Prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

17 gennaio 2017

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x+2}{2\,x-1} + \frac{x-1}{3\,x+1} \le 1$$

2. Sia
$$A = \left\{ n+1-\sqrt{n^2+n+3}, \quad n \in \mathcal{N} \right\}$$
Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$.

3. Studiare la funzione:
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+6\,x+9}, \; x \ne -3$$
e disegnarne il grafico.

4. Calcolare gli integrali:
$$\int_0^{\pi/2} x\, \sin^2\, x\, dx, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-3\,x+2}\, dx$$

5. Risolvere il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' - 4\,y' + 4\,y = x\, e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x+2}{2\,x-1} + \frac{x-1}{3\,x+1} \le 1$$
Riducendo allo stesso denominatore, si ottiene:
$$\frac{x+2}{2\,x-1} + \frac{x-1}{3\,x+1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(3\,x+1)+(x-1)(2\,x-1)-(2\,x-1)(3\,x+1)}{(2\,x-1)(3\,x+1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5\,x-4}{(2\,x-1)(3\,x+1)} \geq 0$$

Ora il numeratore si annulla nei punti

$$x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{41}}{2}$$

Siccome $-1 < x_1 < -1/3$, il segno di numeratore e denominatore, è dato dalla seguente tabella:

$$\begin{array}{l}
+\ +\ +\underset{x_1}{\ }\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ \underset{x_2}{\ }\ +\ +\ + \\
\end{array} \qquad \text{Numeratore}$$

$$\begin{array}{l}
+\ +\ +\ \underset{-\frac{1}{3}}{\ }\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ \underset{\frac{1}{2}}{\ }\ +\ +\ + \\
\end{array} \qquad \text{Denominatore}$$

Possiamo quindi concludere che l'insieme A dei punti dove vale la diseguaglianza è:

$$A = (-\infty, x_1] \cup (-1/3, 1/2) \cup [x_2, +\infty)$$

2. Sia

$$A = \left\{ n+1-\sqrt{n^2+n+3},\quad n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$. Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme se e solo se

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3} \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

D'altra parte

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3} \leq b \Leftrightarrow n+1-b \leq \sqrt{n^2+n+3}$$

E, se $n+1 \geq 0$:

$$n+1-b \leq \sqrt{n^2+n+3} \Leftrightarrow n^2+1+b^2+2\,n-2\,n\,b-2\,b \leq n^2+n+3$$

$$\Leftrightarrow (1-2\,b)n \leq 2\,b+2-b^2$$

Infine, se $1-2\,b=0$, la diseguaglianza precedente diventa $0 \leq 3-1/4$. Siccome questa identità è vera, possiamo concludere che $b=1/2$ è un maggiorante dell'insieme A. D'altra parte, se $b<1/2$ ossia se $1-2\,b>0$, risulta:

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3} \leq b \Leftrightarrow n \leq \frac{2\,b+2-b^2}{1-2\,b}$$

Possiamo quindi concludere che se $b<1/2$ allora b non è maggiormente A, allora $\sup A = 1/2$. Osserviamo inoltre che $1/2 \notin A$ e quindi A non ha massimo.

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3} \geq d \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Osserviamo che deve essere $d < 1/2$, quindi:

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3} \geq d \Leftrightarrow n+1-d \geq \sqrt{n^2+n+3} \Leftrightarrow n^2+1+d^2+2\,n-2\,n\,d-2\,d \geq n^2+n+3$$

$$\Leftrightarrow (1-2\,d)n \geq 2\,d+2-d^2 \Leftrightarrow n \geq \frac{2\,d+2-d^2}{1-2\,d}$$

Pertanto d è minorante se e solo se

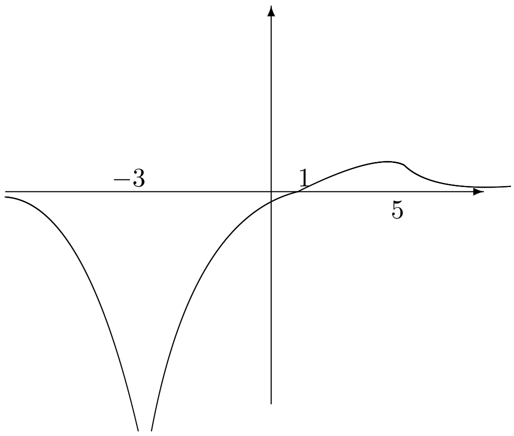
$$1 \geq \frac{2\,d+2-d^2}{1-2\,d} \Leftrightarrow 1-2\,d \geq 2\,d+2-d^2 \Leftrightarrow d^2-4\,d-1 \geq 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado trovato sono

$$d_{1,2} = 2 \mp \sqrt{5}$$

Possiamo concludere che d e minorante se e solo se $d \leq 2-\sqrt{5} = a_1$, pertanto $\inf A = \min A = 2-\sqrt{5}$.

3. Studiare la funzione:
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+6\,x+9},\ x \neq -3$$
e disegnarne il grafico. L'insieme di definizione è $D = \{x \in \mathcal{R},\ x \neq 3\}$ e risulta $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Inoltre
$$\lim_{x\to-3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$
Derivando, si ottiene
$$f'(x) = \frac{(x+3)^2-(x-1)\,2(x+3)}{(x+3)^4} = -\frac{x-5}{(x+3)^3}$$
. Ne deriva che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-3,5)$ e quindi $x = 5$ è un punto di massimo relativo con
$$f(5) = \frac{4}{25+30+9} = \frac{1}{16}$$
Infine
$$f''(x) = -\frac{(x+3)^3-(x-5)\,3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{2\,x-18}{(x+3)^4}$$
. Pertanto $x = 9$ e un punto di flesso ed f e convessa se e solo se $x > 9$. Il grafico e del tipo:



4. Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\pi/2} x\,\sin^2\,x\,dx, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-3\,x+2}\,dx$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^{\pi/2} x\,\sin^2\,x\,dx = \int_0^{\pi/2} (x\,\sin\,x)\,\sin\,x\,dx = -\cos\,x(x\,\sin\,x)|_0^{\pi/2} +$$

$$+\int_0^{\pi/2} \cos\,x(\sin\,x + x\,\cos\,x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin\,x\;\;\cos\,x\,dx + \int_0^{\pi/2} x\,\cos^2\,x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\,x)}{2}\,dx + \int_0^{\pi/2} x\,dx - \int_0^{\pi/2} x\,\sin^2\,x\,dx$$

Pertanto

$$\int_0^{\pi/2} x\,\sin^2\,x\,dx = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{1}{2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\right]$$

Passando al secondo integrale:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-3\,x+2}\,dx = \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3\,x-1}{x^2-3\,x+2}\right)\,dx$$

Siccome il polinomio a denominatore ha radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, usiamo la decomposizione:

$$\frac{3\,x-1}{x^2-3\,x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

Deve quindi essre

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -A-2\,B=-1 \end{cases}$$

Pertanto $B = -2$ e $A = 5$. In conclusione:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-3\,x+2}\,dx = \left(x + 5\,\log|x-2| - 2\,\log|x-1|\right)\Big|_{-1}^{0} = 1 + 5\,\log(2/3) + 2\,\log 2$$

5. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4\,y' + 4\,y = x\,e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Il polinomio associato all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ che ha l'unica soluzione doppia $\lambda = 2$. Pertanto $y_1 = e^{2\,x}$ e $y_2 = x\,e^{2\,x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata. Una soluzione particolare sarà del tipo:

$$y(x) = x^2(A\,x + B)e^{2\,x} = e^{2\,x}\left(A\,x^3 + B\,x^2\right)$$

Risulta allora:

$$y'(x) = e^{2\,x}\left(2\,A\,x^3 + 2\,B\,x^2 + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x\right)$$

$$y''(x) = e^{2\,x}\left(4\,A\,x^3 + 4\,B\,x^2 + 6\,A\,x^2 + 4\,B\,x + 6\,A\,x^2 + 4\,B\,x + 6\,A\,x + 2\,B\right)$$

Pertanto:

$$L(y) = e^{2\,x}\left[(4\,A - 8\,A + 4\,A)\,x^3 + (4\,B + 12\,A - 8\,B - 12\,A + 4\,B)\,x^2 + (8\,B + 6\,A - 8\,B)\,x + 2\,B\right]$$

Deve quindi essere $A = 1/6$ e $B = 0$. L'integrale generale dell'equazione considerata è dunque:

$$y(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + A + B\,x\right)e^{2\,x}$$

Essendo

$$y'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2\,A + 2\,B\,x + \frac{1}{2}x^2 + B\right)e^{2\,x}$$

Deve quindi essere $y(0) = A = 0$ e $y'(0) = 2\,A + B = -1$ e quindi $A = 0$ e $B = -1$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 - x\right)e^{2\,x}$$