Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica, secondo modulo
Seconda prova parziale A.A. 2013–2014 – 03/06/2014

1) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:

$$\text{(a)} \quad \int_0^2 x\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\ln\bigl(\cos(x)\bigr)}\mathrm{d}x$$

2) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$\text{(a)} \quad 2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = \sin(2x) \qquad\qquad \text{(b)} \quad xy''(x) - y(x)x = (x^3-3x)\mathrm{e}^{2x}\cos(\pi x)$$

3) Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x+y(x)}y'(x) + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzioni e commenti

Per quanto possibile, nelle soluzioni seguenti vengono evidenziati tutti gli aspetti rilevanti e le possibili alternative (se esistono) per raggiungere il risultato. Osservazioni e commenti sono inseriti per chiarire ogni dettaglio delle scelte e dei passaggi. Nello svolgimento del compito, naturalmente, gran parte delle osservazioni qui riportate possono essere omesse, così come alcuni passaggi.

Esercizio 1a

Vediamo diversi modi di procedere:

1) l'esercizio si risolve rapidamente spezzando l'integrale negli intervalli di positività e negatività dell'argomento del modulo nel radicando:

$$3 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

ed essendo $\sqrt{3} < 2$ si spezza l'integrale sui due intervalli $\bigl[0, \sqrt{3}\bigr]$ e $\bigl[\sqrt{3}, 2\bigr]$:

$$\int_0^2 x\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^2 x\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^2 x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nel primo intervallo si ottiene:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (-2x)\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\bigl(3-x^2\bigr)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\bigl(-3\bigr)^{3/2} = \sqrt{3}\,.$$

Nel secondo intervallo, in cui $x^2 - 3 \geq 0$, possiamo operare la sostituzione

$$t = \sqrt{x^2-3} \Rightarrow t^2 = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 = t^2 + 3 \Rightarrow x = \sqrt{t^2+3} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,\mathrm{d}t \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

da cui discende immediatamente che

$$\int_{\sqrt{3}}^2 x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{t^2+3}\cdot t\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Dunque il risultato dell'integrale dato è $\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}$.

2) Un altro modo, meno rapido, di procedere nel primo integrale è per sostituzione:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3(1-x^2/3)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1-(x/\sqrt{3})^2}\,\mathrm{d}x$$

Poichè $x \in [0, \sqrt{3}]$, si ha $0 \leq x/\sqrt{3} \leq 1$, dunque è lecito operare la sostituzione $\cos(t) = x/\sqrt{3}$, da cui discendono $x = \sqrt{3}\cos(t)$, $\mathrm{d}x = -\sqrt{3}\sin(t)\mathrm{d}t$ e $x^2 = 3\cos^2(t)$, con gli estremi d'integrazione che diventano $t_0 = \arccos(0) = \pi/2$ e $t_1 = \arccos(1) = 0$:

$$\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1-(x/\sqrt{3})^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{3}\cos(t)\sqrt{1-\cos^2(t)}\big(-\sqrt{3}\sin(t)\big)\mathrm{d}t$$

$$= 3\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 3\sqrt{3}\left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{3}\,.$$

Si noti che abbiamo potuto scrivere $\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)} = \sin(t)$ perchè $\sin(t) \geq 0$ per $t \in [0, \pi/2]$.

3) Alternativamente, si può operare la sostituzione $3 - x^2 = t$, che fornisce $-2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ e i nuovi estremi d'integrazione $t_0 = 3$ e $t_1 = -1$:

$$\int_0^2 x\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^2 (-2x)\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_3^{-1}\sqrt{|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\sqrt{|t|}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora si può pensare di operare la sostituzione $s = \sqrt{|t|}$, dalla quale discendono

$$\frac{\mathrm{sgn}(t)}{2\sqrt{|t|}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}s \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sgn}(t)\mathrm{d}t = 2\sqrt{|t|}\,\mathrm{d}s = 2s\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}t = -2s\mathrm{d}s & \text{per } t < 0 \\ \mathrm{d}t = 2s\mathrm{d}s & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

ma a questo punto non è agevole esprimere $\mathrm{sgn}(t)$ in funzione di s. Dunque conviene di nuovo spezzare l'integrale negli intervalli di positività e negatività di t e operare successivamente la sostituzione:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\sqrt{|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^0 s(-2s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} s(2s)\mathrm{d}s = \int_0^1 s^2\mathrm{d}s\ + \int_0^{\sqrt{3}} s^2\mathrm{d}s$$

Qui occorre fare attenzione, perchè qui *non è lecito unire gli ultimi due integrali in un unico integrale* in quanto nell'intervallo $[0, 1]$ esso è calcolato due volte:

$$\int_0^1 s^2\mathrm{d}s\ + \int_0^{\sqrt{3}} s^2\mathrm{d}s = 2\int_0^1 s^2\mathrm{d}s\ + \int_1^{\sqrt{3}} s^2\mathrm{d}s = 2\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{s^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} - 0 + \frac{3^{3/2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sqrt{3}\,.$$

4) Una terza strada alternativa è di far comparire nell'integrale la derivata di una funzione. Moltiplicando e dividendo l'integranda per -2 si ottiene qualcosa, ma la presenza del modulo nel radicando richiede un ulteriore fattore. Usando il fatto che $|z| = z\,\mathrm{sgn}(z)\ \forall z \in \mathbb{R}$ (assumendo $\mathrm{sgn}(0) = 1$[1]) possiamo scrivere l'integranda come

$$\int_0^2 x\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^2 (-2x)\sqrt{|3-x^2|}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^2 (-2x)\Big((3-x^2)\,\mathrm{sgn}(3-x^2)\Big)^{1/2}\mathrm{d}x\,.$$

Osserviamo che $-2x$ è la derivata prima di $3 - x^2$ e ricordando che per ogni $z \neq 0$ la derivata prima di $|z|$ è $\mathrm{sgn}(z)$, possiamo costruire una primitiva dell'integranda:

$$\Big(\big(|3-x^2|\big)^{3/2}\Big)' = \frac{3}{2}\big(|3-x^2|\big)^{1/2}\mathrm{sgn}(3-x^2)(-2x) \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\mathrm{sgn}(3-x^2)\Big(|3-x^2|\Big)^{3/2} = \int(-2x)\Big(|3-x^2|\Big)^{1/2}\mathrm{d}x\,.$$

[1]La funzione $\mathrm{sgn}(z)$ ha una discontinuità in $z = 0$ e talvolta questo fatto viene utilizzato per definire $\mathrm{sgn}(0) = 0$. Tuttavia, la definizione standard è $\mathrm{sgn}(z) = -1$ per $z < 0$ e $\mathrm{sgn}(z) = 1$ per $z \geq 0$. Si noti che in questo modo è sempre vero che $\mathrm{sgn}(z) = 1/\mathrm{sgn}(z)$.

Pertanto, possiamo scrivere

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 (-2x)\Big((3-x^2)\,\mathrm{sgn}(3-x^2)\Big)^{1/2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,\mathrm{sgn}(3-x^2)\Big(|3-x^2|\Big)^{3/2}\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\left[(-1)-3^{3/2}\right] = \frac{1}{3}+\sqrt{3}$$

dove abbiamo usato il fatto che per $x = 2$ è $\mathrm{sgn}(3-x^2) = -1$, mentre per $x = 0$ è $\mathrm{sgn}(3-x^2) = 1$.

Esercizio 1b

Vediamo anche qui tre modi diversi di procedere:

1) possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\ln\big(\cos(x)\big)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)\Big(1+\ln\big(\cos(x)\big)\Big)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ponendo $g(x) = 1+\ln\big(\cos(x)\big)$ si vede immediatamente che $g'(x) = -\sin(x)/\cos(x)$. Dunque, moltiplicando per -1 dentro e fuori dall'integrale, si vede immediatamente che la funzione integranda è del tipo $f(x) = g'(x)/g(x)$, una cui primitiva è $\ln\big(|g(x)|\big)$. Pertanto, l'integrale è subito risolto:

$$-\int_0^{\pi/3} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)\Big(1+\ln\big(\cos(x)\big)\Big)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/3}\bigg(\ln\Big(\big|1+\ln\big(\cos(x)\big)\big|\Big)\bigg)'\mathrm{d}x = -\bigg[\ln\Big(\big|1+\ln\big(\cos(x)\big)\big|\Big)\bigg]_0^{\pi/3} =$$
$$= -\ln\Big(\big|1+\ln(1/2)\big|\Big)\,.$$

2) Una seconda strada possibile è operare la sostituzione $\cos(x) = \mathrm{e}^t$: si ha $-\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ e $t = \ln\big(\cos(x)\big)$, con estremi d'integrazione $t_0 = \ln\big(\cos(0)\big) = 0$, $t_1 = \ln\big(\cos(\pi/3)\big) = \ln(1/2)$. Allora

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)\Big(1+\ln\big(\cos(x)\big)\Big)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\ln(1/2)} \frac{1}{\mathrm{e}^t}\cdot\frac{1}{1+t}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\ln(1/2)} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\Big[\ln(|1+t|)\Big]_0^{\ln(1/2)} = -\ln\Big(\big|1+\ln(1/2)\big|\Big)\,.$$

3) Alternativamente, si può operare la sostituzione $\cos(x) = t$ (che è lecita perchè per $x \in [0,\pi/3]$ si ha $\cos(x) > 0$ e dunque il logaritmo è definito), da cui discende che $-\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ e che

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)\Big(1+\ln\big(\cos(x)\big)\Big)}\mathrm{d}x = -\int_0^{1/2} \frac{1}{t\big(1+\ln(t)\big)}\mathrm{d}t\,.$$

Ora, con la sostituzione $s = 1+\ln(t)$, da cui $s-1 = \ln(t) \Rightarrow \mathrm{e}^{s-1} = t \Rightarrow \mathrm{e}^{s-1}\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$, si ottiene subito

$$-\int_0^{1/2} \frac{1}{t\big(1+\ln(t)\big)}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1+\ln(1/2)} \frac{\mathrm{e}^{s-1}}{\mathrm{e}^{s-1}s}\,\mathrm{d}s = -\int_1^{1+\ln(1/2)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\Big[\ln\big(\,|s|\,\big)\Big]_1^{1+\ln(1/2)} = -\ln\Big(\big|1+\ln(1/2)\big|\Big)\,.$$

Esercizio 2a

Normalizzando l'equazione ottiene

$$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \tag{1}$$

che è un'equazione differenziale del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea. Il polinomio associato è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{3}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{25-24}{16} = \frac{1}{16} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = \frac{5}{4}-\frac{1}{4} = 1,\quad \lambda_2 = \frac{5}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

da cui discende immediatamente che due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea associata sono
$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{e} \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\,.$$
La funzione a secondo membro di (1) è del tipo $Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\big(\beta x\big)$ con $Q(x) = 1/2$, $\deg\big(Q(x)\big) = 0$, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Dobbiamo quindi considerare se il numero complesso $\alpha+i\beta = 2i$ è radice di $P(\lambda)$: ma $2i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (cioè è un numero complesso puro), mentre $P(\lambda)$ ha le due radici reali e distinte $\lambda_1, \lambda_2 \neq 2i$. Quindi $P(2i) \neq 0$: allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (1) va cercata fra le funzioni del tipo

$$\widetilde{y}(x) = R(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\big(\beta x\big) + S(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\big(\beta x\big) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ perchè $\deg\big(R(x)\big) = \deg\big(S(x)\big) = \deg\big(Q(x)\big) = 0$ (cioè tutti questi polinomi si riducono a costanti). Le derivate della soluzione particolare sono:

$$\widetilde{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{y}''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)\,.$$

Sostituendo ora nell'equazione di partenza abbiamo

$$\begin{aligned}
&2\widetilde{y}''(x) - 5\widetilde{y}'(x) + 3\widetilde{y}(x) = \sin(2x)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad -8A\sin(2x) - 8B\cos(2x) - 10A\cos(2x) + 10B\sin(2x) + 3A\sin(2x) + 3B\cos(2x) = \sin(2x)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad (-8A + 10B + 3A)\sin(2x) + (-8B - 10A + 3B)\cos(2x) = \sin(2x)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -5A + 10B = 1 \\ -10A - 5B = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -5A - 20A = 1 \\ B = -2A \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A = -1/25 \\ B = 2/25 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dunque, le soluzioni dell'equazione data sono tutte e sole le funzioni

$$y^*(x) = \widetilde{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = -\frac{1}{25}\sin(2x) + \frac{2}{25}\cos(2x) + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy dato si riscrive subito come

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x+y(x)}y'(x) + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{y(x)}y'(x) = -x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y'(x) = \big(-x\mathrm{e}^{-x}\big)\mathrm{e}^{-y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e dunque si vede immediatamente che l'equazione differenziale è a variabili separabili, con $a(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ e $b(y) = \mathrm{e}^{-y}$. Dato che $b(y_0) = b(0) = 1 \neq 0$, possiamo procedere con il metodo standard:

$$\mathrm{e}^{y(x)}y'(x) = -x\mathrm{e}^{-x} \quad\Rightarrow\quad \int_{x_0=0}^{x} \mathrm{e}^{y(t)}y'(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0=0}^{x} \big(-t\mathrm{e}^{-t}\big)\mathrm{d}t$$

da cui, ponendo $s = y(t)$ (dunque $\mathrm{d}s = y'(t)\mathrm{d}t$) e integrando per parti si ottiene subito

$$\begin{aligned}
&\int_{y(0)=0}^{y(x)} \mathrm{e}^s\mathrm{d}s = \int_0^x t\big(-\mathrm{e}^{-t}\big)\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad \Big[\mathrm{e}^s\Big]_0^{y(x)} = \Big[t\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{y(x)} - 1 = x\mathrm{e}^{-x} - \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^x\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{y(x)} = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - 1 + 1 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{y(x)} = \mathrm{e}^{-x}(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad y(x) = -x + \ln(x+1)
\end{aligned}$$

dove l'ultima equivalenza viene dall'aver applicato il logaritmo naturale ad entrambi i membri dell'equazione, cosa che è lecita perchè sono entrambi quantità sempre positive per $x \geq x_0$.

Possiamo per sicurezza controllare la soluzione:

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y(0) = \ln(1) = 0 \quad \text{che è corretto;}\\
&y'(x) = -1 + \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{x+1} \quad \text{da cui}\\
&\mathrm{e}^{x+y(x)}y'(x) + x = \mathrm{e}^{x-x+\ln(x+1)}\left(-\frac{x}{x+1}\right) + x = -(x+1)\frac{x}{x+1} + x = -x + x = 0 \quad \text{che è corretto.}
\end{aligned}$$

Esercizio 2b

Raccogliendo x a fattor comune in entrambi i membri, possiamo riscrivere subito l'equazione in forma normale:

$$x\big(y''(x)-y(x)\big)=x(x^2-3)\mathrm{e}^{2x}\cos(\pi x)\quad\overset{\text{supp. }x\neq 0}{\iff}\quad y''(x)-y(x)=(x^2-3)\mathrm{e}^{2x}\cos(\pi x)$$

che è un'equazione differenziale del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea. Il polinomio associato all'equazione è

$$P(\lambda)=\lambda^2-1\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1.$$

Dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{-x}\qquad\text{e}\qquad y_2(x)=\mathrm{e}^{x}\,.$$

La funzione a secondo membro nell'equazione data è della forma $f(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\big(\beta x\big)$ con $Q(x)=x^2-3$, $\deg\big(Q(x)\big)=2$, $\alpha=2$ e $\beta=\pi$. Dato che $\alpha+i\beta=2+i\pi\neq\pm1$, si ha $P(2+i\pi)\neq0$ e dunque cerchiamo una soluzione particolare $\widetilde{y}(x)$ della forma

$$\widetilde{y}(x)=R_1(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\big(\beta x\big)+R_2(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\big(\beta x\big)$$

con $R_1(x)$ ed $R_2(x)$ polinomi algebrici tali che $\deg\big(R_1(x)\big)=\deg\big(R_2(x)\big)=\deg\big(Q(x)\big)=2$. Una soluzione particolare è quindi del tipo

$$\widetilde{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^{2x}\cos(\pi x)+(Dx^2+Ex+F)\mathrm{e}^{2x}\sin(\pi x)$$

con $A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$. Determiniamo le derivate:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}'(x)&=\Big((2Ax+B)\cos(\pi x)+2(Ax^2+Bx+C)\cos(\pi x)-\pi(Ax^2+Bx+C)\sin(\pi x)\Big)\mathrm{e}^{2x}\\
&\quad+\Big((2Dx+E)\sin(\pi x)+2(Dx^2+Ex+F)\sin(\pi x)+\pi(Dx^2+Ex+F)\cos(\pi x)\Big)\mathrm{e}^{2x}\\
&=\bigg[\Big(2Ax+B+2(Ax^2+Bx+C)+\pi(Dx^2+Ex+F)\Big)\cos(\pi x)\\
&\quad+\Big(2Dx+E+2(Dx^2+Ex+F)-\pi(Ax^2+Bx+C)\Big)\sin(\pi x)\bigg]\mathrm{e}^{2x}\\
&=\Big[p_2(x)\cos(\pi x)+q_2(x)\sin(\pi x)\Big]\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
p_2(x)&=(2A+D\pi)x^2+(2A+2B+E\pi)x+(B+2C+F\pi)\\
q_2(x)&=(2D-A\pi)x^2+(2D+2E-B\pi)x+(E+2F-C\pi)
\end{aligned}$$

polinomi di secondo grado in x. Deriviamo ora $\widetilde{y}'(x)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}''(x)&=\Big[p_2(x)\cos(\pi x)+q_2(x)\sin(\pi x)\Big]'\mathrm{e}^{2x}+\Big[p_2(x)\cos(\pi x)+q_2(x)\sin(\pi x)\Big]2\mathrm{e}^{2x}\\
&=\Big[p_2'(x)\cos(\pi x)-p_2(x)\pi\sin(\pi x)+q_2'(x)\sin(\pi x)+q_2(x)\pi\cos(\pi x)+2p_2(x)\cos(\pi x)+2q_2(x)\sin(\pi x)\Big]\mathrm{e}^{2x}\\
&=\Big[\Big(p_2'(x)+\pi q_2(x)+2p_2(x)\Big)\cos(\pi x)+\Big(q_2'(x)-\pi p_2(x)+2q_2(x)\Big)\sin(\pi x)\Big]\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

Sostituendo $\widetilde{y}''(x)$ e $\widetilde{y}(x)$ nel membro sinistro dell'equazione differenziale data si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}''(x)-\widetilde{y}(x)&=\Big[\Big(p_2'(x)+\pi q_2(x)+2p_2(x)\Big)\cos(\pi x)+\Big(q_2'(x)-\pi p_2(x)+2q_2(x)\Big)\sin(\pi x)\Big]\mathrm{e}^{2x}\\
&\quad-\Big[(Ax^2+Bx+C)\cos(\pi x)+(Dx^2+Ex+F)\sin(\pi x)\Big]\mathrm{e}^{2x}\\
&=\bigg[\Big(p_2'(x)+\pi q_2(x)+2p_2(x)-(Ax^2+Bx+C)\Big)\cos(\pi x)\\
&\quad+\Big(q_2'(x)-\pi p_2(x)+2q_2(x)-(Dx^2+Ex+F)\Big)\sin(\pi x)\bigg]\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

da cui, essendo il membro destro $(x^2-3)\mathrm{e}^{2x}\cos(\pi x)$, discendono immediatamente le due condizioni

$$\begin{cases} p_2'(x)+\pi q_2(x)+2p_2(x)-(Ax^2+Bx+C)=x^2-3 \\ q_2'(x)-\pi p_2(x)+2q_2(x)-(Dx^2+Ex+F)=0 \end{cases}$$

N.B. *Agli effetti del compito, arrivare a questo punto può già essere considerato soddisfacente.*

Esplicitiamo i calcoli separatamente per le due condizioni. Dalla prima equazione si ottiene:

$$\begin{aligned}
p_2'(x)&+\pi q_2(x)+2p_2(x)-(Ax^2+Bx+C)-x^2+3=\\
&=\Big(2(2A+D\pi)x+(2A+2B+E\pi)\Big)+\pi\Big((2D-A\pi)x^2+(2D+2E-B\pi)x+(E+2F-C\pi)\Big)\\
&\quad+2\Big((2A+D\pi)x^2+(2A+2B+E\pi)x+(B+2C+F\pi)\Big)-(Ax^2+Bx+C)-x^2+3\\
&=(2D\pi-A\pi^2+4A+2D\pi-A-1)x^2\\
&\quad+(4A+2D\pi+2D\pi+2E\pi-B\pi^2+4A+4B+2E\pi-B)x\\
&\quad+(2A+2B+E\pi+E\pi+2F\pi-C\pi^2+2B+4C+2F\pi-C+3)\\
&=\big(3-\pi^2\big)A+4\pi D-1\big)x^2\\
&\quad+\big(8A+(3-\pi^2)B+4\pi D+4\pi E\big)x\\
&\quad+\big(2A+4B+(3-\pi^2)C+2\pi E+4\pi F+3\big)\,.
\end{aligned}\tag{2}$$

Dalla seconda equazione si ottiene invece

$$\begin{aligned}
q_2'(x)&-\pi p_2(x)+2q_2(x)-(Dx^2+Ex+F)=\\
&=\Big(2(2D-A\pi)x+(2D+2E-B\pi)\Big)-\pi\Big((2A+D\pi)x^2+(2A+2B+E\pi)x+(B+2C+F\pi)\Big)\\
&\quad+2\Big((2D-A\pi)x^2+(2D+2E-B\pi)x+(E+2F-C\pi)\Big)-(Dx^2+Ex+F)\\
&=(-2A\pi-D\pi^2+4D-2A\pi-D)x^2\\
&\quad+(4D-2A\pi-2A\pi-2B\pi-E\pi^2+4D+4E-2B\pi-E)x\\
&\quad+(2D+2E-B\pi-B\pi-2C\pi-F\pi^2+2E+4F-2C\pi-F)\\
&=\big(-4\pi A+(3-\pi^2)D\big)x^2\\
&\quad+\big(-4\pi A-4\pi B+8D+(3-\pi^2)E\big)x\\
&\quad+\big(-2\pi B-4\pi C+2D+4E+(3-\pi^2)F\big)\,.
\end{aligned}\tag{3}$$

Per il principio d'identità dei polinomi algebrici, le due condizioni di cui sopra implicano che tutti i coefficienti dei due polinomi quadratici ottenuti in (2) e (3) devono essere nulli. Si ottiene quindi il sistema lineare di sei equazioni nelle sei incognite $A,\dots,F$:

$$\begin{cases}
(3-\pi^2)A+4\pi D-1=0\\
8A+(3-\pi^2)B+4\pi D+4\pi E=0\\
2A+4B+(3-\pi^2)C+2\pi E+4\pi F+3=0\\
-4\pi A+(3-\pi^2)D=0\\
-4\pi A-4\pi B+8D+(3-\pi^2)E=0\\
-2\pi B-4\pi C+2D+4E+(3-\pi^2)F=0
\end{cases}\tag{4}$$

N.B. *Agli effetti del compito, con l'impostazione di questo sistema l'esercizio può ritenersi sostanzialmente svolto. Per dovere di completezza, si procede alla soluzione del sistema.*

Per risolvere il sistema lineare si può procedere in più modi. Per semplicità utilizziamo il metodo di sostituzione. Dalla quarta equazione ricaviamo un'espressione per A in funzione di D e la sostituiamo nella prima equazione per ottenere il valore di D:

$$-4\pi A+(3-\pi^2)D=0\quad\Rightarrow\quad A=\frac{3-\pi^2}{4\pi}D\quad\Rightarrow\quad(3-\pi^2)^2D+16\pi^2D-4\pi=0$$

$$\Rightarrow\quad D=\frac{4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{3-\pi^2}{4\pi}\cdot\frac{4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9}=\frac{3-\pi^2}{\pi^4+10\pi^2+9}$$

Sostituendo ora A e D nella seconda e nella quinta equazione del sistema si ottiene

$$\begin{cases} (3-\pi^2)B + 4\pi E = -8A - 4\pi D = \dfrac{8\pi^2 - 24}{\pi^4 + 10\pi^2 + 9} - \dfrac{16\pi^2}{\pi^4 + 10\pi^2 + 9} = \dfrac{-8(\pi^2+3)}{\pi^4 + 10\pi^2 + 9} \\ -4\pi B + (3-\pi^2)E = 4\pi A - 8D = \dfrac{(3-\pi^2)4\pi}{\pi^4 + 10\pi^2 + 9} - \dfrac{8 \cdot 4\pi}{\pi^4 + 10\pi^2 + 9} = \dfrac{-(5+\pi^2)4\pi}{\pi^4 + 10\pi^2 + 9} \end{cases}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} E = \frac{-8(\pi^2+3)}{\pi^4+10\pi^2+9} \cdot \frac{1}{4\pi} - \frac{3-\pi^2}{4\pi}B \quad &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad -4\pi B + \frac{-8(\pi^2+3)(3-\pi^2)}{\pi^4+10\pi^2+9} \cdot \frac{1}{4\pi} - \frac{(3-\pi^2)^2}{4\pi}B = \frac{-(5+\pi^2)4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{(4\pi)^2+(3-\pi^2)^2}{4\pi}B = \frac{-(5+\pi^2)4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9} + \frac{8(9-\pi^4)}{\pi^4+10\pi^2+9} \cdot \frac{1}{4\pi} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{\pi^4+10\pi^2+9}{4\pi}B = \frac{-(5+\pi^2)(4\pi)^2 + 8(9-\pi^4)}{(\pi^4+10\pi^2+9)4\pi} \\ &\Rightarrow \quad B = \frac{-8(3\pi^4+10\pi^2-9)}{(\pi^4+10\pi^2+9)4\pi} \cdot \frac{-4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9} = \boxed{\frac{8(3\pi^4+10\pi^2-9)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2}} \\ &\Rightarrow \quad E = \frac{-8(\pi^2+3)}{\pi^4+10\pi^2+9} \cdot \frac{1}{4\pi} - \frac{3-\pi^2}{4\pi} \cdot \frac{8(3\pi^4+10\pi^2-9)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \\ &\qquad = \frac{-8}{(\pi^4+10\pi^2+9)4\pi}\left((\pi^2+3) + \frac{(3-\pi^2)(3\pi^4+10\pi^2-9)}{\pi^4+10\pi^2+9}\right) \\ &\qquad = \frac{-2}{(\pi^4+10\pi^2+9)\pi} \cdot \frac{-2\pi^2(\pi^4-6\pi^2-39)}{\pi^4+10\pi^2+9} = \boxed{\frac{4\pi(\pi^4-6\pi^2-39)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2}} \end{aligned}$$

Infine, usiamo la terza e la sesta equazione di (4) per ricavare C ed F:

$$\begin{aligned} &(3-\pi^2)C + 4\pi F = \\ &\qquad = -2A - 4B - 2\pi E - 3 \\ &\qquad = -2\frac{3-\pi^2}{\pi^4+10\pi^2+9} - 4\frac{8(3\pi^4+10\pi^2-9)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} - 2\pi\frac{4\pi(\pi^4-6\pi^2-39)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} - 3 \\ &\qquad = -\frac{2(3-\pi^2)(\pi^4+10\pi^2+9) + 32(3\pi^4+10\pi^2-9) + 8\pi^2(\pi^4-6\pi^2-39) + 3(\pi^4+10\pi^2+9)^2}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \\ &\qquad = -\frac{3\pi^8+66\pi^6+388\pi^4+590\pi^2+9}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \\ &-4\pi C + (3-\pi^2)F = \\ &\qquad = 2\pi B - 2D - 4E \\ &\qquad = 2\pi\frac{8(3\pi^4+10\pi^2-9)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} - 2\frac{4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9} - 4\frac{4\pi(\pi^4-6\pi^2-39)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \\ &\qquad = \frac{16\pi(3\pi^4+10\pi^2-9) - 8\pi(\pi^4+10\pi^2+9) - 16\pi(\pi^4-6\pi^2-39)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \\ &\qquad = \frac{8\pi(3\pi^4+22\pi^2+51)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} &C = -\frac{8\pi(3\pi^4+22\pi^2+51)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \cdot \frac{1}{4\pi} + \frac{3-\pi^2}{4\pi}F \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad -\frac{8\pi(3\pi^4+22\pi^2+51)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \cdot \frac{3-\pi^2}{4\pi} + \frac{(3-\pi^2)^2}{4\pi}F + 4\pi F = -\frac{3\pi^8+66\pi^6+388\pi^4+590\pi^2+9}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \\ &\quad \Rightarrow \quad \frac{(3-\pi^2)^2+16\pi^2}{4\pi}F = -\frac{3\pi^8+66\pi^6+388\pi^4+590\pi^2+9}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} + \frac{8\pi(3\pi^4+22\pi^2+51)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2} \cdot \frac{3-\pi^2}{4\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^4+10\pi^2+9}{4\pi}F = -\frac{3\pi^8+66\pi^6+388\pi^4+590\pi^2+9-2(3-\pi^2)(3\pi^4+22\pi^2+51)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2}$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{3\pi^8+72\pi^6+414\pi^4+560\pi^2-297}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2}\cdot\frac{4\pi}{\pi^4+10\pi^2+9}$$

$$= \boxed{-\frac{4\pi(3\pi^8+48\pi^6+294\pi^4+520\pi^2+783)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^3}}$$

$$\Rightarrow \quad C = -\frac{8\pi(3\pi^4+22\pi^2+51)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^2}\cdot\frac{1}{4\pi}-\frac{3-\pi^2}{4\pi}\cdot\frac{4\pi(3\pi^8+48\pi^6+294\pi^4+520\pi^2+783)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^3}$$

$$= -\frac{8\pi(3\pi^4+22\pi^2+51)(\pi^4+10\pi^2+9)+4\pi(3-\pi^2)(3\pi^8+48\pi^6+294\pi^4+520\pi^2+783)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^3 4\pi}$$

$$= -\frac{4\pi(3\pi^{10}+45\pi^8+254\pi^6+234\pi^4+639\pi^2-1431)}{(\pi^4+10\pi^2+9)^3 4\pi}$$

$$= \boxed{\frac{3\pi^{10}+45\pi^8+254\pi^6+234\pi^4+639\pi^2-1431}{(\pi^4+10\pi^2+9)^3}}$$

Alternativamente, si può anche affrontare la soluzione dell'equazione differenziale mediante il metodo di variazione delle costanti, ma il procedimento porta a calcoli molto lunghi.