Prima prova scritta di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

12 gennaio 2016

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\sqrt{4 - 3\,x - x^2} < 2\,x + 1$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:
$$A = \left\{ \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 1},\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

3. Sia
$$f(x) = x + \frac{1}{x+3},\ x \in \mathcal{R},\ x \neq -3$$
Dire se f é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori.

4. Calcolare i seguenti limiti:
$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,\ln\left(\frac{3\,x + \sqrt{x}}{3\,x + 1}\right), \quad b) \quad \lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{x^3 + 2\,x^2 + x - 4}$$

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\sqrt{4 - 3\,x - x^2} < 2\,x + 1$$

Risulta $4 - 3\,x - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [-4, 1]$. e se $x \geq -1/2$:

$$\sqrt{4 - 3\,x - x^2} < 2\,x + 1 \Longleftrightarrow 4 - 3\,x - x^2 < 4\,x^2 + 4\,x + 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 5\,x^2 + 7\,x - 3 > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-7 - \sqrt{109}}{10}\right) \cup \left(\frac{-7 + \sqrt{109}}{10}, +\infty\right)$$

Se ne conclude che la diseguaglianza iniziale vale se e solo se

$$x \in \left[\frac{\sqrt{109} - 7}{10}, 1\right]$$

2. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \left\{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 1},\ x \in \mathcal{R}\right\}$$

Osserviamo che $b \in \mathcal{R}$ é un maggiorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 1} \leq b, \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

D'altra parte

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 1} \leq b \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 \leq b\,x^2 + b\,x + b \Longleftrightarrow (b-1)x^2 + (b+1)x + b + 2 \geq 0$$

Siccome l'ultima diseguaglianza di secodo grado deve valere $\forall x \in \mathcal{R}$, deve quindi essere $b - 1 > 0$ e $\Delta(b) = (b+1)^2 - 4\,(b-1)(b+2) = -3\,b^2 - 2\,b + 9 \leq 0$ Ne possiamo concludere che

$$\sup A = \max A = \frac{\sqrt{28} - 1}{3}$$

D'altra parte, $d \in \mathcal{R}$ é un minorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 1} \geq d, \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

D'altra parte

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 1} \geq d \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 \geq d\,x^2 + d\,x + d \Longleftrightarrow (1-d)x^2 - (d+1)x - b - 2 \geq 0$$

Siccome l'ultima diseguaglianza di secodo grado deve valere $\forall x \in \mathcal{R}$, deve quindi essere $1 - d > 0$ e $\Delta(d) = (d+1)^2 + 4\,(1-d)(d+2) = -3\,d^2 - 2\,d + 9 \leq 0$ Ne possiamo concludere che

$$\inf A = \min A = \frac{-1 - \sqrt{28}}{3}$$

3. Sia

$$f(x) = x + \frac{1}{x+3}, \;\; x \in \mathcal{R}, \;\; x \neq -3$$

Dire se f é iniettiva e calcolarne l'insieme dei valori. Risulta

$$f(x) = f(y) \iff x(x+3)(y+3)+y+3 = y(x+3)(y+3)+x+3 \iff (x-y)(x\,y+3\,x+3\,y+8) = 0$$

Pertanto la funzione considerata non é iniettiva. Infatti $f(x) = f(y)$ anche quando $x \neq y$, purché valga la relazione $x\,y + 3\,x + 3\,y + 8 = 0$ e risolvendo in y:

$$y = \frac{-8 - 3\,x}{x+3}$$

In paerticolare se $x = 0$, $y = -8/3$ e $f(0) = f(-8/3)$.
Infine

$$f(x) = y \iff x + \frac{1}{x+3} = y \iff x^2 + (3-y)x + 1 - 3\,y = 0$$

Affinché dunque l'ultima equazione abbia soluzioni, deve essere:

$$0 \leq \Delta(y) = (3-y)^2 - 4(1-3\,y) = y^2 + 6\,y + 5$$

L'insieme dei valori della funzione f é dunque: $(-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$.

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\ln\left(\frac{3\,x+\sqrt{x}}{3\,x+1}\right), \quad b) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{x^3 + 2\,x^2 + x - 4}$$

Risulta:

$$\sqrt{x}\,\ln\left(\frac{3\,x+\sqrt{x}}{3\,x+1}\right) = \sqrt{x}\,\ln\left(1 + \frac{\sqrt{x}-1}{3\,x+1}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}-1}{3\,x+1}\right)}{\frac{\sqrt{x}-1}{3\,x+1}}\;\frac{x-\sqrt{x}}{3\,x+1}$$

Se ne conclude che:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\ln\left(\frac{3\,x+\sqrt{x}}{3\,x+1}\right) = \frac{1}{3}$$

Usando la sostituzione $y = x - 1$ e notando che:

$$\cos\left(\frac{\pi\,y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi\,y}{2}\right)$$

$$(y+1)^3 + 2\,(y+1)^2 + y + 1 - 4 = y^3 + 3\,y^2 + 3\,y + 1 + 2(y^2 + 2\,y + 1) + y + 1 - 4 = y(y^2 + 5\,y + 8)$$

si ottiene, usando il teorema sul limite della funzione composta:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{x^3 + 2\,x^2 + x - 4} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin\left(\frac{\pi\,y}{2}\right)}{y(y^2 + 5\,y + 8)} = -\frac{\pi}{16}$$