Prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

27 giugno 2017

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza;
$$\sqrt{5 + 4\,x - x^2} \geq x - 2$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme
$$A = \left\{ \frac{x-3}{x^2 - 4\,x + 4},\ x \in \mathcal{R},\ x \neq 2 \right\}$$

3. Studiare la funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-3\,x}$ e disegnarne il grafico.

4. Calcolare i seguenti integrali
$$\int_2^3 \frac{1}{x\,(\log\,x)^3}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 2\,x^2 + 1}\,dx$$

5. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + 4\,y' + 3\,y = \sin\,x$.

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza;

$$\sqrt{5+4\,x-x^2} \geq x-2$$

Deve essere $5+4\,x-x^2 \geq 0$ ed essendo le radici del polinomio $x_{1\,2} = 2 \mp 3$, deve essere $x \in [-1,5]$. Osserviamo ora che se $x-2 \leq 0$, ossia se $x \leq 2$ la diseguaglianza precedente è verificata, mentre se $x \geq 2$ risulta:

$$\sqrt{5+4\,x-x^2} \geq x-2 \Longleftrightarrow 5+4\,x-x^2 \geq x^2-4\,x+4 \Longleftrightarrow 2\,x^2-8\,x-1 \leq 0$$

Ora le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_{1\,2} = \frac{4 \mp \sqrt{16+2}}{2} = \frac{4 \mp 3\,\sqrt{2}}{2}$$

Osserviamo infine che $x_1 < 2$ e $2 < x_2 < 5$. Se ne deduce quindi che la diseguaglianza iniziale vale se e solo se

$$x \in \left[-1,\ \frac{4+3\,\sqrt{2}}{2}\right]$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{\frac{x-3}{x^2-4\,x+4},\ x \in \mathcal{R},\ x \neq 2\right\}$$

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{x-3}{x^2-4\,x+4} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$$

Osservando che possiamo supporre $b > 0$ e che $x^2-4\,x+4 = (x-2)^2 > 0$ $\forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$, otteniamo:

$$\frac{x-3}{x^2-4\,x+4} \leq b \Longleftrightarrow x-3 \leq b\,x^2-4\,b\,x+4\,b \Longleftrightarrow b\,x^2-(4\,b+1)x+4\,b+3 \geq 0$$

Siccome si richiede che la diseguaglianza precedente valga $\forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$, deve essere

$$0 \geq \Delta(b) = (4\,b+1)^2 - 4\,b(4\,b+3) = 16\,b^2+8\,b+1-16\,b^2-12\,b = -4\,b+1$$

Deve essere quindi $b \geq 1/4$. Allora $\sup A = 1/4$. Osserviamo inoltre che $1/4 \in A$. Infatti

$$\frac{x-3}{x^2-4\,x+4} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = 4$$

Possiamo quindi concludere che

$$\sup A = \max A = \frac{1}{4}$$

Analogamente ricordiamo che $d \in \mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{x-3}{x^2-4\,x+4} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$$

Osservando che possiamo supporre $d < 0$ e che $x^2 - 4\,x + 4 = (x-2)^2 > 0\ \forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$, otteniamo:

$$\frac{x-3}{x^2 - 4\,x + 4} \geq d \Longleftrightarrow x - 3 \geq d\,x^2 - 4\,d\,x + 4\,d \Longleftrightarrow -d\,x^2 - (4\,d+1)x - (4\,b+3) \geq 0$$

Siccome si richiede che la diseguaglianza precedente valga $\forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$, deve essere

$$0 \geq \Delta(d) = (4\,d+1)^2 - 4\,d(4\,d+3) = 16\,d^2 + 8\,d + 1 - 16\,d^2 - 12\ = -4\,d + 1$$

Deve essere quindi $d \geq 1/4$. Quest'ultima diseguaglianza contrasta con la richiesta iniziale che fosse $d < 0$. Possiamo quindi concludere che l'insieme A non ha minoranti e che quindi $\inf A = -\infty$.

3. Studiare la funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-3\,x}$ e disegnarne il grafico.

   La funzione è definita su tutta la retta reale e risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\ e^{-3\,x}\left(e^{2\,x} - 1\right) = +\infty \cdot (0-1) = -\infty$$

Derivando si ottiene

$$f'(x) = -e^{-x} + 3\,e^{-3\,x} = e^{-3\,x}\left(3 - e^{-2\,x}\right)$$

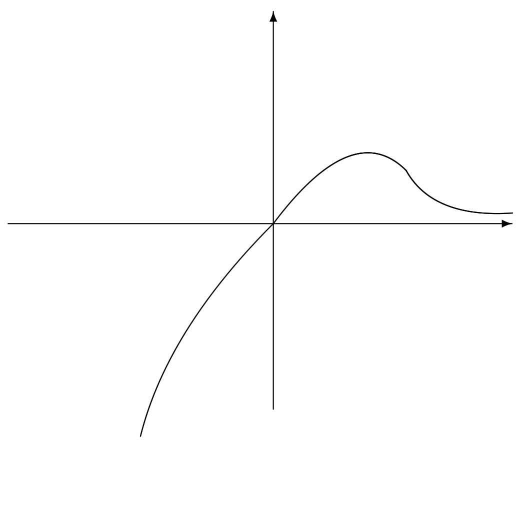
quindi

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow e^{2\,x} < 3 \Longleftrightarrow x < \frac{\log 3}{2} = x_1$$

Pertanto la funzione f è crescente nell'intervallo $(-\infty,\ x_1)$ e decrescente in $(x_1,\ +\infty)$. Il punto x_1 è dunque un punto di massimo relativo. Infine

$$f''(x) = e^{-x} - 9\,e^{-3\,x} = e^{-3\,x}\left(e^{-2\,x} - 9\right)$$

Pertanto la funzione f è convessa se e solo se $e^{2\,x} > 9$ ossia $x > \frac{\log 9}{2} = \log 3 = x_2$ Il grafico della funzione f risulta pertanto del tipo:



4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_2^3 \frac{1}{x\,(\log\,x)^3}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$$

Usando la sostituzione $\log\,x = t$ ossia $x = e^t$, si ottiene:

$$\int_2^3 \frac{1}{x\,(\log\,x)^2}\,dx = \int_{\log\,2}^{\log\,3} \frac{e^t}{e^t\,t^3}\,dt = \int_{\log\,2}^{\log\,3} \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{t^{-2}}{2}\bigg|_{\log\,2}^{\log\,3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\log\,2)^2} - \frac{1}{(\log\,3)^2}\right)$$

Usando in questo caso la sostituzione $x^2 = t$ ossia $x = \sqrt{t}$, si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+2\,x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t^2+2\,t+1}\,\frac{1}{2\,\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(t+1)}\bigg|_0^1\right) = \frac{1}{4}$$

5. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + 4\,y' + 3\,y = \sin\,x$.

   Il polinomio associato all'equazione è: $\lambda^2 + 4\,\lambda + 3 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda = -3$ e $\lambda = -1$. Una soluzione particolare dell'equazione è quindi del tipo:

$$y(x) = A\,\sin\,x + B\,\cos\,x$$

Risulta:

$$y'(x) = A\,\cos\,x - B\,\sin\,x$$
$$y''(x) = -A\,\sin\,x - B\,\cos\,x$$

Pertanto

$$L(y) = \sin\,x\,(-A - 4\,B + 3\,A) + \cos\,x\,(-B + 4\,A + 3\,B)$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} 2\,A - 4\,B = 1 \\ 4\,A + 2\,B = 0 \end{cases}$$

da cui $B = -2\,A$ e $2\,A + 8\,A = 1$ ossia $A = 1/10$ e $B = -2/10$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione è dato da:

$$y(x) = A\,e^{-3\,x} + B\,e^{-x} + \frac{1}{10}\,(\sin\,x - 2\,\cos\,x)$$