Prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

21 giugno 2017

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$, vale la diseguaglianza:
$$\frac{x}{2\,x-1} + \frac{x-1}{x+3} \leq 2$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:
$$A = \left\{ \sqrt{x^2+x+4} - x + 1,\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Studiare la funzione $f(x) = x^3\, e^{-x^2}$ e disegnarne il grafico.

4. Calcolare gli integrali:
$$\int_0^{\pi} x\, \sin^2\, x\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3}{(x+2)(x+3)}\, dx.$$

5. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y' - 2\,y = x\,e^x$

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$, vale la diseguaglianza:

$$\frac{x}{2\,x-1} + \frac{x-1}{x+3} \leq 2$$

Riducendo allo stesso denominatore, si ottiene

$$\frac{x(x+3) + (x-1)(2\,x-1) - 2(2\,x-1)(x+3)}{(2\,x-1)(x+3)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore

$$x^2 + 3\,x + 2x^2 - x - 2\,x + 1 - 4x^2 - 12\,x + 2\,x + 6 = -x^2 - 10\,x + 7$$

Pertanto

$$\frac{x}{2\,x-1} + \frac{x-1}{x+3} \leq 2 \Longleftrightarrow \frac{x^2 + 10\,x - 7}{(2\,x-1)(-1x+3)} \geq 0$$

Le radici del numeratore sono

$$x_{1\,2} = -5 \mp \sqrt{32}$$

Siccome $x_1 < 3,\ x_2 > \frac{1}{2}$, si ottiene che la diseguaglianza verificata se e solo se

$$x \in (-\infty,\ x_1] \cup \left(-3,\ \frac{1}{2}\right) \cup [x_2,\ +\infty)$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{x^2 + x + 4} - x + 1,\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

Siccome

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 4} - x + 1 \right) = +\infty$$

l'insieme considerato non è superiormente limitato. D'altra parte

$$\sqrt{x^2 + x + 4} - x + 1 \geq d \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 4} \geq x + d - 1$$

e, supponendo $x + d - 1 \geq 0$

$$\sqrt{x^2 + x + 4} \geq x+d-1 \Longleftrightarrow x^2+x+4 \geq x^2+d^2+1+2\,x\,d-2\,x-2\,d \Longleftrightarrow (2\,d-3)x \leq 3-d^2+2\,d$$

Ora se $d = 3/2$, la diseguaglianza diventa $0 \leq 15/4$ che è una identit vera. Pertanto $d = 3/2$ è un minorante. Infine se $d > 3/2$, allora $2\,d - 3 > 0$ e la diseguaglianza da studiare diventa

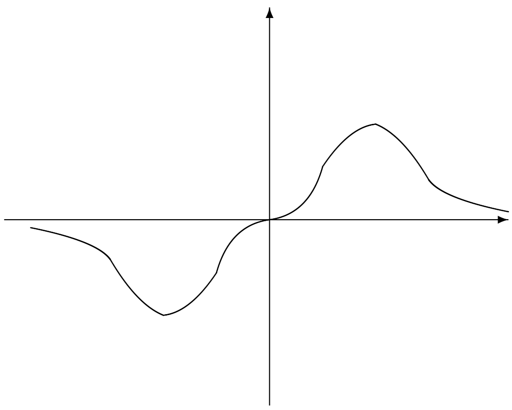
$$x \leq \frac{3 - d^2 + 2\,d}{2\,d - 3}$$

e quindi d non è minorante. Allora $\inf A = 3/2$. Va infine notato che $3/2 \notin A$ e quindi A non ha minimo.

3. Studiare la funzione $f(x) = x^3\, e^{-x^2}$ e disegnarne il grafico.

   Osserviamo che la funzione dispari, che è difinita su tutto $\mathcal{R}$ e che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   Risulta
$$f'(x) = e^{-x^2}(3\,x^2 - 2\,x^4) = x^2\ e^{-x^2}(3 - 2\,x^2)$$
   Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 < 3/2$. Allora $x = \sqrt{3/2}$ un punto di massimo relativo.

   Infine
$$f''(x) = e^{-x^2}(6\,x - 8\,x^3 - 6\,x^3 + 4\,x^5) = 2\,x\ e^{-x^2}(2\,x^4 - 7\,x^2 + 3)$$
   La derivata seconda si annulla quindi se $x = \sqrt{3}$ oppure se $x = \sqrt{3/4}$ Il grafico della funzione è quindi del tipo:



4. Calcolare gli integrali:
$$\int_0^\pi x\ \sin^2\ x\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3}{(x+2)(x+3)}\,dx.$$
   Integrando per parti, si ottiene:
$$\int_0^\pi x\ \sin^2\ x\ dx = \int_0^\pi (x\ \sin\ x)(\sin\ x)\ dx = -\cos\ x(x\ \sin\ x)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos\ x(\sin\ x + x\ \cos\ x)\ dx =$$
$$= \int_0^\pi \cos\ x\ \sin\ x\ dx + \int_0^\pi x(1 - \sin^2\ x)\ dx$$
   Pertanto
$$\int_0^\pi x\ \sin^2\ x\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\ x}{2}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi x\ dx \right) = \frac{\pi^2}{4}$$

Facendo la divisione, si ottiene $x^3 = (x-5)(x^2+5x+6) + 19\,x + 30$ ed infine decomponendo

$$\frac{19\,x+30}{(x+2)(x+3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} A+B=19 \\ 3A+2B=30 \end{cases}$$

Allora $A=-8$ e $B=27$ Vale dunque la decomposizione

$$\frac{x^3}{(x+2)(x+3)} = x-5+\frac{-8}{x+2}+\frac{27}{x+3}$$

In conclusione

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+2)(x+3)}dx = \left(\frac{x^2}{2} - 5\,x - 8\ \log(x+2) + 27\ \log(x+3)\right)\Bigg|_0^1$$

5. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y' - 2\,y = x\,e^x$.

   Il polinomio associato all'equazione differenziale è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda = -2$ e $\lambda = 1$ e quindi una soluzione particolare dell'equazione è del tipo:

   $y(x) = x(A\,x+B)e^x = e^x(A\,x^2 + B\,x)$
   Allora
   $y'(x) = e^x(A\,x^2 + B\,x + 2\,A\,x + B)$
   $y''(x) = e^x(A\,x^2 + B\,x + 2\,A\,x + B + 2\,A\,x + B + 2\,A)$
   Pertanto
   $L(y) = e^x\left[x^2\,(A + A - 2\,A) + x\,(B + 4\,A + B + 2\,A - 2\,B) + 2\,B + 2\,A + B\right]$

   Deve quindi essre

   $$\begin{cases} 6\,A = 1 \\ 3\,B + 2\,A = 0 \end{cases}$$

   Pertanto $A = 1/6$ e $B = -1/9$. Quindi una soluzione particolare è del tipo:

   $$y(x) = x\,e^x\left(\frac{1}{6}\,x - \frac{1}{9}\right)$$