Prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

20 gennaio 2015

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} \geq 3$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:
$$A = \left\{ \sqrt{4\,x^2 + x + 5} - 2\,x + 1,\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Studiare la funzione: $f(x) = 2\,x - \sqrt{2 - x - x^2}$ e disegnarne il grafico.

4. Calcolare i seguenti integrali:
$$a) \quad \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \; dx, \quad b) \quad \int_0^1 x^2 \log(5 + x^2)\, dx$$

5. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y' - 2\,y = x^2\, e^x$.

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3$$

Risulta.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3 \Longleftrightarrow \frac{x^2+x-2-3\,x^2+3\,x+6}{x^2-x-2} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{2(x^2-2\,x-2)}{x^2-x-2} \leq 0$$

Ora il numeratore si annulla per

$$x = x_{1\,2} = 1 \mp \sqrt{3}$$

mentre il denominatore si annulla per

$$x = z_{1\,2} = \frac{1 \mp 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Pertanto l'andamento dei segni di numeratore e denominatore é dato da:

$$\begin{array}{c} + + + + + - - - - - - - - - - + + + \\ \hline \quad x_1 \qquad\qquad\qquad x_2 \end{array} \qquad \text{Numeratore}$$

$$\begin{array}{c} + + + \; - - - - - - - - - \; + + + \\ \hline -1 \qquad\qquad\qquad 2 \end{array} \qquad \text{Denominatore}$$

Ne deriva quindi che

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 3 \Longleftrightarrow x \in \left(-1, 1-\sqrt{3}\right] \cup \left(2, 1+\sqrt{3}\right]$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1,\ x \in \mathcal{R}\right\}$$

Osserviamo in primo luogo che:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1\right) = +\infty$$

e quindi $\sup A = +\infty$, ossia l'insieme A non é superiormente limitato. D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ é un minorante dell'insieme A se e solo se:

$$\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1 \geq d \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

Ora

$$\sqrt{4\,x^2+x+5} - 2\,x + 1 \geq d \Longleftrightarrow \sqrt{4\,x^2+x+5} \geq d + 2\,x - 1$$

Infine se $d + 2\,x - 1 < 0$ la diseguaglianza precedente é verificata, mentre se $d + 2\,x - 1 \geq 0$ la diseguaglianza precedente é equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato, ossia:

$$4\,x^2 + x + 5 - \geq d^2 + 4\,x^2 + 1 + 4\,d\,x - 2\,d - 4\,x \Longleftrightarrow (5 - 4\,d)x \geq d^2 - 2\,d - 4 \tag{1}$$

Ora, se $5 - 4\,d = 0$, ossia se $d = 5/4$, la (1) diventa:

$$0 \geq \frac{25}{16} - \frac{5}{2} - 4 = -\frac{79}{16} \tag{2}$$

che risulta verificata. Pertanto $d = 5/4$ é un minorante dell'insiema A. D'altra parte se $d > 5/4$, allora $5 - 4\,d < 0$ e la (1) diventa:

$$x \leq \frac{d^2 - 2\,d - 4}{5 - 4\,d}$$

e quindi se $d > 4/5$, d non é minorante dell'insieme A. Possiamo quindi concludere che $\inf A = 5/4$. Siccome nella (2) vale la diseguaglianza stretta, possiamo concludere che $5/4 \notin A$ e che quindi A non ha minimo.

3. Studiare la funzione: $f(x) = 2\,x - \sqrt{2 - x - x^2}$ e disegnarne il grafico.

   Deve essere $2 - x - x^2 \geq 0$ e quindi $x^2 + x - 2 \leq 0$, ossia $x \in [-2, 1]$. Notiamo inoltre che: $f(-2) = -4$, $f(1) = 2$, $f(0) = -\sqrt{2}$. Osserviamo inoltre chew $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x > 2$ e $2\,x = \sqrt{2 - x - x^2} \Longleftrightarrow x > 0$ e $4\,x^2 = 2 - x - x^2 \Longleftrightarrow x > 0$ e $5\,x^2 + x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{41}-1}{10}$. Derivando, si ottiene:

$$f'(x) = 2 - \frac{-1 - 2\,x}{2\,\sqrt{2 - x - x^2}} = 2 + \frac{1 + 2\,x}{2\,\sqrt{2 - x - x^2}}$$

   Pertanto

$$f'(x > 0) \Longleftrightarrow 4\,\sqrt{2 - x - x^2} + 1 + 2\,x > 0 \Longleftrightarrow 4\,\sqrt{2 - x - x^2} > -1 - 2\,x$$

   Ora, se $-1 - 2\,x < 0$, ossia se $x > -1/2$, la diseguaglianza precedente é verificata e quindi $f'(x) > 0$. D'altra parte se $x \leq -1/2$:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 16\left(2 - x - x^2\right) > 1 + 4\,x^2 + 4\,x \Longleftrightarrow 20\,x^2 + 20\,x - 31 < 0$$

   Essendo le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado:

$$x_{1\,2} = \frac{-10 \mp \sqrt{720}}{20}$$

   e risulta $x_1 > -2$, possiamo concludere che $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (x_1, 1)$ e quindi il punto

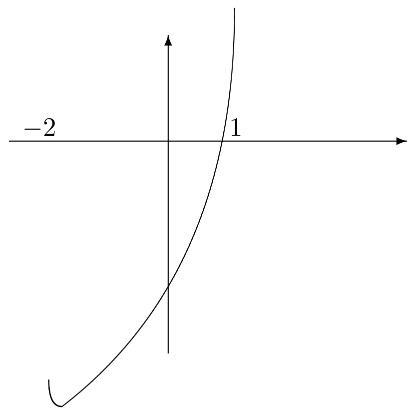
$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{720}}{20}$$

   é un punto di minimo relativo per la funzione f. Passando infine alla derivata seconda, si ottiene:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{2 - x - x^2} - (1 + 2\,x)\frac{-1 - 2\,x}{2\,\sqrt{2 - x - x^2}}\right]\frac{1}{2 - x - x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4(2 - x - x^2) + (1 + 2\,x)^2}{\left(\sqrt{2 - x - x^2}\right)^3}\right]$$

   Possiamo quindi concludere che $f''(x) > 0$ $\forall x \in (-2, 1)$ e quindi che la funzione f é convessa nel suo intervallo di definizione. Il grafico di f é del tipo:



4. Calcolare i seguenti integrali:

$$a) \quad \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \; dx, \quad b) \quad \int_0^1 x^2 \log(5+x^2)\, dx$$

a) Integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \; dx = e^x \sin^2 x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \; \cos x \; dx =$$

$$= e^x \sin^2 x\Big|_0^{\pi/2} - 2\left[e^x \sin x \; \cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x(\cos^2 x - \sin^2 x) \; dx \right] =$$

$$= \left(e^x \sin^2 x - 2\, e^x \sin x \; \cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^x(1 - 2 \sin^2 x) \; dx$$

Portando infine l'ultimo integrale a primo membro della uguaglianza precedente, si ottiene:

$$5 \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x \; dx = \; e^x \left(\sin^2 x - 2 \sin x \; \cos x + 2\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

b) Sempre integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^1 x^2 \log(5+x^2)\, dx = \frac{x^3}{3} \log(5+x^2)\Bigg|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{5+x^2}\, dx$$

Ora osserviamo che

$$\frac{x^4}{5+x^2} = \frac{x^4 - 25 + 25}{5+x^2} = x^2 - 5 + \frac{25}{5+x^2}$$

Infine scrivendo

$$g(x) = \frac{1}{5+x^2} = \frac{1}{5} \; \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

si ottiene che un primitiva della funzione g é data dalla funzione

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$$

Possiamo dunque concludere che:

$$\int_0^1 x^2 \log(5+x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log(5+x^2) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - 5\,x\right) - \frac{50}{3\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

5. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y' - 2\,y = x^2\,e^x$.

   Il polinomio associato all'equazione differenziale é: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Si puó quindi trovare una soluzione particolare dell'equazione considerata tra le funzioni del tipo:

$$y(x) = x(Ax^2 + Bx + C)e^x = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^x$$

   Ne deriva quindi che:

$$y'(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + 3\,Ax^2 + 2\,Bx + C)e^x$$

$$y''(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + 3\,Ax^2 + 2\,Bx + C + 3\,Ax^2 + 2\,Bx + C + 6\,Ax + 2\,B)e^x$$

   Ne deriva quindi chw

$$L(y) = y'' + y' - 2\,y = e^x\left[x^3\,(A + A - 2\,A) + x^2\,(B + 3\,A + 3\,A + B + 3\,A - 2\,B) + \right.$$
$$\left. + \, x\,(C + 2\,B + 6\,A + 2\,B + C - 2\,C) + 2\,C + 2\,B + C\right]$$

   Deve quindi essere: $9\,A = 1,\ 6\,B + 6\,A = 0,\ 3\,C + 2\,B = 0$, ossia

$$A = \frac{1}{9},\ B = -\frac{1}{9},\ C = \frac{2}{27}$$