Prima prova scritta parziale di Istituzioni di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Informatica

17 gennaio 2017

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x+2}{2\,x-1} + \frac{x-1}{3\,x+1} \leq 1$$

2. Sia
$$A = \left\{ n+1-\sqrt{n^2+n+3}, \quad n \in \mathcal{N} \right\}$$
Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$.

3. Sia
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+6\,x+9}, \quad x \neq -3$$
Dire se f è iniettiva e calcolarne l'insieme dei volori.

4. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\,x+1}{3\,x+2} \right)^x, \quad \lim_{x\to0} \frac{\log(\cos\, x)}{\sin(2x)\,\sin(3x)}, \quad \lim_{x\to1} \frac{\sin(\pi\, x)}{x^5+x^4+x^3+x^2-4}.$$

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x+2}{2\,x-1} + \frac{x-1}{3\,x+1} \leq 1$$

Riducendo allo stesso denominatore, si ottiene:

$$\frac{x+2}{2\,x-1} + \frac{x-1}{3\,x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(3\,x+1) + (x-1)(2\,x-1) - (2\,x-1)(3\,x+1)}{(2\,x-1)(3\,x+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5\,x - 4}{(2\,x-1)(3\,x+1)} \geq 0$$

Ora il numeratore si annulla nei punti

$$x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{41}}{2}$$

Siccome $-1 < x_1 < -1/3$, il segno di numeratore e denominatore è dato dalla seguente tabella:

$+\ +\ +$ (x_1) $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ (x_2) $+\ +\ +$ Numeratore

$+\ +\ +$ ($-\frac{1}{3}$) $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ ($\frac{1}{2}$) $+\ +\ +$ Denominatore

Possiamo quindi concludere che l'insieme A dei punti dove vale la diseguaglianza è:

$$A = (-\infty, x_1] \cup (-1/3, 1/2) \cup [x_2, +\infty)$$

2. Sia

$$A = \left\{ n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 3}, \quad n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$. Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme se e solo se

$$n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 3} \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

D'altra parte

$$n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 3} \leq b \Leftrightarrow n + 1 - b \leq \sqrt{n^2 + n + 3}$$

E, se $n + 1 \geq 0$:

$$n + 1 - b \leq \sqrt{n^2 + n + 3} \Leftrightarrow n^2 + 1 + b^2 + 2\,n - 2\,n\,b - 2\,b \leq n^2 + n + 3$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\,b)n \leq 2\,b + 2 - b^2$$

Infine, se $1-2\,b=0$, la diseguaglianza precedente diventa $0\leq 3-1/4$. Siccome questa identità è vera, possiamo concludere che $b=1/2$ è un maggiorante dell'insieme A. D'altra parte, se $b<1/2$ ossia se $1-2\,b>0$, risulta:

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3}\leq b \Leftrightarrow n\leq \frac{2\,b+2-b^2}{1-2\,b}$$

Possiamo quindi concludere che se $b<1/2$ allora b non è maggiormente A, allora $\sup A=1/2$. Osserviamo inoltre che $1/2\notin A$ e quindi A non ha massimo.

D'altra parte $d\in\mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3}\geq d \quad \forall n\in\mathcal{N}$$

Osserviamo che deve essere $d<1/2$, quindi:

$$n+1-\sqrt{n^2+n+3}\geq d\Leftrightarrow n+1-d\geq\sqrt{n^2+n+3}\Leftrightarrow n^2+1+d^2+2\,n-2\,n\,d-2\,d\geq n^2+n+3$$

$$\Leftrightarrow (1-2\,d)n\geq 2\,d+2-d^2\Leftrightarrow n\geq\frac{2\,d+2-d^2}{1-2\,d}$$

Pertanto d è minorante se e solo se

$$1\geq\frac{2\,d+2-d^2}{1-2\,d}\Leftrightarrow 1-2\,d\geq 2\,d+2-d^2\Leftrightarrow d^2-4\,d-1\geq 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado trovato sono

$$d_{1,2}=2\mp\sqrt{5}$$

Possiamo concludere che d è minorante se e solo se $d\leq 2-\sqrt{5}=a_1$, pertanto $\inf A=\min A=2-\sqrt{5}$.

3. Sia

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+6\,x+9},\quad x\neq -3$$

Dire se f è iniettiva e calcolarne l'insieme dei volori. Risulta

$$f(x)=f(y)\Leftrightarrow\frac{x-1}{x^2+6\,x+9}=\frac{y-1}{y^2+6\,y+9}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y^2+6\,y+9)=(y-1)(x^2+6\,y+9)\Leftrightarrow (x-y)(15-x\,y+x+y)=0$$

Possiamo quindi concludere che la funzione f non è iniettiva, infatti se $x\neq y$, ma

$$15-x\,y+x+y=0\quad\text{ossia}\quad y=\frac{x+15}{x-1}$$

risulta $f(x)=f(y)$. In particolare se $x=0$, $y=-15$ e

$$f(0)=-\frac{1}{9},\quad f(-15)=)=\frac{-16}{15^2-6\cdot 15+9}=\frac{-16}{15(15-6)+9})=-\frac{1}{9}$$

Infine risulta

$$f(x)=y\Leftrightarrow x-1=y\,x^2+6\,x\,y+9\,y\Leftrightarrow y\,x^2+(6\,y-1)x+9\,y+1=0$$

Questa ultima equazione, supposto $y \neq 0$ ha soluzioni se e solo se

$$\Delta(y) = (6\,y-1)^2 - 4\,y(9\,y+1) \geq 0 \Leftrightarrow 36\,y^2 - 12\,y + 1 - 36\,1 - 36y^2 - 4\,y = -16\,y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{16}$$

Siccome $f(1) = 0$, possiamo concludere che l'insieme dei valori è $(-\infty, 1/16)$.

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\,x+1}{3\,x+2}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos\,x)}{\sin(2x)\,\sin(3x)}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\,x)}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 4}.$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3\,x+1}{3\,x+2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3\,x+2}\right)^{3\,x+2}\right]^{\frac{x}{3\,x+2}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/3}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos\,x)}{\sin(2x)\,\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + (\cos\,x - 1))}{\cos\,x - 1}\,\frac{\cos\,x - 1}{x^2}\,\frac{2\,x}{\sin(2x)}\,\frac{3\,x}{\sin(3\,x)}\,\frac{1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{12}$$

Infine, per il terzo limite, osserviamo che il denominatore e divisibile per $x - 1$ e risulta $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 4 = (x-1)(x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 4)$. Infatti:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 0\,x - 4 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & -x^5 + x^4 & x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 4 \\ \cline{2-2}
 & 2\,x^4 + x^3 + x^2 + 0\,x - 4 & \\
 & -2\,x^4 + 2\,x^3 & \\ \cline{2-2}
 & 3\,x^3 + x^2 + 0\,x - 4 & \\
 & -3\,x^3 + 3\,x^2 & \\ \cline{2-2}
 & 4\,x^2 + 0\,x - 4 & \\
 & -4\,x^2 + 4\,x - 4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\,x)}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\,x)}{(x-1)(x^4 + 2\,x^3 + 3\,x^2 + 4\,x + 4)} =$$

$$= \frac{1}{14} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\,x)}{x - 1} = \frac{1}{14} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi\,y + \pi)}{y} = -\frac{\pi}{14}$$