, 5]$. Notiamo subito che $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$; inoltre per $x = 2$ il membro sinistro è strettamente positivo (2 non è uno zero del polinomio radicando $p_2(x)$). Quindi nell'intervallo $[-1, 2]$ la disuguaglianza **non** è verificata perchè il membro sinistro è non negativo, mentre il membro destro è non positivo e gli zeri non coincidono. Rimane dunque da studiare la disuguaglianza solo nell'intervallo $]2, 5]$: poichè in questo intervallo entrambi i membri sono positivi, è lecito elevare al quadrato:

$$\text{per } x \in]2,5] : \quad \sqrt{4x + 5 - x^2} \leq x - 2 \Leftrightarrow 4x + 5 - x^2 \leq (x-2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 1 \geq 0$$

$$\Delta = 16 + 2 = 18 > 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 - 3/\sqrt{2} \approx -0.12132 < 0,\; x_2 = 2 + 3/\sqrt{2} \approx 4.1213 > 0$$

$$\Rightarrow\; x_1 \notin\,]2,5],\; x_2 \in\,]2,5]$$

$$2x^2 - 8x - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq x_1 \text{ oppure } x \geq x_2$$



Dunque, dovendo considerare $]2, 5] \cap \{x \geq x_2\}$, con $x_2 < 5$, si conclude che la disuguaglianza è verificata solo nell'intervallo $]x_2, 5]$.

Esercizio 2

Consideriamo il radicando e verifichiamo che sia non negativo: per questo studiamo il segno del polinomio di secondo grado $p_2(x) = x^2 - 3x + 4$:

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0 \quad \Rightarrow \quad p_2(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad n^2 - 3n + 4 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notiamo che per $n = 1$ la funzione $f(n) = \sqrt{n^2 - 3n + 4} - n$ assume valore $f(1) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$, quindi certamente $\inf(A) \leq f(1) \leq \sup(A)$. Determiniamo l'estremo superiore $\beta = \sup(A)$, che possiamo dunque supporre positivo: dalla condizione che β sia maggiorante si ha

$$\sqrt{n^2 - 3n + 4} - n \leq \beta\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n^2 - 3n + 4} \leq \beta + n\ \forall n \in \mathbb{N}$$

e siccome ambo i membri dell'ultima disequazione sono positivi, possiamo elevare al quadrato:

$$n^2 - 3n + 4 \leq n^2 + 2\beta n + \beta^2\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad (3 + 2\beta)n \geq 4 - \beta^2\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Siccome questa disuguaglianza deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$, deve valere in particolare per $n = 1$, quindi per essere maggiorante β deve soddisfare la condizione $3 + 2\beta \geq 4 - \beta^2$, da cui

$$3 + 2\beta \geq 4 - \beta^2 \quad \Leftrightarrow \quad q_2(\beta) = \beta^2 + 2\beta - 1 \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 1 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},\ \beta_1 \neq \beta_2,\ \text{tali che } q_2(\beta_1) = 0 = q_2(\beta_2),$$

$$\text{con} \quad \beta_1 = -1 - \sqrt{2} < 0, \quad \beta_2 = -1 + \sqrt{2} > 0, \quad \text{e} \quad q_2(\beta) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \leq \beta_1 \text{ oppure } \beta \geq \beta_2.$$

Poichè $\beta_1 < 0$ ed $f(1) > 0$, il valore β_1 e tutti gli altri valori negativi non sono accettabili come estremo superiore. Dunque $\sup(A) = \beta_2$ (è il più piccolo dei maggioranti) e poichè $\beta_2 = f(1)$, è anche $\sup(A) = \max(A)$.

Determiniamo l'estremo inferiore $\alpha = \inf(A)$. Si nota subito che $f(2) = \sqrt{2} - 2 \approx -0.5858 < 0$, quindi certamente $\alpha < 0$. Osserviamo inoltre che $f(n) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 - 3n + 4} \geq n$ da cui, essendo non negativi entrambi i membri della disuguaglianza, elevando al quadrato si ha $f(n) \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 4 \geq n^2 \Leftrightarrow n \leq 4/3 < 2$. Pertanto, $f(1)$ è l'*unico* elemento non negativo dell'insieme A e $f(n) < 0\ \forall n \geq 2$. Nella condizione che α sia un minorante di A, cioè $f(n) \geq \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$, possiamo considerare $n > 1$, così che entrambi i membri della disequazione sono negativi. Dobbiamo quindi considerare i loro moduli prima di elevare al quadrato: per $n > 1$, $\left|\sqrt{n^2 - 3n + 4} - n\right| = n - \sqrt{n^2 - 3n + 4}$ e $|\alpha| = -\alpha$. Allora, per $n > 1$

$$\sqrt{n^2 - 3n + 4} - n \geq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{n^2 - 3n + 4} - n\right| \leq |\alpha| \quad \Leftrightarrow \quad n - \sqrt{n^2 - 3n + 4} \leq -\alpha$$
$$-\sqrt{n^2 - 3n + 4} \leq -(n + \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n^2 - 3n + 4} \geq n + \alpha$$

che è la stessa disequazione che si è trovata in precedenza per β, ma questa volta dovremo considerare *esclusivamente* valori negativi per α. Procedendo nello stesso modo visto sopra, si trova

$$n^2 - 3n + 4 \geq n^2 + 2\alpha n + \alpha^2\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad (3 + 2\alpha)n \leq 4 - \alpha^2\ \forall n \in \mathbb{N}$$

e poichè la disuguaglianza deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$, il coefficiente di n dev'essere non positivo, quindi

$$3 + 2\alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq -3/2.$$

Pertanto, $\alpha = -3/2 = \inf(A)$ perchè è il massimo dei minoranti. Per vedere se è anche minimo, dobbiamo vedere se è un valore assunto da $f(n)$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Si ha, ricordando che $n > \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{n^2 - 3n + 4} - n = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n^2 - 3n + 4} = n - \frac{3}{2} \Leftrightarrow n^2 - 3n + 4 = n^2 - 3n + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4 = \frac{9}{4}$$

che è falso. Quindi $\nexists n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = \alpha$, pertanto $\inf(A)$ **non** è $\min(A)$.

Esercizio 3

Il campo di esistenza è tutto $\mathbb{R}$, inoltre $f(x) \geq 0$ per $x \geq -1$ e $f(-1) = 0 = f(0)$. Si ha

$$\mathrm{e}^x - 1 \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} (x+1)\big(\mathrm{e}^x - 1\big) & \text{per } x \geq 0 \\ (x+1)\big(1 - \mathrm{e}^x\big) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x}\big(1 - \mathrm{e}^x\big) = 1 \qquad \Rightarrow \quad \text{esiste un asintoto obliquo a } -\infty \text{ parallelo a } y = x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x + 1 - \mathrm{e}^x(x+1) - x = 1 \qquad \Rightarrow \quad y = x + 1 \text{ è asintoto obliquo per } f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}\big(\mathrm{e}^x - 1\big) = +\infty \qquad \Rightarrow \quad \text{non esiste asintoto obliquo a } +\infty$$

Studiamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left|\mathrm{e}^x - 1\right| + (x+1)\big(\mathrm{e}^x - 1\big)\,\mathrm{sgn}\big(\mathrm{e}^x - 1\big) \qquad \Rightarrow f(x) \text{ è } \textbf{non} \text{ derivabile in } x = 0 \\ &= \mathrm{sgn}\big(\mathrm{e}^x - 1\big)\Big(\mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^x(x+1)\Big) = \begin{cases} \mathrm{e}^x(x+2) - 1 & \text{per } x > 0 \\ 1 - \mathrm{e}^x(x+2) & \text{per } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} 1 - \mathrm{e}^x(x+2) = -1, \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^x(x+2) - 1 = +1.$$

Per $x > 0$ è

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x(x+2) - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 \geq \mathrm{e}^{-x}.$$

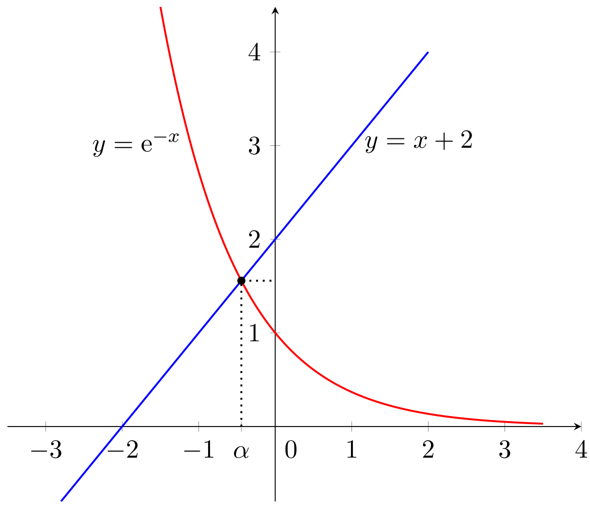


Figura 1: rappresentazione grafica dell'intersezione della retta $y = x+2$ con l'esponenziale negativa $y = \mathrm{e}^{-x}$.

Osserviamo che $y = x + 2$ è la retta parallela alla bisettrice primo-terzo quadrante che passa per i punti $(-2, 0)$ e $(0, 2)$: essa è monotona strettamente crescente e per $x > 0$ è $y > 2$. Osserviamo anche che $y = \mathrm{e}^{-x}$ è l'esponenziale negativa di base naturale: essa è monotona strettamente decrescente e per $x > 0$ è $0 < y < 1$. Dunque $f'(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Per $x < 0$ la condizione $f'(x) \geq 0$ diventa $x + 2 \leq \mathrm{e}^{-x}$. Si vede subito graficamente (fig. 1) che la retta $y = x + 2$ interseca il grafico della funzione $y = \mathrm{e}^{-x}$ in un punto $\alpha \in]-1, 0[$, cioè $\exists \alpha \in]-1, 0[$ tale che $\alpha + 2 = \mathrm{e}^{-\alpha}$. Per le proprietà di monotonìa della retta e dell'esponenziale negativa, il punto α è l'*unico* punto d'intersezione dei grafici di queste due funzioni. Dunque per $x < 0$ si ha

$$\begin{cases} x + 2 < \mathrm{e}^{-x} \text{ per } x < \alpha & \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \ \forall x < \alpha \\ x + 2 > \mathrm{e}^{-x} \text{ per } x > \alpha & \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \text{ per } \alpha < x < 0 \\ x + 2 = \mathrm{e}^{-x} \text{ per } x = \alpha & \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \text{ in } x = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ è punto critico} \end{cases}$$

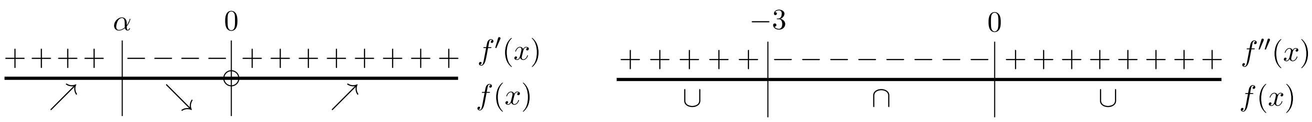
Si conclude quindi che (fig. 2a)

$$\begin{cases} \text{per } x > 0: & f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ è crescente in } [0, +\infty[\\ \text{per } x < 0: & f'(x) > 0 \text{ per } x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ è crescente per } x < \alpha \\ & f'(x) < 0 \text{ per } \alpha < x < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ è decrescente per } x \in]\alpha, 0] \\ & f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ è punto di massimo relativo con } f(\alpha) > 1 \\ \text{per } x = 0: & f(x) \text{è decrescente in }]\alpha, 0[\text{ e crescente per } x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ è punto di minimo relativo} \end{cases}$$

Studiamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x}(x + 2) + \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(x + 3) & \text{per } x > 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{+} \\ -\mathrm{e}^{x}(x + 2) - \mathrm{e}^{x} = -\mathrm{e}^{x}(x + 3) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Per $x < 0$ è $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ e $f''(-3) = 0$. Si conclude quindi che $f(x)$ è convessa per $x < -3$ e $x \geq 0$, $f(x)$ è concava per $-3 < x < 0$ (fig. 2b) e $x = -3$ è punto di flesso con tangente avente coefficiente angolare $f'(-3) = 1 - \mathrm{e}^{-3}(-3 + 2) = 1 + \mathrm{e}^{-3} \approx 1.05$ e valore della funzione $f(-3) = (-3 + 1)\big(1 - \mathrm{e}^{-3}\big) \approx -1.90$.



(a) Segno di $f'(x)$ e crescenza di $f(x)$.

(b) Segno di $f''(x)$ e convessità di $f(x)$.

Figura 2: determinazione degli intervalli di crescenza/decrescenza e convessità/concavità di $f(x)$.

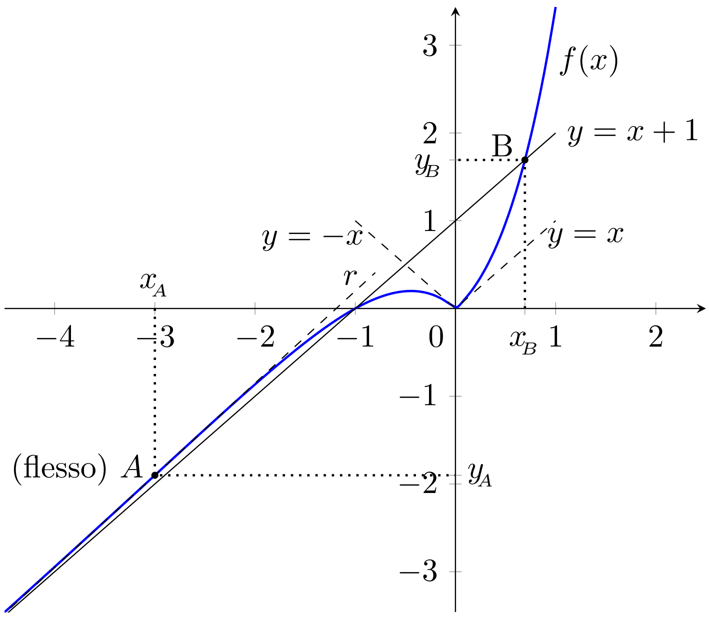


Figura 3: grafico della funzione dell'esercizio 3. Sono evidenziati il flesso A ed il punto di intersezione B dell'asintoto obliquo $y = x + 1$ con il ramo della funzione sul semiasse positivo delle ascisse. La retta r è la tangente al punto di flesso A. Sono evidenziate anche le tangenti sinistra e destra al grafico di $f(x)$ in $x = 0$, punto in cui la funzione è non derivabile ($x = 0$ è un *punto spigoloso*).

Per terminare, possiamo considerare le intersezioni della funzione $f(x)$ con l'asintoto obliquo:

$$\begin{aligned}
\text{per } x < 0: \quad & f(x) = x + 1 \Leftrightarrow (x+1)\big(1 - \mathrm{e}^x\big) = x + 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (perchè } \mathrm{e}^x < 1\ \forall x < 0) \\
\text{per } x > 0: \quad & f(x) = x + 1 \Leftrightarrow (x+1)\big(\mathrm{e}^x - 1\big) = x + 1 \Leftrightarrow (x+1)\big(\mathrm{e}^x - 2\big) = 0 \\
& \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2) = \beta \approx 0.69 \text{ con } f(\beta) \approx 1.69.
\end{aligned}$$

Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è mostrato in figura 3.

Esercizio 4a

Utilizzando la relazione $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ e integrando due volte per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) + \int \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) - \mathrm{e}^{-x}\cos(2x) - 2\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \frac{5}{2}\int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(2x)\right) \ \Rightarrow \ \int \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}\big(\sin(2x) + 2\cos(2x)\big)$$

$$\Rightarrow \ \int \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x}\big(\sin(2x) + 2\cos(2x)\big)$$

Esercizio 4b

Utilizziamo la sostituzione $x = 2\sin(t)$, da cui $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\mathrm{d}t$, $t_1 = \arcsin(1/2) = \pi/6$ e $t_2 = \arcsin(1) = \pi/2$:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{4\big(1 - \sin^2(t)\big)}}{4\sin^2(t)}\, 2\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\sqrt{\cos^2(t)}}{4\sin^2(t)}\, 2\cos(t)\mathrm{d}t$$

Ora per $t \in [\pi/6, \pi/2]$ è $\cos(t) \geq 0$ dunque $\sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$. Allora si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^2(t)}}{\sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2(t)\mathrm{d}t$$

e si ricava immediatamente dalle tavole che, poichè $\int \sin^{-2}(t)\mathrm{d}t = \int \big(1+\cot^2(t)\big)\mathrm{d}t = t + \int \cot^2(t)\mathrm{d}t = -\cot(t)$, una primitiva di $\cot^2(x)$ è $-\big(t+\cot(t)\big)$, da cui

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2(t)\mathrm{d}t = \Big[-\big(t+\cot(t)\big)\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\left(\frac{\pi}{2}+\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}-\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\,.$$

Alternativamente, integrando per parti si ha

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\sin(t)}\ \cos(t)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[-\cot(t)-t\Big]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

da cui si perviene allo stesso risultato di prima.

Esercizio 5

Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. Esaminiamo il polinomio associato:

$$P(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+3 \qquad \Delta = 1-3=-2<0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=-1\pm i\sqrt{2}=a+ib \text{ con } a=-1,\ b=\pm\sqrt{2}\,.$$

Il termine non omogeneo dell'equazione è del tipo $Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$ con $Q(x)=3$ polinomio costante di grado zero, $\alpha=-1$ e $\beta=2$. Poichè $\alpha+i\beta=-1+2i\neq -1\pm i\sqrt{2}=a+ib$, è $P(\alpha+i\beta)\neq 0$ e dunque si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(x)=A\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)+B\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)=\mathrm{e}^{-x}\Big(A\cos(2x)+B\sin(2x)\Big) \qquad \text{con } A,B\in\mathbb{R}.$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\bigg(-\Big(A\cos(2x)+B\sin(2x)\Big)+\Big(-2A\cos(2x)+2B\sin(2x)\Big)\bigg)\\
&= \mathrm{e}^{-x}\Big((-A+2B)\cos(2x)+(-2A-B)\sin(2x)\Big)\\
\widetilde{y}''(x) &= \mathrm{e}^{-x}\bigg(-(-A+2B)\cos(2x)-(-2A-B)\sin(2x)+(-2)(-A+2B)\sin(2x)+2(-2A-B)\cos(2x)\bigg)\\
&= \mathrm{e}^{-x}\bigg((-3A-4B)\cos(2x)+(4A-3B)\sin(2x)\bigg)
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\widetilde{y}''(x)+2\widetilde{y}'(x)+3\widetilde{y}(x)=\\
&\quad=\mathrm{e}^{-x}\bigg((-3A-4B)\cos(2x)+(4A-3B)\sin(2x)+2\Big((-A+2B)\cos(2x)+(-2A-B)\sin(2x)\Big)\\
&\qquad\qquad +3\Big(A\cos(2x)+B\sin(2x)\Big)\bigg)\\
&\quad=\mathrm{e}^{-x}\bigg((-3A-4B-2A+4B+3A)\cos(2x)+(4A-3B-4A-2B+3B)\sin(2x)\bigg)\\
&\quad=\mathrm{e}^{-x}\Big(-2A\cos(2x)-2B\sin(2x)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\mathrm{e}^{-x}\Big(-2A\cos(2x)-2B\sin(2x)\Big)=3\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\Leftrightarrow\begin{cases}-2A=0\\-2B=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=-3/2\end{cases}\Rightarrow\widetilde{y}(x)=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\,.$$

In aggiunta alla soluzione particolare $\widetilde{y}(x)$, poichè le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)=\mathrm{e}^{-x}\sin\big(\sqrt{2}\,x\big) \quad \text{e} \quad y_2(x)=\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)=\mathrm{e}^{-x}\cos\big(\sqrt{2}\,x\big)\,,$$

l'integrale generale dell'equazione data si scrive come

$$y^*(x)=\widetilde{y}(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{3}{2}\sin(2x)+c_1\sin\big(\sqrt{2}\,x\big)+c_2\cos\big(\sqrt{2}\,x\big)\right) \qquad \text{con} \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 6

Supponiamo $y(x) \neq 0$ e riscriviamo diversamente l'equazione:

$$\frac{\arctan(x)y'(x)}{(1+x^2)^{-1}} + 3y^3(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -3\,\frac{y^3(x)}{\arctan(x)(1+x^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y^3(x)} = \frac{-3}{\arctan(x)(1+x^2)}\,.$$

Si tratta quindi di un'equazione del prim'ordine a variabili separabili. Integrando ambo i membri si ha

$$\int y^{-3}(x)y'(x)\mathrm{d}x = -3\int \frac{1}{\arctan(x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\,y^{-2}(x) = -3\ln\Big(|\arctan(x)|\Big) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad y^2(x) = \frac{1}{6\ln\Big(|\arctan(x)|\Big) + c} \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = \Big(6\ln\Big(|\arctan(x)|\Big) + c\Big)^{-1/2}$$

dove nell'ultima riga si sono supposti $x \neq 0$ (così che $\arctan(x) \neq 0$) e il radicando positivo. Essendo il reciproco di una radice quadrata, la funzione $y(x)$ deve essere non negativa, cioè $|y(x)| = y(x)$. Imponendo la condizione iniziale, poichè $\arctan\big(\sqrt{3}\big) = \pi/3$, si ha

$$y\big(\sqrt{3}\big) = \Big(6\ln(\pi/3) + c\Big)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\ln(\pi/3)\Big)^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad c = 0\,.$$

Avendo determinato il valore della costante c, si può notare che la condizione di positività del radicando equivale a richiedere che

$$6\ln\Big(|\arctan(x)|\Big) > 0 \quad \Rightarrow \quad |\arctan(x)| > 1 \quad \Rightarrow \quad \arctan(x) < -1 \quad \text{oppure} \quad \arctan(x) > 1$$
$$\Rightarrow \quad x < -\pi/4 \quad \text{oppure} \quad x > \pi/4$$

ed essendo $\pi/3 > \pi/4$ la condizione iniziale è sensata.

Esercizio 7a

Si ha:

$$\left(\frac{n+\sqrt[3]{n}}{n+4}\right)^n = \frac{n\left(1+\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)^n}{n\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n^{2/3}}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n/4}\right)^n} = \frac{\left(\left(1+\dfrac{1}{n^{2/3}}\right)^{n^{2/3}}\right)^{n^{1/3}}}{\left(\left(1+\dfrac{1}{n/4}\right)^{n/4}\right)^4}$$

e dato che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{2/3}}\right)^{n^{2/3}} = \mathrm{e} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/4}\right)^{n/4} = \mathrm{e}$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^{2/3}}\right)^{n^{2/3}}\right)^{n^{1/3}} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/4}\right)^{n/4}\right)^4 = \mathrm{e}^4$$

da cui si conclude immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt[3]{n}}{n+4}\right)^n = +\infty\,.$$

Esercizio 7b

Si ha che

$$\frac{3x+4}{x^2+\sqrt{x}+1} = \frac{x(3+4/x)}{x^2(1+x^{-3/2}+1/x^2)} = \frac{3+4/x}{x(1+x^{-3/2}+1/x^2)}$$
$$\ln\big(x^2+2^x\big) = \ln\Big(2^x\big(1+x^2/2^x\big)\Big) = \ln\big(2^x\big) + \ln\big(1+x^2/2^x\big) = x\ln(2) + \frac{x^2}{2^x}\,\frac{\ln\big(1+x^2/2^x\big)}{x^2/2^x}\,.$$

Ora, dato che

$$\frac{3+4/x}{x(1+x^{-3/2}+1/x^2)}x\ln(2) = \frac{(3+4/x)\ln(2)}{1+x^{-3/2}+1/x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3\ln(2)$$
$$\frac{3+4/x}{x(1+x^{-3/2}+1/x^2)}\,\frac{x^2}{2^x}\,\frac{\ln\big(1+x^2/2^x\big)}{x^2/2^x} = \frac{3+4/x}{1+x^{-3/2}+1/x^2}\,\frac{x}{2^x}\,\frac{\ln\big(1+x^2/2^x\big)}{x^2/2^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+4/x}{1+x^{-3/2}+1/x^2} = 3\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\big(1+x^2/2^x\big)}{x^2/2^x} = 1\,,$$

si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{x^2+\sqrt{x}+1}\,\ln\big(x^2+2^x\big) = 3\ln(2)+3\cdot0\cdot1 = 3\ln(2)\,.$$

Esercizio 8

Vediamo se $f(x)$ è iniettiva: siano $x, z \in A = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, allora

$$\begin{aligned}
f(x) = f(z) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{z-1}{z^2+2z+1} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(z^2+2z+1) = (z-1)(x^2+2x+1)\\
&\Leftrightarrow \quad xz^2+2zx+x-(z^2+2z+1) = x^2z+2xz+z-(x^2+2x+1)\\
&\Leftrightarrow \quad xz^2+x-z^2-2z = x^2z+z-x^2-2x\\
&\Leftrightarrow \quad xz^2-x^2z+x^2-z^2+3(x-z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xz(z-x)+(x-z)(x+z)+3(x-z) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-z)\big(-xz+x+z+3\big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Dunque la funzione è **non** iniettiva, dato che $f(x) = f(z)$ non solo quando $x = z$, ma anche quando

$$-xz+x+z = -3 \quad \Leftrightarrow \quad (1-x)z = -(3+x) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{3+x}{x-1} \quad (\text{con } x \neq 1).$$

Ad esempio, per $x = 0$ è $z = -3$ e $f(0) = -1 = f(-3)$, oppure per $x = 2$ è $z = 5$ e $f(2) = 1/9 = f(5)$. Per determinare l'immagine $f(A)$ di f ricordiamo che $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ tale che $y = f(x)$. Nel caso in esame significa

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad y(x^2+2x+1) = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad yx^2+(2y-1)x+(y+1) = 0\,.$$

Studiamo dunque il polinomio di secondo grado in x, $p_2(x) = yx^2+(2y-1)x+(y+1)$, imponendo che ammetta almeno una soluzione:

$$\Delta(y) = (2y-1)^2-4y(y+1) = 4y^2-4y+1-4y^2-4y = -8y+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ se $y \leq \dfrac{1}{8}$ e $y \neq 0$, $x_1 = \dfrac{(1-2y)-\sqrt{1-8y}}{2y}$ e $x_2 = \dfrac{(1-2y)+\sqrt{1-8y}}{2y}$ sono tali che $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Si vede immediatamente che $f(1) = 0$ e che $x = 1$ è l'*unico* punto in cui f si annulla. Inoltre, preso $y = 1/8$ si ha che $x_{1/8} = (1-1/4)/(1/4) = 3$, cioè $f(3) = 1/8$ e dunque $1/8$ è un valore assunto di f. Infine, osserviamo che comunque si prenda $\beta \leq 1/8$, $\exists x_\beta \in A$ tale che $f(x_\beta) < \beta$, cioè $f(A)$ è inferiormente **non** limitato. Infatti, preso un qualunque $\beta \leq 1/8$ si ha:

$$\frac{x-1}{x^2+2x+1} < \beta \Leftrightarrow x-1-\beta(x^2+2x+1) < 0 \Leftrightarrow q_\beta(x) = \beta x^2+(2\beta-1)x+\beta+1 > 0$$

e affinchè questa disequazione ammetta almeno una soluzione reale, imponiamo che il discriminante di $q_\beta(x)$ sia non negativo:

$$\Delta(q_\beta) = (2\beta-1)^2-4\beta(\beta+1) = 4\beta^2-4\beta+4-4\beta^2-4\beta = 4(1-2\beta) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2\beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \leq 1/2$$

che è certamente verificata per $\beta \leq 1/8$. Quindi, $\forall\beta \leq 1/8$ esiste *almeno un* $x_\beta \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_\beta) < \beta$. Dobbiamo controllare che $x_\beta \in A$, cioè che non possa accadere che $x_\beta = -1$. Le radici di $q_\beta(x)$ sono

$$x_{\beta,1} = \frac{-(2\beta-1)-\sqrt{4(1-2\beta)}}{2\beta} \qquad \text{e} \qquad x_{\beta,2} = \frac{-(2\beta-1)+\sqrt{4(1-2\beta)}}{2\beta}\,.$$

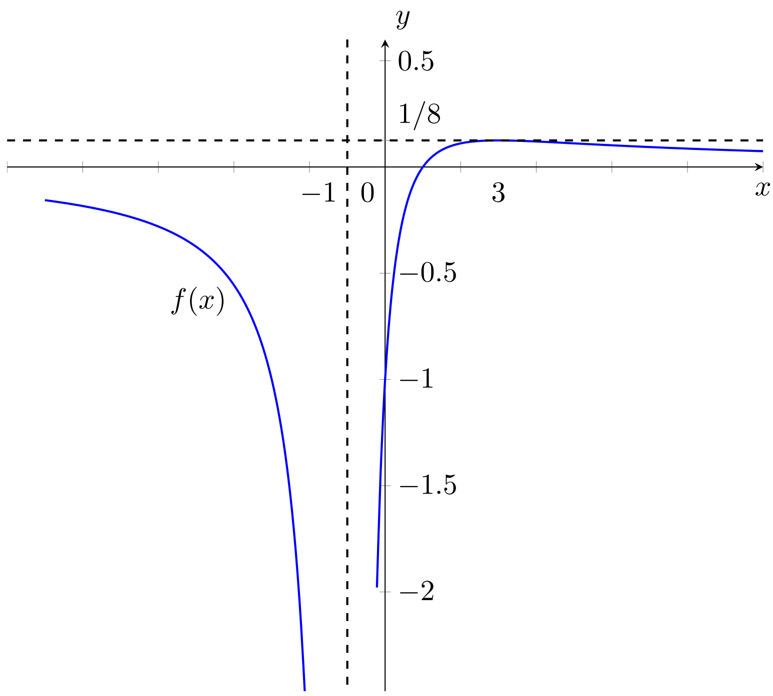


Figura 4: grafico della funzione dell'esercizio 8.

Allora

$$x_{\beta,1} = -1 \Leftrightarrow \frac{1-2\beta-2\sqrt{1-2\beta}}{2\beta} = -1 \Leftrightarrow 1-2\beta-2\sqrt{1-2\beta} = -2\beta \Leftrightarrow \sqrt{1-2\beta} = 1/2$$
$$\Leftrightarrow 1-2\beta = 1/4 \Leftrightarrow \beta = 3/8$$

che è impossibile perchè per ipotesi $\beta \leq 1/8$. D'altra parte

$$x_{\beta,2} = -1 \Leftrightarrow \frac{1-2\beta+2\sqrt{1-2\beta}}{2\beta} = -1 \Leftrightarrow 1-2\beta+2\sqrt{1-2\beta} = -2\beta \Leftrightarrow \sqrt{1-2\beta} = -1/2$$

che è impossibile perchè una radice quadrata è sempre non negativa. Dunque certamente $x_\beta \neq -1$, ossia $x_\beta \in A$, cosa che conferma che $f(A)$ è inferiormente non limitato. Si conclude perciò che $f(A) =]-\infty, 1/8]$. L'andamento qualitativo della funzione $f(x)$ è mostrato in fig. 4.

Esercizio 9

Il limite è della forma indeterminata 0/0. Applichiamo la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin(x)}{\sin(x)\ln(1+3x^2)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)\ln(1+3x^2) + \sin(x)\dfrac{6x}{1+3x^2}} \qquad \text{(è ancora del tipo } 0/0\text{)}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-3/2}(-2x)}{-\sin(x)\ln(1+3x^2) + \cos(x)\dfrac{6x}{1+3x^2} + \cos(x)\dfrac{6x}{1+3x^2} + \sin(x)\dfrac{6(1+3x^2)-36x^2}{\left(1+3x^2\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(1-x^2\right)^{-3/2}x}{-\sin(x)\ln(1+3x^2) + \cos(x)\dfrac{12x}{1+3x^2} + \sin(x)\dfrac{6(1-3x^2)}{\left(1+3x^2\right)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

che è ancora del tipo 0/0. Applichiamo nuovamente la regola di De l'Hôpital e, per motivi di spazio, calcoliamo separatamente le derivate del numeratore e del denominatore. Per il numeratore $f(x)$ si ha:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{-5/2}\left(-2x^2\right) - \left(1-x^2\right)^{-3/2} = -\left(1-x^2\right)^{-3/2}\left(3x^2\left(1-x^2\right)^{-1}+1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

Per il denominatore $g(x)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
g'(x) = & -\cos(x)\ln(1+3x^2) - \sin(x)\,\frac{6x}{1+3x^2} - \sin(x)\,\frac{12x}{1+3x^2} + \cos(x)\,\frac{12\big(1+3x^2\big) - 72x^2}{\big(1+3x^2\big)^2} \\
& + \cos(x)\,\frac{6\big(1-3x^2\big)}{\big(1+3x^2\big)^2} + \sin(x)\,\frac{-36x\big(1-3x^2\big)^2 - 12\big(1-3x^2\big)\big(1+3x^2\big)6x}{\big(1+3x^2\big)^4} \\
= & -\cos(x)\ln(1+3x^2) - \sin(x)\,\frac{18x}{1+3x^2} + \cos(x)\,\frac{18\big(1-3x^2\big)}{\big(1+3x^2\big)^2} + \sin(x)\,\frac{-108x\big(1-3x^2\big)\big(1+x^2\big)}{\big(1+3x^2\big)^4}
\end{aligned}
$$

e dato che

$$
\lim_{x\to 0}\cos(x)\ln(1+3x^2) = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\sin(x)\,\frac{18x}{1+3x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\sin(x)\,\frac{-108x\big(1-3x^2\big)\big(1+x^2\big)}{\big(1+3x^2\big)^4} = 0
$$

$$
\text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\cos(x)\,\frac{18\big(1-3x^2\big)}{\big(1+3x^2\big)^2} = 18
$$

si conclude che $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x) = -1/18$, che è anche il valore del limite iniziale.