Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica
Prova scritta del 14/07/2014 – A.A. 2013–2014

1) Dire per quali numeri reali vale la disuguaglianza:

$$\frac{x+1}{x-3}+\frac{x-1}{x+1}\le 4\,.$$

2) Sia dato l'insieme $A=\left\{\sqrt{4x^2+x+4}-2x \;\middle|\; x\in\mathbb{R}\right\}$. Verificare che A è inferiormente limitato, ma non superiormente limitato e calcolare $\inf(A)$.

3) Studiare la seguente funzione

$$f(x)=\ln\big(1+x^2\big)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,,\qquad x\neq 0,$$

determinando tutte le proprietà (esistenza, segno, crescenza/decrescenza, convessità/concavità, . . .), fino a disegnarne il grafico.

4) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$\text{(a)}\quad \int \frac{1}{x}\cos\Big(\ln(x)\Big)\cos\Big(\ln(x^3)\Big)\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)}\quad \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\mathrm{d}x$$

5) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$xy''(x)-y'(x)x=(x^2-3x)\mathrm{e}^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-x\left(y''(x)+y'(x)-y(x)\right)$$

6) Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y''(x)-4y(x)=\pi\ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big)\\ y(0)=0\\ y'(0)=2\end{cases}$$

Soluzioni e commenti

Per brevità, a differenza di quanto fatto per le prove parziali, nel seguito sono riportate le soluzioni degli esercizi del compito includendo solo quei commenti che risultino fondamentali per la comprensione della soluzione. Qualora uno stesso esercizio possa eventualmente essere risolto in più modi, in generale è descritto un solo modo di soluzione. Si invitano gli studenti a contattare i docenti per eventuali dubbi o chiarimenti.

Esercizio 1

Imponendo la condizione di esistenza delle frazioni si ha $x\neq -1$ e $x\neq 3$. Dunque per $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$ è:

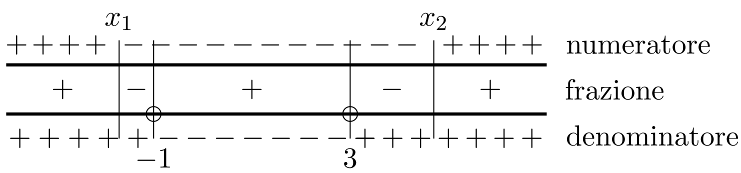
$$\frac{x+1}{x-3}+\frac{x-1}{x+1}\le 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2+(x-1)(x-3)-4(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{x^2+2x+1+x^2-4x+3-4x^2+8x+12}{(x-3)(x+1)}\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2x^2+6x+16}{(x-3)(x+1)}\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-3x-8}{(x-3)(x+1)}\ge 0$$

$$\text{numeratore:}\quad \Delta=9+32=41>0\;\Rightarrow\; x_1=\frac{3-\sqrt{41}}{2}\approx -1.702,\; x_2=\frac{3+\sqrt{41}}{2}\approx 4.702$$

$x^2-3x-8\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\le x_1$ oppure $x_2\le x$

$(x-3)(x+1)>0 \;\Leftrightarrow\; x<-1$ oppure $3<x$



Dunque la disuguaglianza è verificata per $x\le x_1$, $-1<x<3$ e $x\ge x_2$.

Esercizio 2

Consideriamo il radicando e verifichiamo che sia non negativo. Per il segno del polinomio di secondo grado $p_2(x) = 4x^2 + x + 4$ si ha:

$$\Delta = 1 - 64 = -63 < 0 \quad \Rightarrow \quad p_2(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi la radice è reale $\forall x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che per $x \geq 0$ è $\sqrt{4x^2 + x + 4} > \sqrt{4x^2} = 2x$, mentre per $x < 0$ è $-2x > 0$ e $\sqrt{4x^2 + x + 4} - 2x > 0$. Concludiamo quindi che $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 4} - 2x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, cioè che $f(x)$ è inferiormente limitata da zero. Siccome $f(0) = 2$, possiamo certamente considerare $0 \leq \inf(A) \leq 2$. Imponiamo la condizione di minorante: α è mirante di $f(x)$ se e solo se

$$\sqrt{4x^2 + x + 4} - 2x \geq \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4x^2 + x + 4} \geq \alpha + 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Ora, se $\alpha + 2x < 0$ questa disuguaglianza è certamente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo quindi che $\alpha + 2x \geq 0$ (cioè che $x \geq -\alpha/2$): possiamo allora elevare al quadrato entrambi i membri di (1), ottenendo

$$4x^2 + x + 4 \geq \alpha^2 + 4\alpha x + 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 4\alpha)x \geq \alpha^2 - 4\,. \tag{2}$$

Ora, se $\alpha = 1/4$ allora $1 - 4\alpha = 0$ e $\alpha^2 - 4 = -63/16 < 0$: in tal caso (2) è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ (quindi in particolare anche per $x \geq -\alpha/2 = -1/8$). Quindi certamente $1/4$ è minorante di $f(x)$. Allora anche ogni numero $\alpha < 1/4$ è pure minorante di A.

D'altra parte, se $\alpha > 1/4$, allora $1 - 4\alpha < 0$ e quindi la diseguaglianza (2) è equivalente a

$$x \leq \frac{\alpha^2 - 4}{1 - 4\,\alpha}\,.$$

Scelto allora un numero

$$x > \max\left\{-\frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha^2 - 4}{1 - 4\alpha}\right\}$$

la (1) non é verificata e dunque α non è minorante. Concludiamo quindi che α è minorante di A se e soltanto se $\alpha \leq 1/4$, da cui discende anche $\inf(A) = 1/4$, essendo $1/4$ il massimo di $]-\infty, 1/4]$.

Per stabilire se $1/4$ è anche minimo, studiamo l'equazione $f(x) = 1/4$:

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4x^2 + x + 4} - 2x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4x^2 + x + 4} = 2x + \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + x + 4 = 4x^2 + x + \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{1}{16}$$

che è chiaramente falsa: quindi A non ammette minimo e dunque $\inf(A) \neq \min(A)$.

Per dimostrare che A è superiormente non limitato basta mostrare che $f(x)$ è superiormente non limitata e in questo caso è sufficiente osservare che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\,.$$

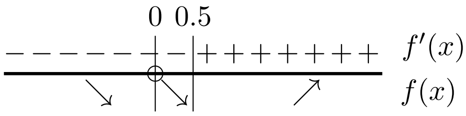
Esercizio 3

Il campo di esistenza è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione $f(x)$ è somma di una funzione dispari, $\arctan(1/x)$, e di una funzione pari, $\ln(1 + x^2)$, quindi $f(x)$ non è nè pari, nè dispari. Per studiare il segno di $f(x)$ osserviamo che $\ln\big(1 + x^2\big) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{sgn}\big(\arctan(1/x)\big) = \operatorname{sgn}(x)$, quindi $f(x)$ è certamente positiva per $x > 0$. Per $x < 0$ abbiamo $\arctan(1/x) < 0$ e per determinare le regioni di positività dovremmo risolvere la disequazione $f(x) \geq 0$ con $x < 0$, che è fortemente non lineare e non si risolve facilmente: vediamo se si riesce a dedurre qualcosa riguardo al segno, dopo aver determinato il comportamento di crescenza e decrescenza. Si ha

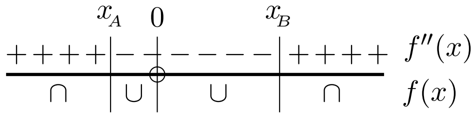
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty\,; \qquad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ x = 0 \text{ è punto di discontinuità con salto.}$$

Studiamo crescenza e decrescenza di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{x^2}{1 + x^2}\,\frac{1}{x^2} = \frac{2x - 1}{1 + x^2}$$
$$f'(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 2x - 1 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq \frac{1}{2}$$



(a) Segno di $f'(x)$ e crescenza di $f(x)$.



(b) Segno di $f''(x)$ e convessità di $f(x)$.

Figura 1: determinazione degli intervalli di crescenza/decrescenza e convessità/concavità di $f(x)$.

pertanto f è decrescente per $x < 1/2$, è crescente per $x > 1/2$ e $f'(1/2) = 0$, dunque $x = 1/2$ è punto di minimo relativo per f con $f(1/2) \approx 1.33$ (fig. 1a). Inoltre, poichè in particolare f è monotona decrescente per $x < 0$, diverge a $+\infty$ per $x \to -\infty$ e converge a $-\pi/2$ per $x \to 0^-$, deduciamo che essa ha un'*unica* intersezione α con il semiasse negativo delle ascisse, cioè $\exists! \alpha < 0$ tale che $f(\alpha) = 0$. Dato che, ad esempio, $f(-2) = \ln(5) - \arctan(-2) \approx 1.15 > 0$ e $f(-1/2) = \ln(5/4) + \arctan(-1/2) \approx -0.88 < 0$, deve certamente essere $\alpha \in]-2, -1/2[$. Dalla monotonìa di f deduciamo allora che $f(x)$ è positiva per $x < \alpha$ e negativa per $\alpha < x < 0$. Controlliamo l'esistenza di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+x^2) + \arctan(1/x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{1+x^2} = 0^{\pm}$$

dunque non esistono asintoti obliqui. Nel punto di discontinuità $x = 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-1}{1+x^2} = -1 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

perciò le tangenti al grafico della funzione a destra e a sinistra di $x = 0$ sono le parallele alla retta $y = -x$ (bisettrice secondo-quarto quadrante) passanti per $(0, -\pi/2)$ e per $(0, \pi/2)$, rispettivamente, cioè: $y = -x - \pi/2$ e $y = -x + \pi/2$, rispettivamente. Studiamo convessità e concvità di $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x-1)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2 + 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2(x^2 - x - 1)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) \geq 0 \iff x^2 - x - 1 \leq 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_A = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, \quad x_B = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$$

allora $f(x)$ è concava per $x < x_A$ e per $x > x_B$ ed è convessa per $x_A < x < x_B$ (fig. 1b). I punti x_A e x_B sono punti di flesso in cui $y_A = f(x_A) \approx -0.69$, $y_B = f(x_B) \approx 1.84$ e $f'(x_A) \approx -1.62$, $f'(x_B) \approx 0.62$, cioè x_A e x_B sono punti di flesso con tangente obliqua.

Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ è mostrato in figura 2.

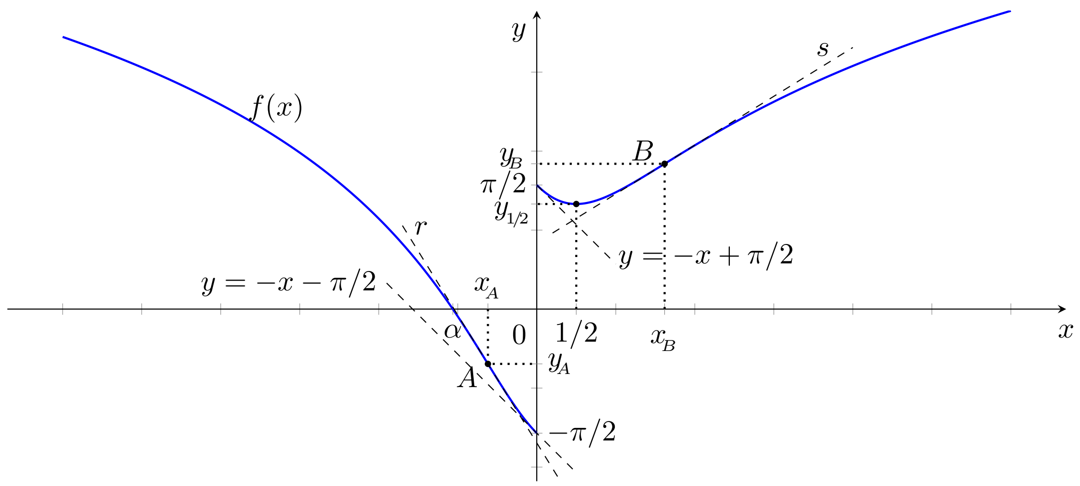


Figura 2: grafico della funzione dell'esercizio 3. Sono evidenziati i flessi A e B. La retta r è la tangente al flesso A, cioè $y_r = f'(x_A)(x - x_A) + y_A$, la retta s è la tangente al flesso B, cioè $y_s = f'(x_B)(x - x_B) + y_B$. Sono evidenziate anche le rette tangenti sinistra e destra al grafico di $f(x)$ in $x = 0$, punto di discontinuità con salto della funzione (la funzione non è definitia in $x = 0$). Il punto α è l'unico zero di $f(x)$.

Esercizio 4a

Ricordiamo che $\ln\big(x^3\big) = 3\ln(x)$ e utilizziamo la sostituzione $t = \ln(x)$, da cui $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ e $x = \mathrm{e}^t$:

$$\int \frac{1}{x}\cos\Big(\ln(x)\Big)\cos\Big(\ln(x^3)\Big)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\cos\Big(\ln(x)\Big)\cos\Big(3\ln(x)\Big)\mathrm{d}x = \int \cos(t)\cos(3t)\mathrm{d}t$$

Ora ricordiamo che dalle formule trigonometriche si ha

$$\cos(3t)\cos(t) = \frac{1}{2}\Big[\cos(3t+t) + \cos(3t-t)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\cos(4t) + \cos(2t)\Big]$$

dunque possiamo scrivere

$$\int \cos(t)\cos(3t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \big(\cos(4t) + \cos(2t)\big)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big(\int \cos(4t)\mathrm{d}t + \int \cos(2t)\mathrm{d}t\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

da cui si perviene al risultato:

$$\int \frac{1}{x}\cos\Big(\ln(x)\Big)\cos\Big(\ln(x^3)\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\sin\Big(\ln(x^4)\Big) + \frac{1}{4}\sin\Big(\ln(x^2)\Big)$$

Esercizio 4b

Dalle formule trigonometriche è $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\big(1 - cos(2x)\big)$, quindi

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\big(1-\cos(6x)\big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}\Big) - \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\mathrm{d}x &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\Big]_1^2 - 6\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\Big]_1^2 - 6\left\{\Big[-\mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\Big]_1^2 + 6\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\mathrm{d}x\right\} \\ \Rightarrow \quad \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{37}\Big[\mathrm{e}^{-x}\big(6\sin(6x) - \cos(6x)\big)\Big]_1^2\,.\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}\Big) - \frac{1}{74}\Big[\mathrm{e}^{-2}\big(6\sin(12) - \cos(12)\big) - \mathrm{e}^{-1}\big(6\sin(6) - \cos(6)\big)\Big]\,.$$

Oppure si può egualmente procedere integrando subito per parti:

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\Big]_1^2 + 6\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(3x)\cos(3x)\mathrm{d}x\,.$$

Ricordiamo ora che, dalle formule di duplicazione, $2\sin(3x)\cos(3x) = \sin(6x)$ si ha che

$$6\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(3x)\cos(3x)\mathrm{d}x = 3\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\mathrm{d}x\,.$$

Integrando per parti è

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\Big]_1^2 + 6\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\mathrm{d}x$$
$$= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\Big]_1^2 + 6\Big[-\mathrm{e}^{-x}\cos(6x)\Big]_1^2 - 36\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \quad \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin(6x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{37}\mathrm{e}^{-x}\Big[\sin(6x)+6\cos(6x)\Big]_1^2$$

da cui

$$\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\sin^2(3x)\Big]_1^2 - \frac{3}{37}\mathrm{e}^{-x}\Big[\sin(6x)+6\cos(6x)\Big]_1^2.$$

Esercizio 5

Trasformiamo per prima cosa l'equazione in forma normale:

$$xy''(x) - y(x)'x = (x^2-3x)\mathrm{e}^{2x}\cos(x/2) - x\big(y''(x)+y'(x)-y(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad 2y''(x) - y(x) = (x-3)\mathrm{e}^{2x}\cos(x/2)$$

e vediamo che si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. Esaminiamo il polinomio associato:

$$P(\lambda) = 2\lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il termine non omogeneo dell'equazione è del tipo $Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ con $Q(x) = x-3$ polinomio di primo grado, $\alpha = 2$ e $\beta = 1/2$. Poichè $\alpha + i\beta = 2 + i/2 \neq \pm 1/\sqrt{2}$, è $P(\alpha+i\beta) \neq 0$ e dunque si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(x) = R_1(x)\mathrm{e}^{2x}\cos(x/2) + T_1(x)\mathrm{e}^{2x}\sin(x/2) = \mathrm{e}^{2x}\big\{(Ax+B)\cos(x/2) + (Cx+D)\sin(x/2)\big\}$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}'(x) &= \mathrm{e}^{2x}\Big\{2\Big((Ax+B)\cos(x/2) + (Cx+D)\sin(x/2)\Big) \\
&\qquad + A\cos(x/2) - \frac{1}{2}(Ax+B)\sin(x/2) + C\sin(x/2) + \frac{1}{2}(Cx+D)\cos(x/2)\Big\} \\
&= \mathrm{e}^{2x}\left\{\left[\left(2A+\frac{1}{2}C\right)x + \left(A+2B+\frac{1}{2}D\right)\right]\cos(x/2) + \left[\left(-\frac{1}{2}A+2C\right)x + \left(-\frac{1}{2}B+C+2D\right)\right]\sin(x/2)\right\} \\
&= \mathrm{e}^{2x}\Big\{(Ex+F)\cos(x/2) + (Gx+H)\sin(x/2)\Big\}
\end{aligned}$$

dove, per comodità, abbiamo posto $E = 2A + C/2$, $F = A + 2B + D/2$, $G = -A/2 + 2C$ e $H = -B/2 + C + 2D$. Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}''(x) &= \mathrm{e}^{2x}\Big\{2\Big((Ex+F)\cos(x/2) + (Gx+H)\sin(x/2)\Big) \\
&\qquad + E\cos(x/2) - \frac{1}{2}(Ex+F)\sin(x/2) + G\sin(x/2) + \frac{1}{2}(Gx+H)\cos(x/2)\Big\} \\
&= \mathrm{e}^{2x}\left\{\left[\left(2E+\frac{1}{2}G\right)x + \left(E+2F+\frac{1}{2}H\right)\right]\cos(x/2) + \left[\left(-\frac{1}{2}E+2G\right)x + \left(-\frac{1}{2}F+G+2H\right)\right]\sin(x/2)\right\} \\
&= \mathrm{e}^{2x}\Big\{(Lx+M)\cos(x/2) + (Nx+P)\sin(x/2)\Big\}
\end{aligned}$$

dove, per comodità, abbiamo posto $L = 2E + G/2$, $M = E + 2F + H/2$, $N = -E/2 + 2G$ e $P = -F/2 + G + 2H$. Sostituiamo ora nel membro sinistro dell'equazione di partenza:

$$\begin{aligned}
2\widetilde{y}''(x) - \widetilde{y}(x) &= \mathrm{e}^{2x}\left\{2\Big((Lx+M)\cos(x/2) + (Nx+P)\sin(x/2)\Big) - \Big((Ax+B)\cos(x/2) + (Cx+D)\sin(x/2)\Big)\right\} \\
&= \mathrm{e}^{2x}\left\{\Big((2L-A)x + (2M-B)\Big)\cos(x/2) + \Big((2N-C)x + (2P-D)\Big)\sin(x/2)\right\}
\end{aligned}$$

Esplicitiamo i coefficienti:

$$
\begin{aligned}
2L - A &= 2\left(2E + \frac{1}{2}G\right) - A = 4E + G - A = 4\left(2A + \frac{1}{2}C\right) + \left(-\frac{1}{2}A + 2C\right) - A = \boxed{\frac{13}{2}A + 4C} \\
2M - B &= 2\left(E + 2F + \frac{1}{2}H\right) - B = 2E + 4F + H - B \\
&= 2\left(2A + \frac{1}{2}C\right) + 4\left(A + 2B + \frac{1}{2}D\right) + \left(-\frac{1}{2}B + C + 2D\right) - B = \boxed{8A + \frac{13}{2}B + 2C + 4D} \\
2N - C &= 2\left(-\frac{1}{2}E + 2G\right) - C = -E + 4G - C = -\left(2A + \frac{1}{2}C\right) + 4\left(-\frac{1}{2}A + 2C\right) - C = \boxed{-4A + \frac{13}{2}C} \\
2P - D &= 2\left(-\frac{1}{2}F + G + 2H\right) - D = -F + 2G + 4H - D \\
&= -\left(A + 2B + \frac{1}{2}D\right) + 2\left(-\frac{1}{2}A + 2C\right) + 4\left(-\frac{1}{2}B + C + 2D\right) - D = \boxed{-2A - 4B + 8C + \frac{13}{2}D}
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'equazione di partenza si ha:

$$
\begin{aligned}
2\widetilde{y}''(x) - \widetilde{y}(x) &= \mathrm{e}^{2x}\left\{\left[\left(\frac{13}{2}A + 4C\right)x + \left(8A + \frac{13}{2}B + 2C + 4D\right)\right]\cos(x/2)\right. \\
&\qquad \left. + \left[\left(-4A + \frac{13}{2}C\right)x + \left(-2A - 4B + 8C + \frac{13}{2}D\right)\right]\sin(x/2)\right\} \\
&= (x-3)\mathrm{e}^{2x}\cos(x/2)
\end{aligned}
$$

da cui si imposta il sistema di equazioni lineari per A, B, C e D:

$$
\begin{cases}
\dfrac{13}{2}A + 4C = 1 \\
8A + \dfrac{13}{2}B + 2C + 4D = -3 \\
-4A + \dfrac{13}{2}C = 0 \\
-2A - 4B + 8C + \dfrac{13}{2}D = 0
\end{cases}
$$

Dalla terza e dalla prima equazione otteniamo immediatamente A e C:

$$
A = \frac{13}{8}C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{13}{2}\cdot\frac{13}{8} + 4\right)C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{16}{169+64} = \boxed{\frac{16}{233}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{13}{8}\cdot\frac{16}{233} = \boxed{\frac{26}{233}}
$$

Sostituendo nella seconda e nella quarta equazione si ha:

$$
\begin{cases}
8\dfrac{26}{233} + \dfrac{13}{2}B + 2\dfrac{16}{233} + 4D = -3 \\
-2\dfrac{26}{233} - 4B + 8\dfrac{16}{233} + \dfrac{13}{2}D = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{13}{2}B + 4D = -\dfrac{939}{233} \\
-4B + \dfrac{13}{2}D = -\dfrac{76}{233}
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{13}{2}\cdot\dfrac{19}{233} + \left(\dfrac{169}{16} + 4\right)D = -\dfrac{939}{233} \\
B = \dfrac{19}{233} + \dfrac{13}{8}D
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{233}{16}D = -\dfrac{2\cdot 939 + 247}{2\cdot 233} \\
B = \dfrac{19}{233} + \dfrac{13}{8}D
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
D = -\dfrac{8\cdot 2125}{233^2} = \boxed{-\dfrac{17000}{233^2}} \\
B = \dfrac{19}{233} - \dfrac{13}{8}\cdot\dfrac{8\cdot 2125}{233^2} = \boxed{-\dfrac{23198}{233^2}}
\end{cases}
$$

In conclusione, la soluzione particolare risulta

$$
\widetilde{y}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{233}\left\{\left(26x - \frac{23198}{233}\right)\cos(x/2) + \left(16x - \frac{17000}{233}\right)\sin(x/2)\right\}
$$

In aggiunta alla soluzione particolare $\widetilde{y}(x)$, poichè le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$
y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-x/\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{x/\sqrt{2}},
$$

l'integrale generale dell'equazione data si scrive come

$$y^*(x) = \widetilde{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6

Si tratta di un'equazione lineare, del second'ordine, a coefficienti costanti, non omogenea. Il membro destro $f(x) = \pi \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right)$ non è della forma $Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ o $Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Proviamo dunque la risoluzione con il metodo di variazione delle costanti. Si ha:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$$

dunque cerchiamo una soluzione del tipo $y^*(x) = A(x)\mathrm{e}^{-2x} + B(x)\mathrm{e}^{2x}$ con $A(x)$ e $B(x)$ due funzioni derivabili che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} A'(x)\mathrm{e}^{-2x} + B'(x)\mathrm{e}^{2x} = 0 \\ -2A'(x)\mathrm{e}^{-2x} + 2B'(x)\mathrm{e}^{2x} = \pi \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Si ricava

$$\begin{cases} A'(x) = -\mathrm{e}^{4x}B'(x) \\ 2\left(\mathrm{e}^{4x}\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x}\right)B'(x) = \pi \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'(x) = -\mathrm{e}^{4x}B'(x) \\ 4\mathrm{e}^{2x}B'(x) = \pi \ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'(x) = -\mathrm{e}^{4x}B'(x) \\ B'(x) = \dfrac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2x}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right) \end{cases}$$

Cerchiamo dunque una primitiva di $B(x)$ integrando fra 0 ed x il secondo membro dell'ultima equazione. Con la sostituzione $2t = \ln(y)$ si ha:

$$2t = \ln(y) \Rightarrow y = \mathrm{e}^{2t} \text{ e } t = \frac{1}{2}\ln(y) \Rightarrow dt = \frac{1}{2y}\mathrm{d}y, \quad y = 1 \text{ per } t = 0 \quad \text{e} \quad y = \mathrm{e}^{2x} \text{ per } t = x$$

da cui

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{2t}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{1}{y}\ln(1+y)\frac{1}{2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{y}\ln(1+y)\right]_1^{\mathrm{e}^{2x}} + \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{1}{y}\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y\,.$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente:

$$\int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{1}{y}\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y = \Big[\ln(y) - \ln(1+y)\Big]_1^{\mathrm{e}^{2x}} = \left[\ln\left(\frac{y}{1+y}\right)\right]_1^{\mathrm{e}^{2x}}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{2t}\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{y}{1+y}\right) - \frac{1}{y}\ln(1+y)\right]_1^{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big)\right] - \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2x - \ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big) - \mathrm{e}^{-2x}\ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big)\right] - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\
&= x - \frac{1}{2}\Big(1+\mathrm{e}^{-2x}\Big)\ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big) + \ln(2)
\end{aligned}$$

da cui si ha immediatamente che

$$B(x) = \frac{\pi}{4}\left[x - \frac{1}{2}\Big(1+\mathrm{e}^{-2x}\Big)\ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big)\right] + d \qquad \text{con} \quad d \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, da

$$A'(x) = -\mathrm{e}^{4x}B'(x) = -\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{2x}\ln\Big(1+\mathrm{e}^{2x}\Big)$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{e}^{2t} \ln\left(1+\mathrm{e}^{2t}\right) \mathrm{d}t &= \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} y \ln(1+y) \frac{1}{2y}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \ln(1+y) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\Big[y \ln(1+y)\Big]_1^{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{y}{1+y} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln(1+y) - \big(y - \ln(1+y)\big)\Big]_1^{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^{2x} + \ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\right] - \frac{1}{2}\Big[\ln(2) - 1 + \ln(2)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^{2x} + 1\right] - \ln(2)
\end{aligned}
$$

da cui si ha immediatamente che

$$
A(x) = \frac{\pi}{8}\left[\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^{2x} + 1\right] + c \qquad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.
$$

Quindi, la soluzione dell'equazione differenziale si scrive

$$
\begin{aligned}
\widetilde{y}(x) &= A(x)\mathrm{e}^{-2x} + B(x)\mathrm{e}^{2x} \\
&= \left\{\frac{\pi}{8}\left[\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^{2x} + 1\right] + c\right\}\mathrm{e}^{-2x} + \left\{\frac{\pi}{4}\left[x - \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\right] + d\right\}\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}
$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$
\begin{aligned}
0 = \widetilde{y}(0) &= A(0) + B(0) \\
&= \left\{\frac{\pi}{8}\Big[2\ln(2) - 1 + 1\Big] + c\right\} + \left\{\frac{\pi}{4}\left[0 - \frac{1}{2}\,2\ln(2)\right] + d\right\} = \frac{\pi}{4}\ln(2) + c - \frac{\pi}{4}\ln(2) + d \\
&= c + d \\
2 = \widetilde{y}'(0) &= A'(0) + B'(0) - 2A(0) + 2B(0) \qquad \big(\text{dalla prima equazione del sistema (3) è } A'(0) + B'(0) = 0\big) \\
&= 2\left\{-\frac{\pi}{4}\ln(2) - c + \frac{\pi}{4}\ln(2) + d\right\} \\
&= 2(d - c)
\end{aligned}
$$

da cui si ricava il sistema per determinare i valori delle costanti c e d:

$$
\begin{cases} c + d = 0 \\ -c + d = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -d \\ 2d = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -1/2 \\ d = 1/2 \end{cases}
$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è:

$$
y^*(x) = \left\{\frac{\pi}{8}\left[\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^{2x} + 1\right] - \frac{1}{2}\right\}\mathrm{e}^{-2x} + \left\{\frac{\pi}{4}\left[x - \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\right] + \frac{1}{2}\right\}\mathrm{e}^{2x}.
$$