Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica
Prova scritta dell'11/06/2015 – A.A. 2014–2015

Svolgere, **alternativamente, una sola** delle seguenti tre sezioni di esercizi.

Sezione 1: esercizi per la prova totale

1) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x-2} \geq 2\,.$$

2) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $A = \left\{ \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ e dire se sono, rispettivamente, massimo e minimo elemento di A.

3) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \mathrm{e}^x$$

e disegnarne il grafico.

4) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\pi x^2 \cos(3\,x) \mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x$$

5) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (x+3)\mathrm{e}^{2x}$$

6) Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y'(x) = (x+1)y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sezione 2: recupero del primo modulo

*) Svolgere gli esercizi 1 e 2.

7) Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\sqrt{n}}{n+1} \right)^{\sqrt{n}} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^x\right)}{\sqrt{x^2+4}}$$

8) Sia data la funzione

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1} \qquad\quad \text{con} \quad x \in A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}\,.$$

Dire se f é iniettiva e calcolare $f(A)$, cioè il suo insieme dei valori (o *codominio*).

Sezione 3: recupero del secondo modulo

*) Svolgere gli esercizi da 3 a 6.

9) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos(x))}{\arcsin(x)\ln\left(1+x^2\right)}\,.$$

Soluzioni e commenti

Per brevità, a differenza di quanto fatto per le prove parziali, nel seguito sono riportate le soluzioni degli esercizi del compito includendo solo quei commenti che risultino fondamentali per la comprensione della soluzione. Qualora uno stesso esercizio possa eventualmente essere risolto in più modi, in generale è descritto un solo modo di soluzione. Si invitano gli studenti a contattare i docenti per eventuali dubbi o chiarimenti.

Esercizio 1

Per l'esistenza delle frazioni dobbiamo supporre $x \neq 1$ e $x \neq 2$. Risulta:

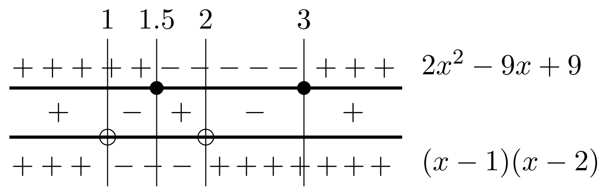
$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x-2} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2x+x-2-(x^2-3x-x+3)-2(x^2-2x-x+2)}{(x-1)(x-2)} \geq 0\,.$$

Semplificando il numeratore, risulta: $-x^2-x-2-x^2+4x-3-2x^2+6x-4 = -2x^2+9x-9$ e quindi:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x-2} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2-9x+9}{(x-1)(x-2)} \leq 0\,.$$

Siccome il discriminante del numeratore è $\Delta = 81 - 72 = 9 > 0$, il numeratore si annulla nei punti $x_{1,2} = (9 \mp \sqrt{9})/4$, ossia $x_1 = 3/2$ e $x_2 = 3$, ed è positivo per $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$. Ora, poichè il denominatore ammette come radici $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ ed è negativo per $x_3 < x < x_4$, deriva che la diseguaglianza di partenza é verificata se e solo se

$$x \in \left]1, \frac{3}{2}\right] \cup \,]2, 3]\,.$$



Esercizio 2

Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x+5} - x = +\infty\,,$$

si ha che $\sup(A) = +\infty$ e quindi l'insieme A è *superiormente non limitato* e *non ammette massimo*. D'altra parte, $d \in \mathbb{R}$ é un minorante di A se e solo se:

$$\sqrt{x^2-2x+5} - x \geq d \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Ora $\sqrt{x^2-2x+5} - x \geq d \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+5} \geq x + d$. Osserviamo che se $x + d \leq 0$, la disuguaglianza è verificata, mentre se $x+d > 0$, la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri, ossia: $x^2-2x+5 \geq x^2+2xd+d^2 \Leftrightarrow (2d+2)x \leq 5-d^2$. Osserviamo infine che se $d = -1$, l'ultima disuguaglianza ottenuta si riduce a $0 \leq 4$, che è vera indipendentemente dal valore di x. Pertanto possiamo affermare che $d = -1$ é un minorante dell'insieme A. D'altra parte se fosse $d > -1$, allora $2d+2 > 0$ e quindi la disuguaglianza $(2d+2)x \leq 5-d^2$ sarebbe equivalente a $x \leq (5-d^2)/(2d+2)$. Da qui possiamo pertanto concludere che se $d > -1$, allora d non è minorante dell'insieme A: infatti, scegliendo $x > -d$ (così che $x+d > 0$) e $x > (5-d^2)/(2d+2)$, cioè scegliendo $x > \max\{-d, (5-d^2)/(2d+2)\}$, risulta $\sqrt{x^2-2x+5} - x < d$. Ne discende che non esistono minoranti di A più grandi di -1, ossia che $d = -1$ è il più grande dei minoranti di A: allora $\inf(A) = -1$. Si noti infine che $-1 \notin A$: infatti, come abbiamo visto sopra, preso x tale che $x - 1 > 0$ l'equazione $\sqrt{x^2-2x+5} - x = -1$ non ha soluzioni perchè

$$\sqrt{x^2-2x+5} - x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-2x+5} = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+5 = x^2-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 0\,.$$

Si conclude quindi che A *è inferiormente limitato, ma non ammette minimo*.

Esercizio 3

Il campo di esistenza è $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poichè $\mathrm{e}^x > 0\ \forall x \in\ D(f)$, il segno di $f(x)$ dipende solo dal segno di $(x+1)/x$. Dato che $x + 1 > 0$ per $x > -1$, si ha

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{per } x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[\,, \\ f(x_0) = 0 & \text{per } x_0 = -1\,, \\ f(x) < 0 & \text{per } x \in \left]-1, 0\right[\,. \end{cases}$$

Si vede immediatamente che $f(-x) = \mathrm{e}^{-x}(x-1)/x$ è diverso sia da $f(x)$ che da $-f(x)$, quindi $f(x)$ è una funzione *né pari, né dispari*. Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio di definizione:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^x = +\infty$$

dunque l'asse delle ordinate $x = 0$ è asintoto verticale per $f(x)$, mentre l'asse delle ascisse $y = 0$ è asintoto orizzontale per $f(x)$ quando $x \to -\infty$. Per gli eventuali asintoti obliqui osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2}\,\mathrm{e}^x \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)\mathrm{e}^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^x = +\infty$$

e quindi non esistono asintoti obliqui. Studiamo la derivata prima, tenendo presente che la derivata del numeratore è già stata calcolata sopra per applicare la regola di De l'Hôpital:

$$f'(x) = \frac{(x+2)\mathrm{e}^x x - (x+1)\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}\mathrm{e}^x\,.$$

Si vede immediatamente che $D(f') = D(f)$ e che segno e zeri di $f'(x)$ dipendono solo dal numeratore della funzione fratta $(x^2 + x - 1)/x^2$. Per il numeratore $p_2(x) = x^2 + x - 1$ si ha

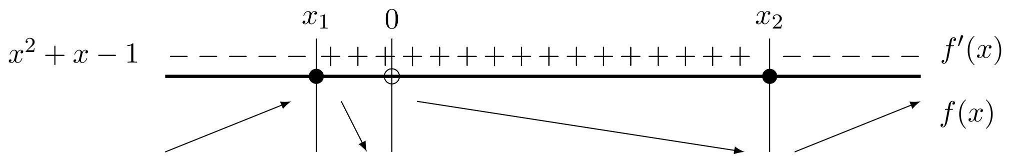
$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2,\ \text{t.c. } p_2(x_1) = 0 = p_2(x_2) \text{ con}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1.618\,, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \quad \text{e} \quad p_2(x) > 0 \text{ per } x \in \left]-\infty, x_1\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[\,.$$

Se ne conclude allora che

$$f'(x) > 0 \text{ per } x \in \left]-\infty, x_1\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[\Rightarrow f(x) \text{ è crescente in } \left]-\infty, x_1\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[$$

$$f'(x) < 0 \text{ per } x \in \left]x_1, 0\right[\cup \left]0, x_2\right[\Rightarrow f(x) \text{ è decrescente in } \left]x_1, 0\right[\cup \left]0, x_2\right[$$



ed inoltre x_1 è punto di massimo relativo (non assoluto) con $f(x_1) \approx 0.076$ ed x_2 è punto di minimo relativo (non assoluto) con $f(x_2) \approx 4.857$.

Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}\,\mathrm{e}^x + \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2 + x - 1)}{x^4}\,\mathrm{e}^x = \frac{(x^2 + x - 1)x^2 + (2x+1)x^2 - 2x(x^2 + x - 1)}{x^4}\,\mathrm{e}^x$$

$$= \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x}{x^4}\,\mathrm{e}^x = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 2}{x^3}\,\mathrm{e}^x$$

Dunque, per studiare segno e radici della derivata seconda, studiamo il numeratore $p_3(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2$. Il numeratore è un polinomio cubico, che non si scompone facilmente, quindi per procedere facciamo un breve studio di funzione di questo polinomio di terzo grado: poichè il coefficiente del termine di grado massimo è positivo, abbiamo subito che

$$\lim_{x\to-\infty} p_3(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} p_3(x) = +\infty\,.$$

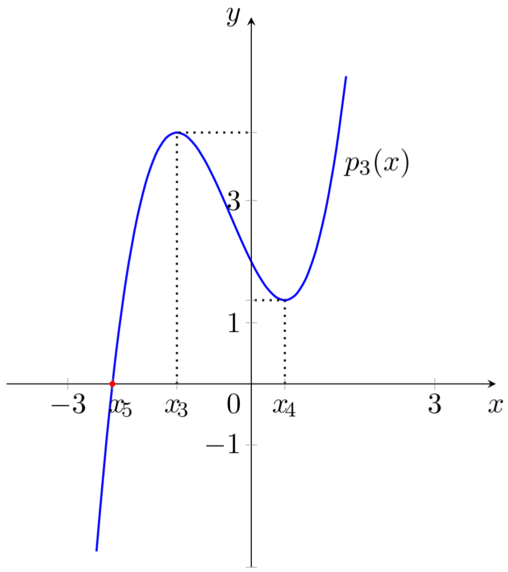


Figura 1: determinazione del comportamento qualitativo di $p_3(x)$.

La derivata prima di $p_3(x)$ è $p_3'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, che è un polinomio di secondo grado tale che

$$\Delta = (b/2) - ac = 1 + 6 = 7 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_3 \neq x_4,\ \text{t.c. } p_3'(x_3) = 0 = p_3'(x_4) \text{ con}$$
$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1.215\,, \quad x_4 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0.549 \quad \text{e} \quad p_3'(x) > 0 \text{ per } x \in \,]-\infty, x_3[\, \cup \,]x_4, +\infty[\,.$$

Ne discende allora che

$$p_3'(x) > 0 \text{ per } x \in \,]-\infty, x_3[\, \cup \,]x_4, +\infty[\, \Rightarrow p_3(x) \text{ è crescente in }]-\infty, x_3[\, \cup \,]x_4, +\infty[$$
$$p_3'(x) < 0 \text{ per } x \in \,]x_3, x_4[\, \Rightarrow p_3(x) \text{ è decrescente in }]x_3, x_4[$$

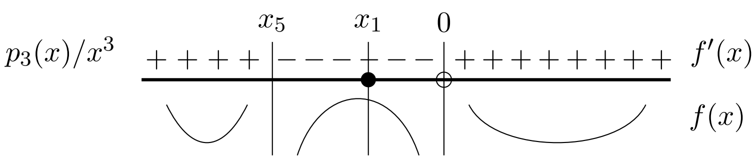
e dunque che x_3 è punto di massimo relativo (non assoluto) di $p_3(x)$ con $p_3(x_3) \approx 4.113$ ed x_4 è punto di minimo relativo (non assoluto) di $p_3(x)$ con $p_3(x_4) \approx 1.368$. Il grafico qualitativo di $p_3(x)$ è quindi del tipo indicato in figura 1. Ora, dato che il minimo relativo $p_3(x_4)$ di $p_3(x)$ è strettamente positivo, si deduce immediatamente che $p_3(x)$ ammette un'unica radice x_5, che deve necessariamente trovarsi prima di x_3 perchè $p_3(x_3) > 0$. Inoltre si ha $p_3(x) < 0$ per $x < x_5$ e $p_3(x) > 0$ per $x > x_5$. Notiamo anche che $x_1 < x_3$ con $p_3(x_1) \approx 3.618 > 0$. Si vede poi immediatamente che $p_3(-2) = 2 > 0$, mentre $p_3(-3) = -10 < 0$: deve dunque essere necessariamente $x_5 \in \,]-3, -2[$.

Siccome $p_3(x_5) = 0 \Rightarrow f''(x_5) = (p_3(x_5)/x_5)\mathrm{e}^{x_5} = 0$, concludiamo che $f(x)$ ammette l'unico punto di flesso x_5, con

$$f(x_5) \in \,]f(-3), f(-2)[\, \approx \,]0.033, 0.068[\, \Rightarrow \ f(x_5) > 0\,,$$
$$f'(x_5) \in \,]f'(-3), f'(-2)[\, \approx \,]0.028, 0.034[\, \Rightarrow \ f'(x_5) > 0\,.$$

Inoltre, il segno di $f''(x)$ dipende dal segno della frazione $p_3(x)/x^3$ e quindi

$$f''(x) > 0 \text{ per } x \in \,]-\infty, x_5[\, \cup \,[0, +\infty[\, \Rightarrow f(x) \text{ è convessa in }]-\infty, x_5[\, \cup \,[0, +\infty[$$
$$f''(x) < 0 \text{ per } x \in \,]x_5, 0] \Rightarrow f(x) \text{ è concava in }]x_5, 0]$$



In particolare, $f''(x_1) < 0$ conferma che x_1 è punto di massimo relativo, mentre $f''(x_2) > 0$ conferma che x_2 è punto di minimo relativo. Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è indicato in figura 2.

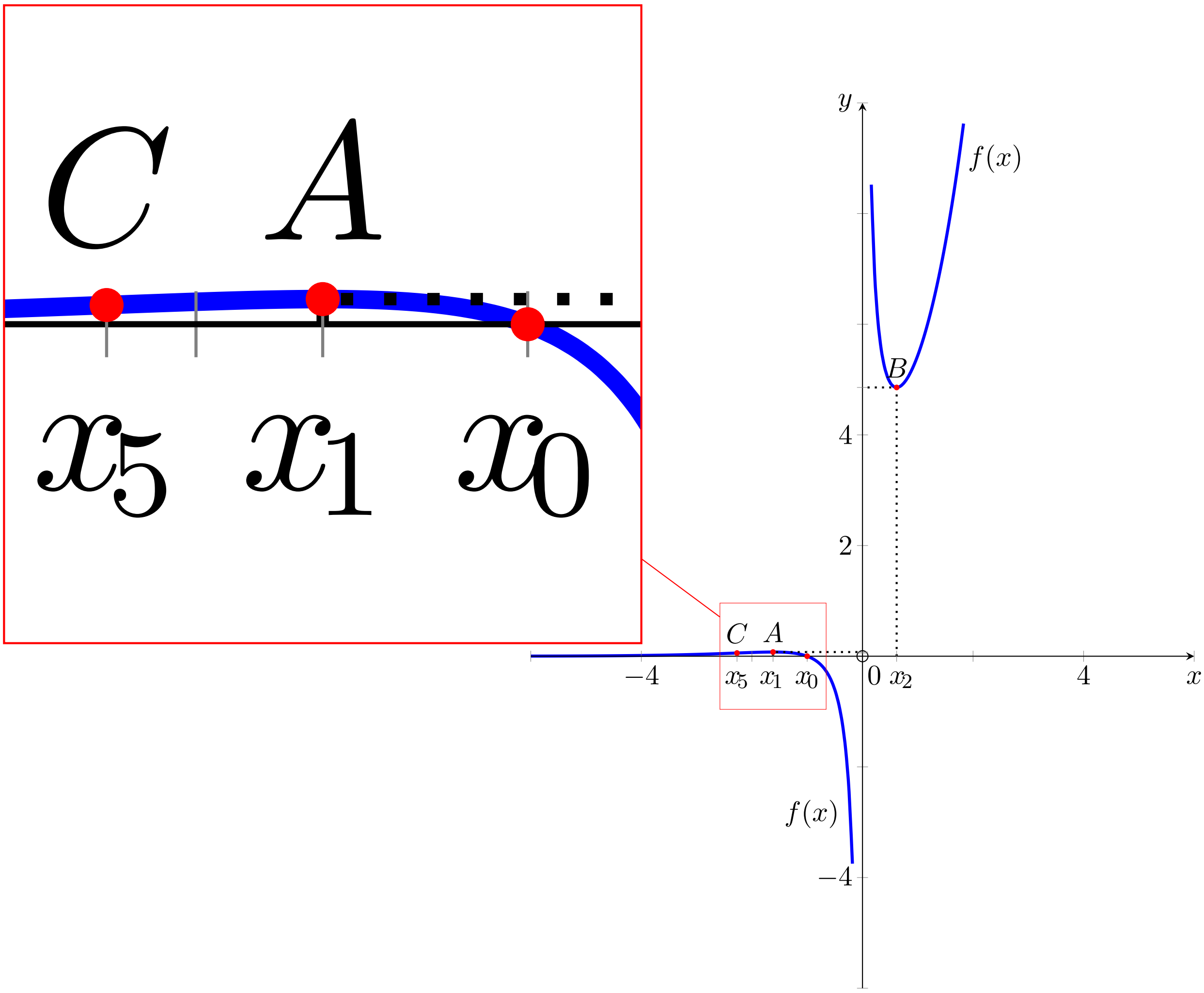


Figura 2: grafico della funzione dell'esercizio 3. Sono evidenziati il massimo relativo A, il minimo relativo B, il punto di flesso C e l'unico zero $x_0 = -1$ di $f(x)$.

Esercizio 4a

Integrando per parti due volte si ottiene:

$$\int_0^{\pi} x^2\cos(3x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(3x)}{3}\,x^2\right]_0^{\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 2x\sin(3x)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\left(\left[\frac{-\cos(3x)}{3}\,x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos(3x)\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \left[\frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{9}\,\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{9}\,\pi\,.$$

Esercizio 4b

Utilizziamo la sostituzione $x = 2\sin(t)$, da cui $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\mathrm{d}t$, e notando che $t_1 = \arcsin(0) = 0$ per $x = 0$ e $t_2 = \arcsin(1/2) = \pi/6$ per $x = 1$, si ha:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2(t)}{2\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,2\cos(t)\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/6}\sin^2(t)\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t$$
$$= 2\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Esercizio 5

Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, in cui $a = -4$, $b = 4$, $\alpha = 2$, $Q(x) = (x+3)$ e $\deg\big(Q(x)\big) = 1$. Il polinomio associato all'equazione differenziale è

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ e quindi $\lambda_1 = 2$ è una soluzione di molteplicità due di $P(\lambda) = 0$. Dato che $\alpha = \lambda_1$, è $P(\alpha) = 0 = P'(\alpha)$, quindi una soluzione particolare dell'equazione differenziale è del tipo

$$\widetilde{y}(x) = x^2(Ax + B)\mathrm{e}^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{con } A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}\,'(x) &= \mathrm{e}^{2x}\big(2Ax^3 + 2Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx\big)\,, \\
\widetilde{y}\,''(x) &= \mathrm{e}^{2x}\big(4Ax^3 + 4Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B\big)\,.
\end{aligned}$$

Ne possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
L(\widetilde{y}) &= \widetilde{y}\,''(x) - 4\widetilde{y}\,'(x) + 4\widetilde{y}(x) \\
&= \mathrm{e}^{2x}\Big((4A - 8A + 4A)\,x^3 + (4B + 12A - 8B - 12A + 4B)\,x^2 + (8B + 6A - 8B)\,x + 2B\Big) \\
&= \mathrm{e}^{2x}(6Ax + 2B)\,.
\end{aligned}$$

L'equazione differenziale è dunque verificata se $6A = 1$ e $2B = 3$, ossia $A = 1/6$, $B = 3/2$. Pertanto una soluzione particolare dell'equazione data è

$$\widetilde{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2\right)\,.$$

Opzionalmente, possiamo notare che, poichè le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\,,$$

l'integrale generale dell'equazione data si scrive come

$$y^*(x) = \widetilde{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + c_2 x + c_1\right) \qquad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6

Supponiamo $y(x) \neq 0$. Separando la variabili si ottiene:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = x + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y^2(x)} = \left(-\frac{1}{y(x)}\right)' = x + 1 = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)'$$

da cui si ricava immediatmente

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + x + c \quad \text{ossia} \quad y(x) = \frac{-1}{\dfrac{x^2}{2} + x + c}\,.$$

Infine, usando la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene che $c = -1$ e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{2}{2 - 2x - x^2}\,.$$

Alternativamente, ed equivalentemente, si arriva alla stessa conclusione procedendo come segue:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = x + 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = y(x_0) = 1 \quad \xRightarrow{s\,=\,y(t)} \quad \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{s^2}\mathrm{d}s = \int_0^x (t+1)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[-\frac{1}{s}\right]_1^{y(x)} = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} + 1 = \frac{x^2}{2} + x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

dalla quale si ottiene la stessa soluzione di prima.

Esercizio 7a

Risulta:

$$\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} = \left(1+\frac{\sqrt{n}-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{n+1}{\sqrt{n}-1}}\right)^{\frac{n+1}{\sqrt{n}-1}}\right]^{\frac{\sqrt{n}-1}{n+1}\sqrt{n}}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}-1}=+\infty \qquad \text{e} \qquad \frac{\sqrt{n}-1}{n+1}\sqrt{n}=\frac{n-\sqrt{n}}{n+1}=\frac{1-1/\sqrt{n}}{1+1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1\,,$$

possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n+1}\right)^{\sqrt{n}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\,.$$

Esercizio 7b

Dato che il limite è per $x\to+\infty$ possiamo supporre $x>0$. In questa ipotesi si ha:

$$\frac{\ln\left(x^2+\mathrm{e}^x\right)}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x\left(1+x^2\mathrm{e}^{-x}\right)\right)}{\sqrt{x^2\left(1+4/x^2\right)}}=\frac{x+\ln\left(1+x^2\mathrm{e}^{-x}\right)}{x\sqrt{1+4/x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4/x^2}}+\frac{\ln\left(1+x^2\mathrm{e}^{-x}\right)}{x\sqrt{1+4/x^2}}\,.$$

Poichè

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}=0 \quad \text{e quindi anche} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\mathrm{e}^{-x}\right)}{x\sqrt{1+4/x^2}}=0\,,$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{x^2+4}}=1\,.$$

Esercizio 8

Per provare l'iniettività della funzione data vediamo se presi comunque $x_1,x_2\in A$ con $x_1\neq x_2$ risulta $f(x_1)\neq f(x_2)$:

$$\begin{aligned}
x_1+\frac{1}{x_1-1}=x_2+\frac{1}{x_2-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1(x_1-1)+1}{x_1-1}=\frac{x_2(x_2-1)+1}{x_2-1}\\
&\Leftrightarrow \quad x_1(x_1-1)(x_2-1)+x_2-1=x_2(x_2-1)(x_1-1)+x_1-1\\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2x_2-x_1^2-x_1x_2+x_1+x_2-1=x_1x_2^2-x_1x_2-x_2^2+x_2+x_1-1\\
&\Leftrightarrow \quad x_1x_2(x_1-x_2)-(x_1^2-x_2^2)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)(x_1x_2-x_1-x_2)=0\,.
\end{aligned}$$

Per ipotesi $x_1\neq x_2$, dunque $x_1-x_2\neq 0$, ma l'ultima equazione è verificata se $x_1x_2-x_1-x_2=0$. Possiamo quindi concludere che la funzione f è *non iniettiva*, perchè se tra $x_!$ e x_2 vale la relazione

$$x_1x_2-x_1-x_2=0 \quad \text{ossia} \quad x_2=\frac{x_1}{x_1-1}\,,$$

allora $f(x_1)=f(x_2)$ (ad esempio, se $x_1=-1$ e $x_2=1/2$ si ha $f(-1)=f(1/2)$). Per determinare l'immagine $f(A)$, dalla definizione di immagine di una funzione si ha:

$$y\in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\in A \text{ tale che } f(x)=y\,,\ \text{ossia } x+\frac{1}{x-1}=y\,.$$

Ne discende che

$$x+\frac{1}{x-1}=y \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x+1=xy-y \quad \Leftrightarrow \quad x^2-(1+y)x+1+y=0\,.$$

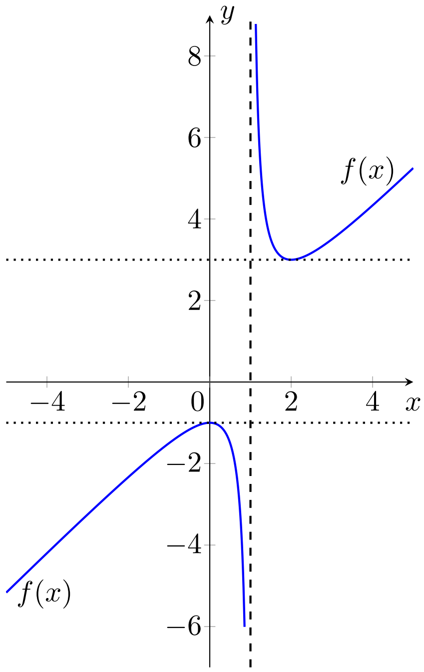


Figura 3: grafico qualitativo della funzione dell'esercizio 8.

Affinchè dunque l'ultima equazione abbia soluzioni, deve essere:

$$0 \leq \Delta(y) = (1+y)^2 - 4(1+y) = 1 + 2y + y^2 - 4 + 4y = (1+y)(y-3)\,.$$

Possiamo quindi concludere che

$$f(A) \;=]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$$

L'andamento qualitativo della funzione $f(x)$ è mostrato in figura 3.

Esercizio 9

Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Ricordando i limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1\,,$$

si conclude immediatamente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos(x))}{\ln(1+x^2)\arcsin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\arcsin(x)} = \frac{1}{2}\,.$$