ISTITUZIONI DI MATEMATICA

Note del corso tenuto dal Prof. Umberto Massari

Corso di Laurea Triennale in Informatica.
Anno Accademico 2017-2018

1 I NUMERI REALI

L'argomento centrale di questo corso di Istituzioni di Matematica è lo studio delle principali proprietà dei numeri reali e di alcune proprietà elementari delle funzioni reali di variabile reale.

Seguendo la linea dei più recenti libri che trattano questo argomento, anche in questo corso, l'insieme dei numeri reali verrà introdotto in via assiomatica. Verrà supposto cioè che esista un insieme, che indicheremo con la lettera $\mathcal{R}$ e che chiameremo l'insieme dei numeri reali, con tutte le proprietà che verranno elencate con sufficiente precisione e che sono, in fondo, le proprietà dei numeri che già in parte sono note.

La costruzione di $\mathcal{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali, che può essere fatta in diversi modi e che forse qualche studente può aver già visto nella scuola media superiore, è, in ogni caso, lunga e laboriosa e richiederebbe troppo tempo. Pertanto in questo corso non verrà fatta. Noi supporremo quindi che i numeri reali esistano. Quello che faremo ora è fare un elenco abbastanza dettagliato delle loro principali proprietà.

1.1 Le proprietà dei numeri reali

Elencheremo in questo paragrafo le principali proprietà dell'insieme dei numeri reali, suddividendo tale elenco in tre parti:

i) Proprietà delle operazioni,

ii) Proprietà dell'ordinamento,

iii) Proprietà di completezza.

i) - Proprietà delle operazioni

Sono definite in $\mathcal{R}$ due operazioni + (più) e $\cdot$ (per) che hanno le seguenti proprietà:

a) Proprietà commutativa:

$$\forall\ a, b \in \mathcal{R} \quad a + b = b + a\ ;\ a \cdot b = b \cdot a \quad ;$$

b) Proprietà associativa:

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \quad (a+b)+c = a+(b+c)\ ;\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\ \ ;$$

c) Proprietà distributiva :

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c\ ;$$

d) Esistenza degli elementi neutri:
esistono in $\mathcal{R}$ due numeri 0 e 1 tali che

$$a+0 = a\ ,\ a\cdot 1 = a \ \ \forall\ \ a \in \mathcal{R}\ \ ;$$

e) Esistenza dell'opposto e dell'inverso:

$$\forall\, a \in \mathcal{R} \quad \exists\ -a \in \mathcal{R} \ \text{ tale che } \ a+(-a) = 0\ ,$$

$$\forall\, a \in \mathcal{R} \ \ a \neq 0 \ \ \exists\ \frac{1}{a} \in \mathcal{R} \ \text{ tale che } \ a\cdot\frac{1}{a} = 1 \quad .$$

ii) - Proprietà dell'ordinamento

Esiste in $\mathcal{R}$ una relazione di ordine totale che indicheremo con $\leq$ e chiameremo **relazione di minore o uguale** con le seguenti proprietà:

a) Dicotomia:

$$\forall\ \ a, b \in \mathcal{R} \text{ risulta } \ o \ \ a \leq b \ \ o \ \ b \leq a \ \ ;$$

b) Proprietà antisimmetrica:

$$\forall\, a, b \in \mathcal{R} \ \ se \ \ a \leq b \ \ e \ \ b \leq a \quad \Rightarrow \ a = b\ ;$$

c) Proprietà transitiva:

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \ \ se \ \ a \leq b \ \ e \ \ b \leq c \quad \Rightarrow \ a \leq c\ ;$$

d) Legame tra $\leq$ e $+$ (più):

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \ se \ \ a \leq b \quad \Rightarrow \ a+c \leq b+c \quad ;$$

e) Legame tra $\leq$ e $\cdot$ (per):

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \ se \ \ a \leq b \ \ e \ \ 0 \leq c \quad \Rightarrow \ a\cdot c \leq b\cdot c\ .$$

iii) - Proprietà di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathcal{R}$. Diremo che A e B formano una **coppia di insiemi separati** se

$$\forall\, a \in A \ \ e \ \ \forall\, b \in B \ \text{ risulta } \ a \leq b$$

La proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ afferma che se A e B è una coppia di insiemi separati, allora esiste un numero reale c tale che:

$$a \leq c \leq b \ \ \forall\, a \in A \ \ e \ \ \forall\, b \in B \ .$$

Il numero reale c viene chiamato **elemento di separazione** tra A e B.

A parole potremo quindi enunciare la proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ affermando che ogni coppia di insiemi di numeri reali, che siano separati, ammette un elemento di separazione.

Osservazione Nel seguito useremo anche i simboli

$$\geq \ , \ < \ , >$$

che chiameremo rispettivamente **maggiore o uguale, minore e maggiore**, intendendo rispettivamente che $\forall\, a, b \in \mathcal{R}$

$$\begin{array}{l} a \geq b \Leftrightarrow b \leq a, \\ a < b \Leftrightarrow a \leq b \ e \ a \neq b, \\ a > b \Leftrightarrow b < a. \end{array}$$

Dalle proprietà delle operazioni e dell'ordinamento che abbiamo appena ricordato, si possono ricavare tutte le regole del calcolo letterale che verranno usate nella risoluzione degli esercizi. Alcune tra le più importanti sono le seguenti:

a) (**Legge di cancellazione rispetto alla somma e al prodotto**)

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \ se \ a + b = a + c \ \ \Rightarrow b = c \ ;$$

$$\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} \ , \ a \neq 0 \ se \ a \cdot b = a \cdot c \ \ \Rightarrow b = c \ ;$$

b) (**Legge di annullamento del prodotto**)

$$\forall\, a, b \in \mathcal{R} \ se \ a \cdot b = 0 \ \ \Rightarrow o \ \ a = 0 \ o \ \ b = 0 \ ;$$

c) (**Unicità dell'opposto e dell'inverso di un numero reale**)

- L'opposto di un numero reale è unico.
- L'inverso di un numero reale è unico.

d) $\forall\, a, b \in \mathcal{R}$, risulta:

$$(-a) \cdot b = -\, a \cdot b \ ;$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \ ;$$

e) $\forall\, a \in \mathcal{R}$:

$$a > 0 \Leftrightarrow \ -a < 0 \ ;$$

$$a > 0 \Leftrightarrow \ \frac{1}{a} > 0 \ ;$$

f) $\forall\, a \in \mathcal{R} \ , \ a \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \ a^2 > 0$;

g) $\forall \ \ a, b \in \mathcal{R} \ \ \Rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$.

h) (**Regola dei segni**) $\forall\, a, b \in \mathcal{R}$, risulta

$$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \ \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \ \ \text{oppure} \ \ \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} \geq 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases} \ \ \text{oppure} \ \ \begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

1.2 Alcuni esercizi

Applichiamo ora le proprietà dell'ordinamento che abbiamo ricordato sopra per studiare alcune diseguaglianze.

Vogliamo mettere prima in risalto un fatto che può causare errori negli esercizi e cioè che l'implicazione

$$a \leq b \ \Rightarrow \ a \cdot c \leq b \cdot c$$

è vera soltanto se $0 \leq c$ **, mentre se** $a \leq b$ **e** $c \leq 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \geq b \cdot c$ **e non** $a \cdot c \leq b \cdot c$**.**

1. Determinare l'insieme:
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; \frac{x^2+2}{x-1} > x+2 \right\} \tag{1}$$
Risulta
$$\frac{x^2+2}{x-1} > x+2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2-x^2+x-2\,x+2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x-1} > 0$$
Ora l'ultimo quoziente è positivo se e solo se
$$\begin{cases} -x+4 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$
ossia se e solo se
$$\begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x > 4 \\ x < 1 \end{cases}$$
Siccome le ultime due richieste sono incompatibili, risulta:
$$A = (1,4) = \{x \in \mathcal{R}; \ 1 < x < 4 \ \} \ .$$
NOTA BENE Il seguente modo di risolvere questo esercizio <u>è sbagliato</u>.
$$\frac{x^2+2}{x-1} > x+2 \ \Leftrightarrow \ x^2+2 > x^2+2\,x-x-2 \ \Leftrightarrow \ x < 4$$
Nel primo passaggio ho moltiplicato la disuguaglianza da studiare per $x-1$, mantenendo sempre tra i due membri della disuguaglianza stessa il segno di $>$, cosa sbagliata se $x-1 < 0$.

2. Determinare l'insieme:
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; \frac{x}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} \right\} \tag{2}$$
Risulta:
$$\frac{x}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-x-x^2-2\,x-x-2}{(x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-4\,x-2}{(x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\,x+1}{(x+1)(x-1)} < 0$$
Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$- \ - \ - \quad + \ + \ + \ + \ +$	Numeratore
$-\frac{1}{2}$	
$+ \ + \ + \quad - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \quad + \ + \ +$	Denominatore
$-1 \qquad\qquad 1$	

Ne deriva che l'insieme A contiene i punti dove il segno di numeratore e denominatore sono discordi, ossia $A = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$.

3. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R},\ \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \right\} \tag{3}$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \ \Leftrightarrow \ \frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2) - 2\,(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Sviluppando il numeratore, risulta:

$$x^2 - 2\,x + x - 2 + x^2 + 2\,x - x - 2 - 2\,x^2 + 4\,x + 2\,x - 4 = 6\,x - 8$$

Si ottiene pertanto:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \ \Leftrightarrow \ \frac{6\,x - 8}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$$\begin{array}{ccccc} - - - - & + + + + & & & \text{Numeratore} \\ & \frac{4}{3} & & & \\ + + + & - - - - - - - - - - & + + + & & \text{Denominatore} \\ 1 & & 2 & & \end{array}$$

Ne deriva che l'insieme A contiene i punti dove il segno di numeratore e denominatore sono concordi, ossia $A = (1, 4/3) \cup (2, +\infty)$.

4. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}\,,\ \frac{x+3}{x-2} \le \frac{x+1}{x+2} \right\} \tag{4}$$

Risulta:

$$\frac{x+3}{x-2} \le \frac{x+1}{x+2} \Longleftrightarrow \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2\,x + 3\,x + 6 - (x^2 - 2\,x + x - 2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6\,x + 8}{(x-2)(x+2)} \le 0$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$$\begin{array}{ccccc} - - - - & + + + + & & & \text{Numeratore} \\ & -\frac{4}{3} & & & \\ + + + & - - - - - - - - - - & + + + & & \text{Denominatore} \\ -2 & & 2 & & \end{array}$$

Pertanto si ha:

$$A = (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{4}{3}, 2 \right)$$

1.3 Esercizi proposti

Determinare:

1. $$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; \frac{x-3}{x+1} \leq 3 \right\},$$

2. $$B = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; \frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \right\},$$

3. $$C = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; \frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \right\},$$

4. $$D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \; \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \right\} \; ,$$

5. $$E = \left\{ x \in \mathcal{R}; \; \frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \right\}.$$

(La soluzione si trova alla fine del Capitolo)

1.4 Una conseguenza della proprietà di completezza di $\mathcal{R}$: esistenza della radice quadrata di un numero non negativo

Una conseguenza molto importante della proprietà di completazza di $\mathcal{R}$ è l'esistenza della radice quadrata di ogni numero non negativo. Vale infatti il seguente:

Teorema 1.1 $\forall\, a \in \mathcal{R} \;\; a \geq 0 \;\; \exists$ *unico* $b \in \mathcal{R} \;\; b \geq 0$ tale che $b^2 = a$.

(Questo unico $b \geq 0$ verrà indicato col simbolo $\sqrt{a}$ e chiamato la **radice quadrata** di a).

Dimostrazione Supponiamo $a > 0$. Indichiamo con:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; x > 0 \; , \; x^2 \leq a \right\}$$

$$B = \left\{ y \in \mathcal{R} \; ; y > 0 \; , \; a \leq y^2 \right\}$$

Verifichiamo che A e B sono separati. Infatti:

$$\textit{se } x \in A \;\; e \;\; y \in B \Rightarrow \;\; x^2 \leq a \leq y^2 \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \leq y^2 \;\; \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0 \; .$$

Siccome $x + y > 0$, ne deriva che $x - y \leq 0$, ossia $x \leq y$. Esiste allora, per la proprietà di completezza, un numero reale b che separa A e B, cioè tale che:

$$x \leq b \leq y \;\; \forall\, x \in A \;\; e \;\; \forall\, y \in B$$

Verifichiamo che deve essere $b^2 = a$, ragionando per assurdo.
Primo caso. Supponiamo che sia $b^2 < a$. Se indichiamo con ε un numero tra 0 e 1 ($0 < \varepsilon < 1$), abbiamo:

$$(b+\varepsilon)^2 = b^2 + 2\,b\,\varepsilon + \varepsilon^2 < b^2 + 2\,b\,\varepsilon + \varepsilon$$

(Abbiamo usato il fatto che se $\varepsilon \in (0,1)$, allora $\varepsilon^2 < \varepsilon$). Pertanto se $\varepsilon \in (0,1)$ è scelto in modo tale che $b^2 + \varepsilon(2\,b+1) \leq a$, ossia se

$$\varepsilon \leq \frac{a-b^2}{1+2\,b}\ , \tag{5}$$

allora risulta $(b+\varepsilon)^2 < a$ (da notare che, siccome stiamo supponendo $b^2 < a$, il quoziente a secondo membro della (5) è positivo).
Ne deriva quindi che il numero $x = b+\varepsilon \in A$, infatti $b+\varepsilon > 0$ e $(b+\varepsilon)^2 < a$. Inoltre risulta $x = b+\varepsilon > b$ e questo contrasta col fatto che b è elemento di separazione tra A e B, in particolare col fatto che deve essere $x \leq b\ \forall\ x \in A$.
Secondo caso. Supponiamo che sia $b^2 > a$. Indicando in questo caso con ε un numero tra 0 e b, si avrebbe $b - \varepsilon > 0$ e

$$(b-\varepsilon)^2 = b^2 - 2\,b\,\varepsilon + \varepsilon^2 > b^2 - 2\,b\,\varepsilon$$

Pertanto se ε è scelto in modo che $b^2 - 2\,b\,\varepsilon \geq a$, ossia se

$$\varepsilon \leq \frac{b^2-a}{2\,b}\ , \tag{6}$$

risulta $(b-\varepsilon)^2 > a$ (da notare che anche in questo caso, il secondo membro della (6) è positivo).
Pertanto il numero $y = b-\varepsilon \in B$ e $y = b-\varepsilon < b$, contro il fatto che b è elemento di separazione tra A e B, in particolare col fatto che deve essere $b \leq y\ \forall\ y \in B$.
Deve quindi essere $b^2 = a$.
Verificare infine, per esercizio, che il numero $b \geq 0$ con la proprietá ora trovata ($b^2 = a$) è unico.

Concludiamo questa parte sui numeri reali, ricordando le diseguaglianze di secondo grado.

Diseguaglianze di secondo grado Determinare:

$$A = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ a\,x^2 + b\,x + c > 0\}$$

dove $a, b, c \in \mathcal{R}$ sono numeri fissati con $a > 0$.
Se indichiamo con

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c\ ,$$

allora:

i) se $\Delta > 0$, posto:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}\ ,$$

risulta $A = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;

ii) se $\Delta = 0$, allora posto

$$x_1 = \frac{-b}{2\,a}$$

si ottiene $A = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x \neq x_1\}$,

iii) se infine $\Delta < 0$, si ottiene $A = \mathcal{R}$.

Infatti, completando il quadrato, si ottiene:

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\,a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right]$$

Si ottiene quindi il risultato sopra enunciato.

1.5 Alcuni altri esercizi

1. Determinare:

$$A = \left\{x \in \mathcal{R}\ ;\ \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1\right\}$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3) - (x+2)^2 - (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

Sviluppando il numeratore, ottengo:

$$x^2 - 3\,x + x - 3 - x^2 - 4\,x - 4 - x^2 + 3\,x - 2\,x + 6 = -x^2 - 5\,x - 1$$

e quindi:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5\,x + 1}{(x+2)(x-3)} \leq 0$$

Ora il numeratore si annulla nei due punti

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

Osservando infine che

$$x_1 < -2 < x_2 < 0$$

il segno di numeratore e denominatore è dato da:

$$\begin{array}{l l}
\underline{+\ +\ +\quad -\ -\ -\ -\quad +\ +\ +\ +\qquad\qquad} & \text{Numeratore} \\
\qquad x_1 \qquad\qquad x_2 & \\
\underline{+\ +\ +\quad -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ +\ +\ +\quad} & \text{Denominatore} \\
\qquad -2 \qquad\qquad\qquad\qquad 3 &
\end{array}$$

Possiamo quindi concludere che

$$A = [x_1, -2) \cup [x_2, 3)$$

2. Determinare
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R};\ 2\,x + 1 \le \sqrt{x^2 + x + 4} \right\}$$
Osserviamo in primo luogo che $x^2 + x + 4 > 0\ \ \forall\, x \in \mathcal{R}$ e che se $2\,x+1 < 0$, ossia se $x < -\frac{1}{2}$, la diseguaglianza è verificata. Pertanto
$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \subset A\ .$$
D'altra parte se $2\,x+1 \ge 0$, ossia se $x \ge -\frac{1}{2}$, si ha
$$2\,x + 1 \le \sqrt{x^2 + x + 4} \Leftrightarrow 4\,x^2 + 4\,x + 1 \le x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\,x^2 + 3\,x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \le 0$$
Ora l'ultima diseguaglianza è verificata se
$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ .$$
Tenendo conto che sto supponendo che $x \ge -\frac{1}{2}$, possiamo concludere che
$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\ .$$

3. Determinare
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}\ ;\ 1 - 2\,x \le \sqrt{x - x^2 + 2} \right\}$$
Osserviamo in primo luogo che deve essere $x - x^2 + 2 \ge 0$ ossia $x^2 - x - 2 \le 0$. Pertanto deve essere $x \in [-1, 2]$. Osserviamo ora che, se $1 - 2\,x < 0$ ossia se $x > \frac{1}{2}$, la diseguaglianza è verificata e quindi
$$\left(\frac{1}{2}, 2\right] \subset A\ .$$
D'altra parte se $1 - 2\,x \ge 0$ ossia se $x \le \frac{1}{2}$, si ha
$$1 - 2\,x \le \sqrt{x - x^2 + 2} \Leftrightarrow 1 - 4\,x + 4\,x^2 \le x - x^2 + 2 \Leftrightarrow 5\,x^2 - 5\,x - 1 \le 0$$
Ora l'ultima diseguaglianza è verificata se
$$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \le x \le \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\ .$$
Notando infine che
$$\frac{5+3\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}\quad e\quad \frac{5-3\sqrt{5}}{10} > -1\ ,$$
possiamo concludere che
$$A = \left[\frac{5-3\sqrt{5}}{10}, 2\right]\ .$$

4. Determinare
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \; ; \sqrt{x^2 - x - 2} \le \frac{x-1}{2} \right\}$$
Osserviamo in primo luogo che deve essere $x^2 - x - 2 \ge 0$ ossia $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. Osserviamo infine che deve essere anche $x \ge 1$. Infatti, in caso contrario la diseguaglianza non è verificata. Con queste limitazioni risulta:
$$\sqrt{x^2 - x - 2} \le \frac{x-1}{2} \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 \le \frac{x^2 - 2\,x + 1}{4} \Longleftrightarrow 3\,x^2 - 2\,x - 9 \le 0$$
Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono:
$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{28}}{3} \quad e \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{28}}{3}$$
Siccome $x_2 > 2$, possiamo concludere che $A = [2, x_2]$.

5. Sia λ un parametro reale, indichiamo con
$$A_\lambda = \left\{ x \in \mathcal{R}; \; x^2 - 2\,x + \lambda > 0 \right\}$$
Determinare A_λ al variare di $\lambda \in \mathcal{R}$.
Risulta $\Delta(\lambda) = 4 - 4\,\lambda$ e quindi se $\lambda > 1$, $\Delta(\lambda) < 0$, ne deriva allora che $A_\lambda = \mathcal{R}$. D'altra parte se $\lambda = 1$, la disuguaglianza diventa
$$x^2 - 2\,x + 1 = (x-1)^2 > 0$$
e quindi $A_1 = \{x \in \mathcal{R} \, , \; x \ne 1\}$. Infine se $\lambda < 1$, $\Delta(\lambda) > 0$ e quindi posto
$$x_1(\lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda} \quad , \quad x_2(\lambda) = 1 + \sqrt{1 - \lambda}$$
risulta
$$A_\lambda = (-\infty, x_1(\lambda)) \cup (x_2(\lambda), +\infty) \; .$$

6. Per quali valori di $b \in \mathcal{R}$, l'equazione (nella incognita x):
$$\frac{x+1}{x^2 + x + 1} = b$$
ammette almeno una soluzione ?
Ricordando che $x^2 + x + 1 > 0 \; \forall \; x \in \mathcal{R}$, risulta
$$\frac{x+1}{x^2 + x + 1} = b \Leftrightarrow b\,x^2 + (b-1)\,x + b - 1 = 0$$
Ora, se $b = 0$, l'equazione ottenuta non è di secondo grado, ma di primo e diventa: $-x-1 = 0$, che ha l'unica soluzione $x = -1$. Se $b \ne 0$, l'equazione ha soluzioni se e solo se
$$\Delta(b) = (b-1)^2 - 4\,b\,(b-1) \ge 0$$
ossia $(b-1)(b-1-4\,b) = (b-1)(-3\,b-1) \ge 0$. In conclusione
$$\Delta(b) \ge 0 \Leftrightarrow b \in \left[-\frac{1}{3}, 1 \right]$$
L'equazione iniziale quindi ha almeno una soluzione se e solo se $b \in [-\frac{1}{3}, 1]$.

7. Determinare:

$$A = \{x \in \mathcal{R};\ x^3 - 4\,x + 3 > 0\}$$

Osserviamo che, posto

$$p(x) = x^3 - 4\,x + 3$$

risulta $p(1) = 0$. Pertanto il polinomio di terzo grado $p(x)$, per il Teorema di Ruffini, è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione, risulta:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3 + 0\,x^2 - 4\,x + 3 & x - 1 \\ \cline{3-3}
 & -x^3 + \quad x^2 \qquad\qquad & x^2 + x - 3 \\ \cline{2-2}
 & x^2 - 4\,x + 3 & \\
 & -x^2 + x \qquad & \\ \cline{2-2}
 & -3\,x + 3 & \\
 & 3\,x - 3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Possiamo quindi concludere che

$$x^3 - 4\,x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3)$$

Studiando il segno dei due fattori, si ottiene:

$$\begin{array}{ll}
\underset{\qquad\qquad\quad 1}{\underline{\qquad - - - - \quad + + + + \qquad\qquad}} & \text{Primo fattore} \\
+ + + \underset{x_1 \qquad\qquad\qquad x_2}{\underline{\ - - - - - \quad + + +\ }} & \text{Secondo fattore}
\end{array}$$

dove

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\ .$$

(Da notare che $x_2 > 1$. Infatti

$$x_2 > 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} > 3 \Leftrightarrow 13 > 9\ )\ .$$

Possiamo quindi concludere che

$$A = \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right)\ .$$

1.6 Esercizi proposti

Determinare i seguenti insiemi:

1. $$A = \left\{x \in \mathcal{R};\ \frac{x+1}{x-2} \le \frac{2\,x - 3}{x+2}\right\},$$

2.

$$B = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x - 1 \right\},$$

3.

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \frac{x^2 + x + 1}{x - 3} \geq 2\,x + 1 \right\},$$

4.

$$D = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \right\}$$

(La soluzione si trova alla fine del Capitolo).

1.7 Particolari sottoinsiemi di $\mathcal{R}$

L'insieme dei numeri reali contiene come sottoinsiemi alcuni altri insiemi numerici che useremo spesso nel seguito e che quindi vogliamo mettere in risalto.

L'insieme $\mathcal{N}$ dei **numeri naturali**:

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}\ .$$

L'insieme $\mathcal{Z}$ dei **numeri interi relativi**:

$$\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}\ .$$

L'insieme $\mathcal{Q}$ dei **numeri razionali**:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathcal{Z}\ ,\ q \in \mathcal{N} \right\}\ .$$

Ricordiamo brevemente che ogni numero razionale si può rappresentare in infiniti modi come una frazione, infatti se $p\,q' = p'\,q \quad p, p' \in \mathcal{Z}\ ,\ q, q' \in \mathcal{N}$ si ha

$$r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

È possibile inoltre rappresentare un numero razionale r come frazione $\frac{p}{q}$ con p e q numeri primi tra loro, ossia privi di fattori comuni (oltre 1).
È evidente che risulta

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$$

e che l'inclusione è stretta.

Verifichiamo per esempio che $\mathcal{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{R}$ provando che $\sqrt{2} \notin \mathcal{Q}$.
Supponiamo infatti, ragionando per assurdo, che esista un numero razionale r con $r^2 = 2$. Possiamo rappresentare r come $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathcal{N}$ e p e q primi tra loro. Risulta dunque:

$$r^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2\,q^2$$

Ne deriva quindi che p^2 è un numero pari, ma allora anche p è un numero pari, ossia $p = 2\,p'$. Otteniamo allora

$$p^2 = 4\,p'^2 = 2\,q^2 \Rightarrow q^2 = 2\,p'^2$$

Se ne conclude che q^2 è pari e quindi che anche q è pari. Ma se p e q sono entrambi pari non sono primi tra loro come avevamo supposto all'inizio e questo porta ad una contraddizione .

Esercizio
Verificare che l'insieme $\mathcal{Q}$ dei numeri razionali non ha la proprietà di completezza. In particolare verificare che i due sottoinsiemi di $\mathcal{Q}$:

$$A = \{r \in \mathcal{Q};\ r > 0\ ,\ r^2 \leq 2\}$$

$$B = \{s \in \mathcal{Q};\ s > 0\ ,\ s^2 \geq 2\}$$

sono separati, ma non esiste in $\mathcal{Q}$ nessun elemento di separazione.
(Suggerimento. Verificare che se esistesse tale elemento di separazione $c \in \mathcal{Q}$ dovrebbe essere $c^2 = 2$)

1.8 Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Fondamentale in tutto il corso di Istituzioni di Matematica saranno i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme. Cominciamo col dare alcune definizioni preliminari.

Diremo che $m \in \mathcal{R}$ è il **massimo** di un insieme A se

$$m \in A \quad e \quad a \leq m \quad \forall\, a \in A\ .$$

Diremo similmente che $m' \in \mathcal{R}$ è il **minimo** di un insieme A se

$$m' \in A \quad e \quad m' \leq a \quad \forall\, a \in A\ .$$

Useremo rispettivamente le notazioni

$$\max A \quad e \quad \min A$$

per indicare il massimo e il minimo elemento di A, quando questi numeri esistono.
Da notare il fatto, come vedremo con semplici esempi, che un insieme A può non avere massimo o minimo o nè massimo e nè minimo. Ad esempio:

i) se $A = (0, 1) = \{x \in \mathcal{R}\ ; 0 < x < 1\}$, A non ha nè massimo nè minimo;

ii) se

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1}\ ;\ n \in \mathcal{N} \right\}$$

allora $m = \frac{1}{2}$ è il minimo di A, mentre A non ha massimo (verificare queste affermazioni per esercizio);

iii) infine se $A = [-1, 1] = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ -1 \leq x \leq 1\}$, allora A ha massimo e minimo e $-1 = \min A$, $1 = \max A$.

Diremo che un numero $b \in \mathcal{R}$ è un **maggiorante** di A se

$$a \leq b \;\; \forall\, a \in A \; .$$

Analogamente diremo che un numero $d \in \mathcal{R}$ è un **minorante** di A se

$$d \leq a \;\; \forall\, a \in A \; .$$

Se esiste almeno un maggiorante di A, diremo che A è **superiormente limitato**, mentre se esiste almeno un minorante di A, diremo che A è **inferiormente limitato**.

NOTA BENE È interessante notare che, se le proprietà ora definite vengono espresse mediante i quantificatori matematici $\forall$ ed $\exists$, allora la negazione di tali proprietà si può esprimere scambiando formalmente i due quatificatori. Infatti

- A è superiormente limitato se $\exists\, b \in \mathcal{R}$ tale che $\forall\, a \in A \;\; a \leq b$.
- A non è superiormente limitato se $\forall\, b \in \mathcal{R} \quad \exists\, a \in A$ con $a > b$.

Analogamente

- $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se $\forall\, a \in A \;\; a \leq b$.
- $b \in \mathcal{R}$ non è un maggiorante di A se $\exists\, a \in A$ con $a > b$.

Alcuni esempi

1. Verificare che l'insieme
$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+x+3} \;\; ; \;\; x \in \mathcal{R} \right\}$$
è superiormente limitato .
Osserviamo che dalla definizione si ha che l'insieme A è superiormente limitato se $\exists\, b \in \mathcal{R}$ tale che
$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leq b \;\; \forall x \in \mathcal{R}$$
Osserviamo preliminarmente che, siccome per $x = 0$ la frazione considerata assume il valore $1/3$, se un b con le proprietà richieste esiste deve essere $b \geq 1/3$. Risulta, essendo $x^2+x+3 > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{R}$:
$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leq b \Leftrightarrow x+1 \leq b\,x^2 + b\,x + 3\,b \Leftrightarrow b\,x^2 + (b-1)\,x + 3\,b - 1 \geq 0$$
Pertanto la diseguaglianza di partenza è vera $\forall\, x \in \mathcal{R}$ se e solo se $\Delta(b) = (b-1)^2 - 4\,b\,(3\,b-1) \leq 0$. Ossia se e solo se $11\,b^2 - 2\,b - 1 \geq 0$ e questo vele se e solo se
$$b \geq b_2 = \frac{1 + 2\,\sqrt{3}}{11}$$
Allora b è maggiorante l'insieme A se e solo se $b \geq b_2$.

2. Verificare che l'insieme

$$B = \left\{ 2\sqrt{x^2+x} - x \ ; \ x \in \mathcal{R}, \ x \geq 0 \right\}$$

non è superiormente limitato.
Sia $b \in \mathcal{R}$ un numero positivo, allora

$$2\sqrt{x^2+x} - x > b \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x} > x + b$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+x) > x^2 + 2\,x\,b + b^2 \Leftrightarrow 3\,x^2 + 2(2-b)\,x - b^2 > 0$$

Il delta dell'ultimo polinomio di secondo grado è dato da :

$$\Delta(b) = 4(2-b)^2 + 12\,b^2 > 0$$

Pertanto, qualunque sia $b > 0$, la diseguaglianza

$$2\sqrt{x^2+x} - x > b$$

è verificata $\forall\ x \in \mathcal{R}$ con

$$x > \frac{-2(2-b) + \sqrt{\Delta(b)}}{6}$$

Ne deriva quindi che B non è superiormente limitato .
Da notare che un modo, forse più semplice, per ottenere lo stesso risultato poteva essere quello di notare che:

$$2\sqrt{x^2+x} - x \geq 2\sqrt{x^2} - x = x \ \forall\, x \geq 0 \ .$$

3. Dire se l'insieme:

$$C = \left\{ \frac{x}{x-1} \ ; \ x \in \mathcal{R} \ \ x \neq 1 \right\}$$

è limitato inferiormente.
Proviamo a verificare che C non è limitato inferiormente, ossia proviamo a verificare che $\forall\, d \in \mathcal{R}$ la diseguaglianza

$$\frac{x}{x-1} < d$$

ha almeno una soluzione. Possiamo supporre che sia $d < 0$, allora risulta:

$$\frac{x}{x-1} < d \Leftrightarrow \frac{x - d\,x + d}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-d)x + d}{x-1} < 0$$

Osserviamo ora che il numeratore si annulla in

$$\frac{-d}{1-d} = \frac{1-d-1}{1-d} = 1 - \frac{1}{1-d} < 1$$

Pertanto se $d < 0$, la disuguaglianza

$$\frac{x}{x-1} < d \ \text{ è verificata } \forall\, x \in \left(\frac{-d}{1-d}, 1 \right) \ .$$

Pertanto C non è inferiormente limitato.

4. Dire se l'insieme:
$$D = \left\{ \frac{x-2}{x^2-2\,x+3} \;;\; x \in \mathcal{R} \right\}$$
è limitato superiormente.
Proviamo a verificare che D non è limitato superiormente, ossia proviamo a verificare che $\forall\, b \in \mathcal{R}$ la diseguaglianza
$$\frac{x-2}{x^2-2\,x+3} > b$$
ha almeno una soluzione. Possiamo supporre che sia $b > 0$. Risulta:
$$\frac{x-2}{x^2-2\,x+3} > b \Leftrightarrow b\,x^2 - 2\,b\,x + 3\,b - x + 2 = b\,x^2 - (2\,b+1)x + 3\,b + 2 < 0$$
Ora questa ultima disequazione ha almeno una soluzione se e solo se
$$\Delta(b) = (2\,b+1)^2 - 4\,b(3\,b+2) = 4\,b^2 + 4\,b + 1 - 12\,b^2 - 8\,b = -(8\,b^2 + 4\,b - 1) > 0$$
Ora il polinomio di secondo grado trovato ha come radici:
$$b_1 = \frac{-2-\sqrt{4+8}}{8} = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \quad e \quad b_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$$
e quindi $\Delta(b) > 0$ se e solo se
$$b \in \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \right)$$
Ne deriva, in particolare, che se $b > \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$, la diseguaglianza
$$\frac{x-2}{x^2-2\,x+3} > b$$
non ha soluzioni e quindi
$$\frac{x-2}{x^2-2\,x+3} \leq b \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$
e quindi b è un maggiorante di D e D è superiormente limitato.

5. Verificare che l'insieme
$$E = \left\{ \sqrt{x^2+x} - x \;;\; x \in \mathcal{R},\; x \geq 0 \right\}$$
è superiormente limitato.
Sia $b \in \mathcal{R}$ un numero positivo, allora
$$\sqrt{x^2+x} - x \leq b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} \leq x + b$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x \leq x^2 + 2\,x\,b + b^2 \Leftrightarrow (1-2\,b)\,x \leq b^2$$
Siccome per $b = 1/2$ la diseguaglianza si riduce all'identità $0 \leq 1/4$, si ottiene che $b = 1/2$ è un maggiorante dell'insieme E. Si può vedere anche facilmente (farlo per esercizio) che $1/2$ è il più piccolo dei maggioranti.

Vale il seguente

Teorema 1.2 Se $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora l'insieme B dei maggioranti di A ha un elemento minimo.
Tale elemento minimo verrà indicato col simbolo $\sup A$ e chiamato l'**estremo superiore** di A.

Dimostrazione La coppia di insiemi A e B è separata, infatti se $a \in A$ e $b \in B$ si ha che $a \leq b$ (essendo b un maggiorante di A). Allora per la proprietà di completezza di $\mathcal{R}$, esiste $c \in \mathcal{R}$ tale che

i) $a \leq c \;\; \forall\, a \in A$,

ii) $c \leq b \;\; \forall\, b \in B$.

La i) dice che c è un maggiorante di A e quindi $c \in B$, la ii) dice che $c = \min B$.

L'estremo superiore è caratterizzato dalle seguenti proprietà.

Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore

Sia $c \in \mathcal{R}$, allora $c = \sup A$ se e solo se:

i) $a \leq c \;\; \forall\, a \in A$;

ii) $\forall\, \lambda \in \mathcal{R}$ con $\lambda < c$, $\exists\, a \in A$ con $a > \lambda$.

Consideriamo ora qualche esempio .

1. Sia
$$A = \left\{ \frac{2\,n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \;\; ; \;\; n \in \mathcal{N} \right\}$$
Verificare che $\sup A = 2$.
i) La prima verifica da fare è vedere se
$$\frac{2\,n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \leq 2 \;\; \forall\, n \in \mathcal{N} \; .$$
Risulta
$$\frac{2\,n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 2\,n^2 - n + 1 \leq 2\,n^2 + 2 \Leftrightarrow n \geq -1$$
Pertanto la diseguaglianza considerata vale $\forall\, n \in \mathcal{N}$.
ii) Si tratta di verificare che, se $\lambda \in \mathcal{R}$ è tale che $\lambda < 2$, allora la diseguaglianza (nella variabile $n \in \mathcal{N}$)
$$\frac{2\,n^2 - n + 1}{n^2 + 1} > \lambda$$
ammette almeno una soluzione. Risulta
$$\frac{2\,n^2 - n + 1}{n^2 + 1} > \lambda \Leftrightarrow 2\,n^2 - n + 1 > \lambda\, n^2 + \lambda \Leftrightarrow (2 - \lambda)\, n^2 - n + 1 - \lambda > 0$$
Ora il delta dell'ultimo polinomio di secondo grado è dato da
$$\Delta(\lambda) = 1 - 4\,(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 1 - 8 + 4\,\lambda + 8\,\lambda - 4\,\lambda^2 = -(4\,\lambda^2 - 12\,\lambda + 7)$$

Osserviamo ora che il polinomio di secondo grado trovato ammette le due radici:

$$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

e che

$$\lambda_1 < 2 < \lambda_2$$

Possiamo quindi concludere che se $\lambda < \lambda_1$ allora $\Delta(\lambda) < 0$ e la diseguaglianza di partenza è vera $\forall\ n \in \mathcal{N}$, invece se $\lambda_1 \le \lambda < 2$ la diseguaglianza di partenza è vera $\forall\ n \in \mathcal{N}$ con

$$n > \frac{1+\sqrt{\Delta(\lambda)}}{2\,(2-\lambda)}$$

In ogni caso la diseguaglianza iniziale ammette almeno una soluzione e quindi $2 = \sup\ A$.

2. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+1}\ ;\ x \in \mathcal{R} \right\}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare $\sup\ A$.
Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se

$$\frac{x+1}{x^2+1} \le b \quad \forall\ x \in \mathcal{R}$$

Studiamo ora questa diseguaglianza osservando che possiamo supporre $b > 0$ (in effetti se poniamo $x = 0$, otteniamo che deve essere $1 \le b$). Ora

$$\frac{x+1}{x^2+1} \le b \Leftrightarrow b\,x^2 - x + b - 1 \ge 0$$

Ricordiamo ora che l'ultima diseguaglianza è vera $\forall\ x \in \mathcal{R}$ se e solo se

$$\Delta(b) = 1 - 4\,b(b-1) \le 0 \quad ossia \quad 4\,b^2 - 4\,b - 1 \ge 0$$

Pertanto deve essere

$$b \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Ricordando che $b \ge 1$, si ricava che b è un maggiorante di A se e solo se

$$b \in \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Allora, ricordando che $\sup\ A$ è il più piccolo dei maggioranti di A, si ha

$$\sup\ A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Verifichiamo per concludere che $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ è anche il massimo di A, facendo vedere che $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \in A$, ossia che l'equazione

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

ammette almeno una soluzione. Infatti risulta

$$\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(x+1)=(1+\sqrt{2})(x^2+1) \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})\,x^2-2\,x+\sqrt{2}-1=0$$

Infine, essendo

$$\frac{\Delta}{4}=1-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0\ ,$$

otteniamo che l'equazione considerata ammette l'unica soluzione

$$x=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

In maniera simile alla dimostrazione dell'esistenza dell'estremo superiore, si può dimostrare che se $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme inferiormente limitato, allora l'insieme dei minoranti di A ha un massimo. Il massimo dei minoranti di A verrà indicato con $\inf\, A$ e chiamato l'**estremo inferiore** di A. L'estremo inferiore è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore

Sia $d \in \mathcal{R}$, allora $d = \inf\, A$ se e solo se:

- i) $d \leq a \quad \forall\, a \in A$;
- ii) $\forall\, \eta \in \mathcal{R}$ con $d < \eta$, $\exists\, a \in A$ con $a < \eta$.

1.9 Alcuni esercizi sull'estremo superiore e sull'estremo inferiore

1. Sia

$$A=\left\{\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}}\ ;\ n \in \mathcal{N}\right\}\ .$$

Verificare che $\inf\, A = 1$ e dire se $1 = \min\, A$.
Risulta

$$\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} \geq 1 \Leftrightarrow n^2+10\,n+25 \geq n^2+n \Leftrightarrow 9\,n+25 \geq 0$$

Pertanto il numero 1 verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. D'altra parte se $\eta > 1$, ottengo

$$\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} < \eta \Leftrightarrow n^2+10\,n+25 < \eta^2(n^2+n) \Leftrightarrow (\eta^2-1)\,n^2+(\eta^2-10)\,n-25>0$$

Siccome il coefficiente di n^2: (η^2-1) è positivo e $\Delta(\eta)=\left(\eta^2-10\right)^2+100\,(\eta^2-1)>0$, ottengo che la diseguaglianza ottenuta è verificata se

$$n > \frac{-(\eta^2-10)+\sqrt{\Delta(\eta)}}{\eta^2-1}$$

Pertanto 1 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. Osserviamo infine che $1 \notin A$ e quindi A non ha minimo.

2. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x-1} \ ; \ x \in \mathcal{R} \ , \ x > 1 \right\}$$

Verificare che A non è superiormente limitato, che è inferiormente limitato e $\inf A = 1$.
Si tratta di provare che $\forall \ b \in \mathcal{R}$, la diseguaglianza

$$\frac{x+1}{x-1} > b$$

ha sempre almeno una soluzione $x > 1$. Essendo

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \ \ \forall \ x \in \mathcal{R} \ \ x > 1 \ ,$$

possiamo supporre che sia $b > 1$ (altrimenti, se fosse $b \leq 1$, avrei

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \geq b \ \ \forall \ x > 1 \ )$$

Ottengo quindi

$$\frac{x+1}{x-1} > b \Leftrightarrow \frac{x+1-b\,x+b}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \ (\text{essendo} \ \ x > 1 \ ) \ \ (b-1)\,x < 1+b$$

$$\Leftrightarrow \ (\text{essendo } b > 1 \ ) \ \ x < \frac{1+b}{b-1}$$

Notiamo infine che

$$\frac{1+b}{b-1} = \frac{2+b-1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1} > 1$$

Possiamo concludere quindi che se $1 < x < 1 + \frac{2}{b-1}$, la diseguaglianza

$$\frac{x+1}{x-1} > b$$

è verificata. Infine per verificare che $\inf A = 1$, avendo già notato che 1 verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore, basta pravare che verifica anche la seconda. Sia dunque $\eta \in \mathcal{R}$ con $\eta > 1$, risulta allora, se $x > 1$:

$$\frac{x+1}{x-1} < \eta \Leftrightarrow x+1 < \eta\,(x-1) \Leftrightarrow (\eta-1)\,x > \eta+1 \Leftrightarrow x > \frac{\eta+1}{\eta-1}$$

E quindi 1 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore.

3. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2+n} - n \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$.
Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se

$$\sqrt{n^2+n} - n \leq b \ \ , \ \ \forall \ n \in \mathcal{N}$$

Essendo la differenza $\sqrt{n^2+n}-n$ sempre positiva, posso supporre $b>0$. Pertanto:

$$\sqrt{n^2+n}-n \le b \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \le n+b \Leftrightarrow n^2+n \le n^2+2\,b\,n+b^2 \Leftrightarrow (1-2\,b)\,n \le b^2$$

Siccome si richiede che la diseguaglianza sia verificata $\forall\ n \in \mathcal{N}$, deve essere $1-2\,b \le 0$ ossia $b \ge 1/2$. Se ne conclude che $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante di A se e solo se $b \ge 1/2$. Pertanto $\sup A = 1/2$. Da notare che $1/2 \notin A$ in quanto l'equazione in $n \in \mathcal{N}$:

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{1}{2}$$

non ha soluzioni.
Per quanto riguarda l'estremo inferiore dell'insieme A, possiamo osservare che $d \in \mathcal{R}$ è minorante dell'insieme A se e solo se

$$\sqrt{n^2+n}-n \ge d \quad , \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Supponendo anche in questo caso $d>0$, ottengo:

$$\sqrt{n^2+n}-n \ge d \Leftrightarrow n^2+n \ge n^2+2\,d\,n+d^2 \Leftrightarrow (1-2\,d)\,n \ge d^2$$

Deve essere allora

$$1-2\,d>0 \quad e \quad n \ge \frac{d^2}{1-2\,d}$$

Siccome si richiede che la diseguaglianza sia verificata $\forall\ n \in \mathcal{N}$, deve essere

$$d<\frac{1}{2} \quad e \quad 1 \ge \frac{d^2}{1-2\,d}$$

Risolvendo l'ultima diseguaglianza si ha:

$$1 \ge \frac{d^2}{1-2\,d} \Leftrightarrow d^2+2\,d-1 \le 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado trovato sono $d_1=-1-\sqrt{2}$ e $d_2=-1+\sqrt{2}$. Risulta pertanto che $d \in \mathcal{R}$ è un minorante se e solo se $d \le \sqrt{2}-1$ e quindi $\inf A = \sqrt{2}-1$. Da notare infine che $\sqrt{2}-1 \in A$ in quanto è il valore che si ottiene dall'espressione $\sqrt{n^2+n}-n$ per $n=1$. Possiamo quindi concludere che $\sqrt{2}-1 = \min A$.

4. Dire se l'insieme:

$$A=\left\{\sqrt{n^2+7\,n}-n\ ,\ n \in \mathcal{N}\right\}$$

é limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

Tenendo conto che gli elementi di A sono positivi, un numero $b>0$ è un maggiorante se e solo se

$$\sqrt{n^2+7\,n}-n \le b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ora

$$\sqrt{n^2+7\,n}-n \le b \Leftrightarrow \sqrt{n^2+7\,n} \le n+b \Leftrightarrow n^2+7\,n \le n^2+2\,b\,n+b^2 \Leftrightarrow (7-2\,b)\,n \le b^2$$

Ora se $7-2\,b=0$, ossia se $b=7/2$, la disuguaglianza diventa $0\le 49/4$ e quindi $b=7/2$ è un maggiorante. Infine se $b<7/2$, allora $7-2\,b>0$ e quindi la disuguaglianza di partenza è verificata se e solo se

$$n\le\frac{b^2}{7-2\,b}$$

e quindi non è verificata per ogni $n\in\mathcal{N}$. Pertanto $\sup A=7/2$. Osserviamo infine che $7/2\notin A$, infatti

$$\sqrt{n^2+7\,n}-n=\frac{7}{2}\Leftrightarrow n^2+7\,n=n^2+7\,n+\frac{49}{4}\Leftrightarrow 0=\frac{49}{4}$$

Pertanto l'insieme A non ha massimo.

5. Sia

$$A=\left\{\frac{x^2+x-1}{x^2-2\,x+1},\ x\in\mathcal{R},\ x\neq 1\right\}$$

Calcolare sup A e inf A.
Verifichiamo che sup $A=+\infty$, ossia che l'insieme A non è superiormente limitato. Infatti sia $b\in\mathcal{R}$ un numero con $b>1$, allora:

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-2\,x+1}>b\Leftrightarrow x^2+x-1>b\,x^2-2\,b\,x+b\Leftrightarrow(b-1)\,x^2-(2\,b+1)\,x+b+1<0$$

Siccome $\Delta(b)=(2\,b+1)^2-4\,(b-1)(b+1)=4\,b^2+4\,b+1-4\,b^2+4=4\,b+5>0$ risulta che la diseguaglianza considerata è verificata se

$$x\in\left(\frac{2\,b+1-\sqrt{\Delta(b)}}{2\,(b-1)},\frac{2\,b+1+\sqrt{\Delta(b)}}{2\,(b-1)}\right)$$

D'altra parte $d\in\mathcal{R},\ d<0$ è un minorante l'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-2\,x+1}\ge d\quad\forall\,x\in\mathcal{R},\ x\neq 1$$

Risulta

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-2\,x+1}\ge d\Leftrightarrow x^2+x-1\ge d\,x^2-2\,d\,x+d\Leftrightarrow(1-d)\,x^2+(1+2\,d)\,x-(1+d)\ge 0$$

Siccome $\Delta(d)=(1+2\,d)^2-4\,(1+d)(1-d)=5+4\,d$, la diseguaglianza considerata vale per ogni $x\neq 1$ se e solo se $\Delta(d)\le 0$ ossia se e solo se $d\le -5/4$. Possiamo quindi concludere che

$$\inf\,A=-\frac{5}{4}$$

Da notare che $-5/4$ è anche il minimo elemento dell'insieme A.

6. Sia

$$A=\{\sqrt{x^2+x+2}-x-1,\ x\in\mathcal{R}\}$$

Verificare che inf $A=-1/2$. Verifichiamo che $-1/2$ verifica le proprietá caratteristiche dell'estremo inferiore, ossia che:

a)

$$\sqrt{x^2+x+2}-x-1 \geq -\frac{1}{2}\ \forall x \in \mathcal{R}$$

b) $\forall \eta \in \mathcal{R},\ \eta > -1/2,\ \exists x \in \mathcal{R}$ con

$$\sqrt{x^2+x+2}-x-1 < \eta$$

Risulta

$$\sqrt{x^2+x+2}-x-1 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} \leq x+1-\frac{1}{2} = x+\frac{1}{2}$$

Osserviamo infine che se $x+1/2 < 0$ la diseguaglianza precedente é verificata, mentre se $x+1/2 \geq 0$, risulta

$$\sqrt{x^2+x+2} \geq x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+x+2 \geq x^2+x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \geq \frac{1}{4}$$

Pertanto la a) é verificata.
D'altra parte:

$$\sqrt{x^2+x+2}-x-1 < \eta \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} < x+1+\eta$$

Deve quindi essere $x+1+\eta \geq 0$, ossia $x \geq -1-\eta$ e in questo caso risulta, elevando al quadrato:

$$\sqrt{x^2+x+2} < x+1+\eta \Leftrightarrow x^2+x+2 < x^2+1+\eta^2+2\,x+2\,\eta\,x+2\,\eta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2\,\eta)x > 1-\eta^2-2\,\eta$$

Essendo $\eta > -1/2$, si ha $1+2\,\eta > 0$ e quindi l'ultima diseguaglianza é equivalente a

$$x > \frac{1-\eta^2-2\,\eta}{1+2\,\eta}$$

Pertanto é verificata anche la proprietá b) e $-1/2 = \inf\, A$.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+3}{(x-1)^2},\ x \in \mathcal{R},\ x \neq 1 \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.
Essendo l'estremo inferiore il piú grande dei minoranti, cerchiamo di determinare l'insieme dei minoranti. Dalla definizione un numero $d \in \mathcal{R}$ é un minorante se e solo se:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} \geq d\ \ \forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 1$$

Siccome la frazione da studiare assume valori anche negativi, possiamo supporre che sia $d < 0$. Si ottiene:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} \geq d \Leftrightarrow x+3 \geq d(x^2-2\,x+1) \Leftrightarrow -d\,x^2+(2\,d+1)x+3-d \geq 0$$

Affinché l'ultima diseguaglianza sia vera per ogni $x \neq 1$, deve essere $\Delta(d) \leq 0$ ossia

$$\Delta(d) = (2\,d+1)^2+4\,d(3-d) = 4\,d^2+4\,d+1+12\,d-4\,d^2 = 16\,d+1$$

Pertanto $\Delta(d) \leq 0 \Leftrightarrow d \leq -1/16$. Ne segue che $-1/16$ é l'estremo inferiore dell'insieme A. Osserviamo che $-1/16 \in A$ in quanto si ottiene dalla frazione considerata per $x = -7$, pertanto $-1/16 = \min A$. D'altra parte l'insieme A non è superiormente limitato. Infatti se $b \in \mathcal{R}$ é un numero positivo, risulta:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} > b \Leftrightarrow x+3 > b(x^2 - 2\,x + 1) \Leftrightarrow b\,x^2 - (2\,b+1)x + b - 3 < 0$$

Affinché l'ultima diseguaglianza ammetta almeno una soluzione deve essere $\Delta(b) \geq 0$ ed essendo

$$\Delta(b) = (2\,b+1)^2 - 4\,b(b-3) = 4\,b^2 + 4\,b + 1 + 12\,b - 4\,b^2 = 16\,b + 1$$

risulta $\Delta(b) > 0$ e la diseguaglianza iniziale é verificata solo se

$$\frac{2\,b + 1 - \sqrt{16\,b+1}}{2\,b} < x < \frac{2\,b + 1 + \sqrt{16\,b+1}}{2\,b}$$

1.10 Esercizi proposti

1. Sia
$$A = \{\sqrt{n^2+3} - n \ ; \ n \in \mathcal{N}\}$$
Verificare che inf $A = 0$ e sup $A = \max\ A = 1$.

2. Sia
$$A = \{\sqrt{n^2+2\,n} - n \ ; \ n \in \mathcal{N}\}$$
Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare il sup A.

3. Sia
$$A = \left\{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} \ ; \ n \in \mathcal{N}\right\}$$
Verificare che inf $A = 0$.

4. Sia
$$A = \left\{\sqrt{n^2+n+1} - n \ ; \ n \in \mathcal{N}\right\}$$
Calcolare sup A e inf A e dire se sono massimo e minimo di A.

5. Dire se l'insieme
$$A = \left\{\frac{3\,x-1}{x^2+x+3},\ x \in \mathcal{R}\right\}$$
è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare sup A.

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

1.11 Alcuni complementi

Useremo in questo paragrafo le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore ed inferiore per ottenere alcune proprietà dei numeri che, qualche volta, useremo nel seguito.

a) **Proprietà archimedea dei numeri reali**
Siano $a\,,b$ due numeri reali positivi, allora esiste $n \in \mathcal{N}$ tale che $n\,a > b$.

Dimostrazione Supponiamo, ragionando per assurdo, che esistano due numeri reali positivi $a\,,b$ tali che $n\,a \leq b \;\; \forall\, n \in \mathcal{N}$. Allora l'insieme

$$A = \{n\,a\ ;\ n \in \mathcal{N}\}$$

sarebbe limitato superiormente. Indichiamo con $c = \sup\, A$ e ricordiamo che:

i) $n\,a \leq c \;\; \forall\, n \in \mathcal{N}$;
ii) $\forall\, \lambda \in \mathcal{R}$ *con* $\lambda < c \;\; \exists\, n \in \mathcal{N}$ *con* $n\,a > \lambda$.

Applicando infine la seconda proprietà con $\lambda = c - a$, si otterrebbe un naturale n con $n\,a > c - a$ e quindi $(n+1)\,a > c$ e questo è in contrasto con la prima proprietà caratteristica dell'estremo superiore in quanto $(n+1)\,a \in A$.

b) Se $A \subset \mathcal{N}$ è diverso dal vuoto, allora A ha un elemento minimo.

Dimostrazione Esercizio (Basta dimostrare che $m = \inf\, A \in A$).

c) $\mathcal{Q}$ **è denso in** $\mathcal{R}$, ossia $\forall\, a\,, b \in \mathcal{R}$ con $a < b$, $\exists\, r \in \mathcal{Q}$ con $a < r < b$.

Dimostrazione Possiamo supporre $0 \leq a < b$. Per la proprietà archimedea dei numeri, esiste $n \in \mathcal{N}$ con $n\,(b-a) > 1$. Indichiamo ora con

$$A = \{k \in \mathcal{N}\ ;\ \frac{k}{n} \geq b\}$$

Sempre per la proprietà archimedea $A \neq \emptyset$. Sia $m = \min\, A$. Essendo

$$\frac{1}{n} < b - a \leq b$$

risulta $m \geq 2$ ed inoltre $\frac{m}{n} \geq b$ e $\frac{m-1}{n} < b$ perchè $m \in A$ e $m - 1 \notin A$. D'altra parte

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a$$

Pertanto il numero razionale $r = \frac{m-1}{n}$ gode della proprietà richiesta, ossia $a < r < b$.

1.12 Principio di Induzione

Concludiamo questo primo capitolo sui numeri reali, parlando di una proprietà del sottoinsieme di $\mathcal{R}$ costituito dall'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N}$. Tale proprietà, nota col nome di **principio di induzione**, è la seguente :

Principio di Induzione Sia $A \subset \mathcal{N}$ un insieme tale che:

i) $1 \in A$,

ii) se $n \in A \ \Rightarrow \ n+1 \in A$,

Allora $A = \mathcal{N}$.

Tale principio viene spesso usato per dimostrare che una data proposizione relativa al numero naturale n è vera per ogni numero naturale. Infatti, se indichiamo con $\mathcal{P}(n)$ una proposizione relativa ad n, se riusciamo a verificare che:

i) $\mathcal{P}(1)$ è vera ,

ii) se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera ,

Allora ne deriva che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall\ n \in \mathcal{N}$.
La proprietà ii) viene comunemente chiamata **proprietà induttiva**.
La conclusione che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall\ n \in \mathcal{N}$ si ottiene osservando che, posto

$$A = \{n \in \mathcal{N}\ ; \mathcal{P}(n) \ \text{ è vera}\}\ ,$$

A verifica le ipotesi del principio di induzione e quindi $A = \mathcal{N}$.

Da notare che, se $\mathcal{P}(n)$ verifica la proprietà ii) e la i) viene sostituita da

$$iii)\ \ \mathcal{P}(n_0) \text{ è vera (dove } n_0 \text{ è un dato numero naturale) ,}$$

allora si ottiene che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall\ n \geq n_0$.

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Verificare che $\forall\ n \in \mathcal{N}$, vale la formula :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

   i) se $n = 1$, a primo membro della formula ho 1 e a secondo membro ho $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Pertanto l'uguaglianza vale.

   ii) Supponiamo ora che la formula sia valida per un dato numero naturale n. Ottengo

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) =$$

$$= \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\ .$$

   Ossia la validità della formula per $n+1$.

2. Verificare che se $a \in \mathcal{R} \ \ a \neq 1$, vale la formula:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\ .$$

i) Se $n=1$, a primo membro ho $1+a$ e a secondo membro

$$\frac{1-a^2}{1-a}=1+a$$

e quindi la formula vale,

ii) Supponiamo ora che la formula valga per un dato numero naturale n. Ottengo:

$$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+a^{n+1}=$$

$$=\frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}\ .$$

Ottengo quindi la validità della formula per $n+1$.

3. Verificare che $\forall\ n\in\mathcal{N}$, vale la formula :

$$1+2^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}\cdot(2\,n+1)(n+1)\ .$$

i) se $n=1$, a primo membro della formula ho 1 e a secondo membro ho $\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2=1$. Pertanto l'uguaglianza vale.

ii) Supponiamo ora che la formula sia valida per un dato numero naturale n. Ottengo

$$1+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=(1+2^2+\cdots+n^2)+(n+1)^2=$$

$$=\frac{n}{6}\cdot(2\,n+1)(n+1)+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\cdot(2\,n^2+n+6\,n+6)=\frac{n+1}{6}\cdot(2\,n+3)(n+2)\ .$$

Ossia la validità della formula per $n+1$.

4. **Diseguaglianza di Bernoulli .** $\forall\ x\in\mathcal{R}\ ,\ x\geq -1$ e $\forall\ n\in\mathcal{N}$, vale la diseguaglianza:

$$(1+x)^n\geq 1+n\,x\ .$$

i) Se $n=1$, ottengo $1+x\geq 1+x$. Pertanto in questo caso la diseguaglianza è vera (si riduce a una uguaglianza),

ii) Supponiamo ora che la diseguaglianza sia valida per un dato numero naturale n, allora ottengo:

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\geq(1+n\,x)(1+x)=$$
$$=1+(n+1)\,x+n\,x^2\geq 1+(n+1)\,x\ .$$

Ottengo quindi che vale la diseguaglianza anche per $n+1$.

5. Verificare che $\forall\ n\geq 4$ vale la diseguaglianza $2^n\geq n^2$.

i) Se $n=4$, ottengo

$$2^4=16=4^2$$

e quindi, in questo caso vale il segno di uguale,

ii) Supponiamo ora che la diseguaglianza sia vera per un dato numero naturale $n \geq 4$. Ottengo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2$$

Se ora fosse $2\,n^2 \geq (n+1)^2$, potrei concludere che $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ e quindi ottenere la diseguaglianza cercata per $n+1$. D'altra parte

$$2\,n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2\,n^2 \geq n^2 + 2\,n + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2\,n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow n \geq 3 \; .$$

6. **Binomio di Newton** Se $n \in \mathcal{N}$ e $k \in \mathcal{Z}$ con $0 \leq k \leq n$, indichiamo con

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

dove usiamo la convenzione che $0! = 1$ e se $n \geq 1$ indichiamo con $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Il numero $n!$ vine chiamato **n fattoriale** .
I numeri $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ (si legge n sopra k) vengono chiamati i **coefficienti binomiali** . Da notare che risulta:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \; .$$

I coefficienti binomiali hanno le seguenti proprietá :

i)

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right) \; ,$$

ii) Se $k \geq 1$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right) \; .$$

Verifichiamo, per esempio, che vale la ii).

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right) = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!} \left[\frac{n-k+1}{k} + 1 \right] = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right)$$

Vale la seguente formula

Formula del binomio di Newton. Se $a\,, b \in \mathcal{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \; a^k\, b^{n-k} \; .$$

Dimostrazione (Viene riportata solo per completezza, ma non é stata svolta a lezione)
Se $n = 1$, la formula è vera. Supponiamo quindi che la formula sia vera per un dato numero naturale n e dimostriamola per $n+1$. Risulta :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a\,(a+b)^n + b\,(a+b)^n$$

Usando quindi l'ipotesi induttiva, possiamo scrivere:

$$(a+b)^{n+1} = a\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) a^k b^{n+1-k}$$

Ponendo ora $h = k+1$ nella prima somma e $h = k$ nella seconda, ottengo :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{h=1}^{n+1}\left(\begin{array}{c} n \\ h-1 \end{array}\right) a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right) a^h b^{n+1-h} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left[\left(\begin{array}{c} n \\ h-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ h \end{array}\right)\right] a^h b^{n+1-h} + b^{n+1}$$

Ricordando infine la proprietà ii) dei coefficienti binomiali, si ottiene

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ h \end{array}\right) a^h b^{n+1-h} + a^{n+1} = \sum_{h=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ h \end{array}\right) a^h b^{n+1-h}$$

La dimostrazione è dunque completata.

Da notare che usando la proprietá ii) , si puó scrivere rapidamente la seguente tabella dei coefficienti binomiali nota col nome di **Triangolo di Tartaglia**.

$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...	...

Da notare che dalla formula del binimio con $a = b = 1$, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = 2^n$$

1.13 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 1

1.3-i Determinare:

$$A = \left\{x \in \mathcal{R}\ ; \frac{x-3}{x+1} \leq 3\right\}$$

$$\frac{x-3}{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x-3-3\,x-3}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2\,x-6}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} \geq 0$$

Pertanto

$$A = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty) = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x \leq -3\} \cup \{x \in \mathcal{R}\ ; x > -1\}\ .$$

1.3-ii Determinare:

$$B = \left\{ x \in \mathcal{R}\ ; \frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \right\}$$

$$\frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2+6\,x-3\,x-18-x^2-x-2\,x-2}{(x+2)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{20}{(x+2)(x-3)} < 0$$

Pertanto $B = (-2, 3)$.

1.3-iii Determinare:

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R}\ ; \frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \right\}$$

$$\frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2+2-x^2+x+2\,x-2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{3\,x}{x-2} > 0$$

Ne deriva quindi che $C = (-\infty, 0) \cup (2. + \infty)$.

1.3-iv Determinare:

$$D = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \right\}\ .$$

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2)+(x+2)(x-1)-2\,(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore, si ottiene:

$$x^2 - 2\,x + 3\,x - 6 + x^2 - x + 2\,x - 2 - 2\,x^2 + 4\,x + 2\,x - 4 = 8\,x - 12$$

Pertanto:

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2\,x-3}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore, risulta:

$$\begin{array}{l} \quad - \ - \ - \ - \ + \ + \ + \ + \ + \ + \ + \\ \hline \qquad\qquad \frac{3}{2} \end{array} \qquad \text{Numeratore}$$

$$\begin{array}{l} + \ + \ + \ \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ + \ + \ + \\ \hline \quad 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \end{array} \qquad \text{Denominatore}$$

Possiamo quindi concludere che

$$D = (-\infty, 1) \cup [3/2, 2)$$

1.3-v Determinare l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \right\}$$

Risulta:

$$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3\,x - x + 3 - (x^2 + 4\,x + 2\,x + 8)}{(x+2)\,(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\,x+1}{(x+2)\,(x-3)} \geq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore, risulta:

$$\begin{array}{ccc} - - - - & + + + + + + + & \text{Numeratore} \\ & -\frac{1}{2} & \\ + + + & - - - - - - - - - - + + + & \text{Denominatore} \\ -2 & 3 & \end{array}$$

Pertanto

$$E = \left(-2, -\frac{1}{2} \right] \cup (3, +\infty)$$

1.6-i) Determinare:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2\,x-3}{x+2} \right\}$$

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2\,x-3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2) - (2\,x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore, ottengo:

$$x^2 + 2\,x + x + 2 - 2\,x^2 + 4\,x + 3\,x - 6 = -x^2 + 10\,x - 4$$

Le radici del polinomio di secondo grado che sta al numeratore sono

$$x_1 = 5 - \sqrt{21} \;\; e \;\; x_2 == 5 + \sqrt{21}$$

Ne deriva quindi che

$$A = (-\infty, -2) \cup \left[5 - \sqrt{21}, 2 \right) \cup \left[5 + \sqrt{21}, +\infty \right)$$

1.6-ii) Determinare:

$$B = \left\{ x \in \mathcal{R};\ \sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x - 1 \right\}$$

Osserviamo che deve essere $(x+1)(2-x) \geq 0$, affichè la radice abbia senso e quindi $x \in [-1, 2]$. Inoltre se $x - 1 < 0$, ossia se $x < 1$, la disuguaglianza non è verificata. D'altra parte se $x - 1 \geq 0$, ossia $x \geq 1$, allora la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri. Si ottiene quindi se $x \geq 1$:

$$\sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x - 1 \Leftrightarrow 2\,x - x^2 + 2 - x \leq x^2 - 2\,x + 1 \Leftrightarrow 2\,x^2 - 3\,x - 1 \geq 0$$

Le due radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \quad e \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$$

Se ne conclude che

$$B = \left[\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 2\right]$$

1.6-iii) Determinare:

$$C = \left\{x \in \mathcal{R};\ \frac{x^2+x+1}{x-3} \geq 2\,x+1\right\}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x-3} \geq 2\,x+1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1-2\,x^2+6\,x-x+3}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6\,x-4}{x-3} \leq 0$$

Ora il polinomio di secondo grado che sta a numeratore ha le due radici:$x_1 = 3-\sqrt{13}$ e $x_2 = 3+\sqrt{13}$. Possiamo quindi concludere che

$$C = \left(-\infty, 3-\sqrt{13}\right] \cup \left(3, 3+\sqrt{13}\right]$$

1.6-iv)Determinare:

$$D = \left\{x \in \mathcal{R};\ \sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2}\right\}$$

Osserviamo che deve essere $(x+2)(x-1) \geq 0$, affichè la radice abbia senso e quindi $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Inoltre se $x+3 < 0$, ossia se $x < -3$, la disuguaglianza non è verificata. D'altra parte se $x+3 \geq 0$, ossia $x \geq -3$, allora la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri. Si ottiene allora se $x \geq -3$:

$$\sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4(x^2-x+2\,x-2) \leq x^2+6\,x+9 \Leftrightarrow 3\,x^2-2\,x-17 \leq 0$$

Le due radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{52}}{3} \quad e \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{52}}{3}$$

Se ne conclude che

$$D = \left[\frac{1-\sqrt{52}}{3}, -2\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{52}}{3}\right]$$

1.10-1) Sia

$$A = \{\sqrt{n^2+3} - n\ ;\ n \in \mathcal{N}\}$$

Verificare che $\inf\, A = 0$ e $\sup\, A = \max\, A = 1$.
Risulta ovviamente

$$\sqrt{n^2+3} - n > 0 \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\ .$$

D'altra parte, se $\eta > 0$, si ha

$$\sqrt{n^2+3} - n < \eta \Leftrightarrow \sqrt{n^2+3} < n+\eta \Leftrightarrow n^2+3 < n^2+2\,n\,\eta+\eta^2 \Leftrightarrow n > \frac{3-\eta^2}{2\,\eta}$$

e quindi $0 = \inf A$. Osserviamo infine che $1 \in A$ (si ottiene dalla formula per $n = 1$) ed inoltre

$$\sqrt{n^2+3} - n \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+3} \leq n+1 \Leftrightarrow n^2+3 \leq n^2+2\,n+1 \Leftrightarrow n \geq 1 \ .$$

Pertanto $1 = \max A = \sup A$.

1.10-2) Sia

$$A = \{\sqrt{n^2+2\,n} - n \ ; \ n \in \mathcal{N}\}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare il sup A.
Un numero $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se risulta

$$\sqrt{n^2+2\,n} - n \leq b \ \ \forall \ n \in \mathcal{N} \ .$$

D'altra parte, supponendo $b > 0$, si ha

$$\sqrt{n^2+2\,n} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2+2\,n} \leq n+b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+2\,n \leq n^2+2\,n\,b+b^2 \Leftrightarrow 2\,(b-1)\,n+b^2 \geq 0$$

Siccome si richiede che le diseguaglianze siano vere $\forall \ n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere maggiore o uguale a zero, ossia deve essere $b \geq 1$. Pertanto $b = 1$ è il più piccolo dei maggioranti e quindi sup $A = 1$. Verifichiamo, per completezza, se risulta anche $1 = \max\ A$. Ovviamente questo è vero se e solo se $1 \in A$. Vediamo dunque se l'equazione

$$\sqrt{n^2+2\,n} - n = 1$$

ha una soluzione o no. Risulta

$$\sqrt{n^2+2\,n} - n = 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+2\,n} = n+1 \Leftrightarrow n^2+2\,n = n^2+2\,n+1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Allora $1 \notin A$ e pertanto l'insieme A non ha massimo.

1.10-3) Sia

$$A = \left\{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} \ ; \ n \in \mathcal{N}\right\}$$

Verificare che inf $A = 0$.
Ovviamente risulta:

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} > 0 \ \ \forall \ n \in \mathcal{N} \ .$$

D'altra parte se $\eta > 0$, ottengo:

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} < \eta \Leftrightarrow \sqrt{n+4} < \eta + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+4 < \eta^2 + 2\,\eta\,\sqrt{n+1} + n + 1 \Leftrightarrow 3 - \eta^2 < 2\,\eta\,\sqrt{n+1}$$

Osserviamo ora che, se $3 - \eta^2 \leq 0$, allora l'ultima diseguaglianza ottenuta é verificata $\forall \ n \in \mathcal{N}$; mentre se $3 - \eta^2 > 0$, ottengo che:

$$3 - \eta^2 < 2\,\eta\,\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \left(3-\eta^2\right)^2 < 4\,\eta^2(n+1) \Leftrightarrow n > \frac{\left(3-\eta^2\right)^2}{4\,\eta^2} - 1 \ .$$

In ogni caso quindi, la diseguaglianza iniziale ammette soluzioni. Pertanto $0 = \inf\ A$.

1.10-4) Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2+n+1} - n \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare sup A e inf A e dire se sono massimo e minimo di A.
Un numero $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se risulta

$$\sqrt{n^2+n+1} - n \leq b \quad \forall \ n \in \mathcal{N} \ .$$

D'altra parte, possiamo supporre $b > 0$, in quanto se $b \leq 0$ la diseguaglianza è verificata essendo il primo membro positivo. Risulta dunque:

$$\sqrt{n^2+n+1} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n+1} \leq n + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n+1 \leq n^2 + 2\,n\,b + b^2 \Leftrightarrow (2\,b-1)\,n \geq 1 - b^2$$

Siccome si richiede che le diseguaglianze siano vere $\forall \ n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere positivo e quindi il numero $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se

$$2\,b - 1 > 0 \quad e \quad n \geq \frac{1-b^2}{2\,b-1} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva quindi che deve essere:

$$2\,b - 1 > 0 \quad e \quad 1 \geq \frac{1-b^2}{2\,b-1}$$

ossia

$$b > \frac{1}{2} \quad e \quad b^2 + 2\,b - 2 \geq 0$$

In conclusione quindi $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se $b \geq \sqrt{3} - 1$. Pertanto $\sqrt{3} - 1 = \sup A$.
Siccome poi $\sqrt{3} - 1 \in A$, risulta pure $\sqrt{3} - 1 = \max A$.
D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è minorante A se e solo se:

$$\sqrt{n^2+n+1} - n \geq d \quad \forall \ n \in \mathcal{N} \ .$$

Supponendo anche in questo caso $d > 0$, otteniamo:

$$\sqrt{n^2+n+1} - n \geq d \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n+1} \geq n + d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n+1 \geq n^2 + 2\,n\,d + d^2 \Leftrightarrow (2\,d-1)\,n \leq 1 - d^2$$

Siccome si richiede che le diseguaglianze siano vere $\forall \ n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere minore o uguale a zero e quindi il numero $d \in \mathcal{R}$ è minorante se e solo se

$$2\,d - 1 \leq 0 \quad ossia \quad d \leq \frac{1}{2}$$

Allora risulta inf $A = \frac{1}{2}$. Da notare infine che $\frac{1}{2} \notin A$ e quindi non è il minimo di A.

1.10-5) Dire se l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3\,x-1}{x^2+x+3}, \ x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare sup A.

Un numero positivo $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{3\,x-1}{x^2+x+3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Risulta dunque:

$$\frac{3\,x-1}{x^2+x+3} \leq b \Longleftrightarrow 3\,x-1 \leq b(x^2+x+3) \Longleftrightarrow b\,x^2+(b-3)\,x+3\,b+1 \geq 0$$

Ora quest'ultima diseguaglianza è verificate per ogni $x \in \mathcal{R}$ se e solo se $b > 0$ e $\Delta(b) = (b-3)^2-4\,b(3\,b+1) \leq 0$. Risulta: $\Delta(b) = b^2-6\,b+9-12\,b^2-4\,b = -(11\,b^2+10\,b-9) \leq 0$. Pertanto $\Delta(b) \leq 0 \Longleftrightarrow 11\,b^2+10\,b-9 \geq 0$. Le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono:

$$b_1 = \frac{-5-\sqrt{25+99}}{11} \quad e \quad b_2 = \frac{-5+\sqrt{124}}{11}$$

Ne deriva quindi che b è maggiorante se e solo se $b \geq b_2$. Pertanto b_2 il più piccolo dei maggioranti ossia l'estremo superiore di A. Da notare che b_2 anche il massimo elemento di A in quanto $b_2 \in A$ avendo l'equazione

$$\frac{3\,x-1}{x^2+x+3} = b_2$$

una soluzione (e una sola).

2 FUNZIONI

In questo secondo capitolo viene introdotto il concetto di funzione e vengono illustrate alcune proprietà generali delle funzioni che saranno usate nel seguito.

2.1 Definizione di funzione e proprietà generali

Siano A, $B \subset \mathcal{R}$, chiameremo f una funzione da A in B ed useremo la notazione:

$$f : A \to B$$

una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa un ben determinato elemento di B che indicheremo con $f(x)$.

Nei casi che considereremo in questo corso, la legge che definisce una funzione sarà di solito espressa da una formula matematica.

L'insieme A dove la funzione f è definita (ossia l'insieme dei numeri reali per cui le legge ha senso) viene chiamato **l'insieme di definizione o il dominio di** f ed indicato a volte con $D(f)$.

L'insieme

$$R(f) = \{y \in \mathcal{R},\ \exists\, x \in A \ con\ f(x) = y\}$$

viene chiamato **l'insieme dei valori o il codominio** di f.

Se $f : A \to B$ è una funzione chiameremo **grafico della funzione** f l'insieme:

$$graf\, f = \{(x, y)\,;\ x \in \mathcal{D}(f)\,,\ y = f(x)\} = \{(x, f(x))\,;\ x \in \mathcal{D}(f)\}$$

Nel seguito, useremo pure le notazioni:

Se $X \subset A$

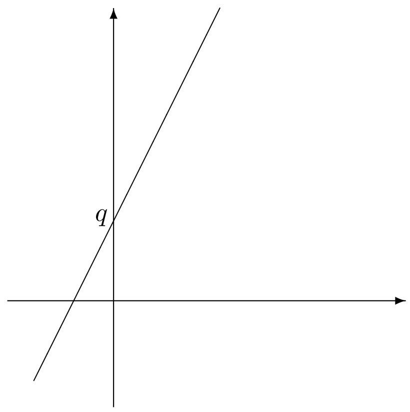
$$f(X) = \{f(x)\,,\ x \in X\} = \{y \in B\,;\ \exists\, x \in X\ con\ f(x) = y\}$$

Se $Y \subset B$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A\,;\ f(x) \in Y\}$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

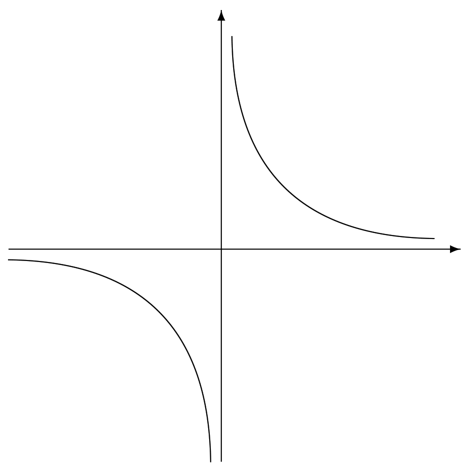
a) Sia $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = m\,x + q$ (con $m\,, q \in \mathcal{R}$ numeri fissati). Il grafico di f (polinomio in x di primo grado) é una retta.



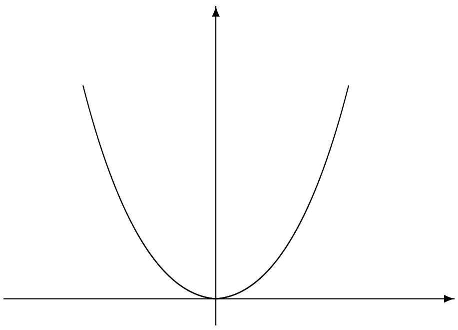
b) Sia $A = \{x \in \mathcal{R} \ ; \ x \neq 0\}$ e sia $f \ : A \to \mathcal{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

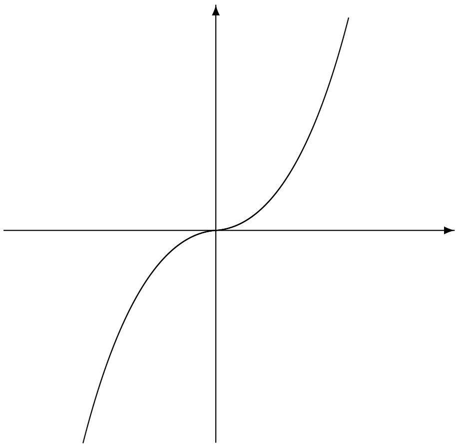
Il grafico di f è dato dalla seguente figura (iperbole equilatera):



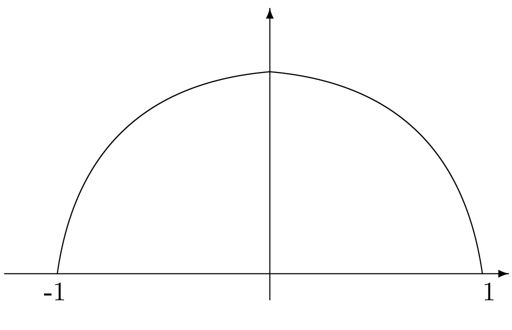
c) Sia $f \ : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$. Il grafico di f è dato dalla seguente figura (parabola):



d) Sia $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3$. Il grafico di f è dato dalla seguente figura:



e) Sia $f : [-1, 1] \to \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. È interessante notare che il grafico di f è la semisfera superiore di centro l'origine e raggio 1.



Sia $f : A \to B$ una data funzione. Diremo che

i) f è **iniettiva** se

$$x_1\,,x_2 \in A\ ,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\ ;$$

ii) f è **suriettiva** (su B) se $f(A) = B$ ossia se

$$\forall\ y \in B\ \ \exists\ x \in A\ \ \textit{con}\ \ f(x) = y\ ;$$

iii) f è **biettiva** se f è iniettiva e suriettiva (f in tal caso è anche chiamata una **corrispondenza biunivoca** tra A e B)

iv) f è **strettamente crescente** se

$$x_1\,,x_2 \in A\ \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ ;$$

f è **crescente** se

$$x_1\,,x_2 \in A\ \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ ;$$

v) f è **strettamente decrescente** se

$$x_1\,,x_2 \in A\ \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\ ;$$

f è **descrescente** se

$$x_1\,,x_2 \in A\ \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ .$$

Siano $f\ : A \to B$ e $g\ : B \to C$ due funzioni assegnate. Chiameremo **funzione composta** di f e g e la indicheremo col simbolo $g \circ f$ la funzione da A in C definita da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in A$$

Infine se $f\ : A \to B$ e una funzione iniettiva e suriettiva, diremo anche che f è **invertibile** e chiameremo **funzione inversa** di f la funzione $g\ : B \to A$ definita dalla seguente legge:

$$\textit{se}\ y \in B\ ,\ g(y) = \text{ all'unica soluzione } x \in A \text{ dell'equazione } f(x) = y$$

Da notare che, dalla definizione di funzione inversa, si hanno le due seguenti identità:

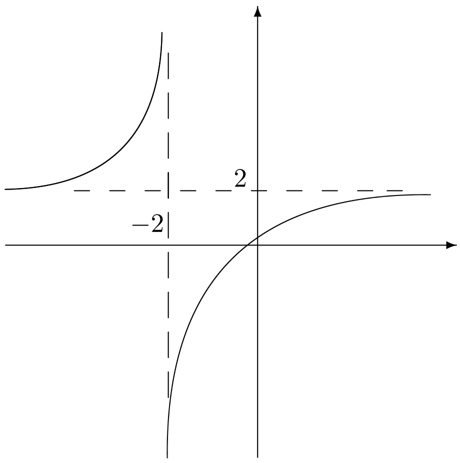
i) $f(g(y)) = y\ \ \forall\ y \in B$,

ii) $g(f(x)) = x\ \ \forall\ x \in A$.

La funzione g, inversa della funzione f viene spesso indicata col simbolo f^{-1} (che non va confuso con $1/f$).

Consideriamo per concludere alcuni esempi.

1. Sia
$$f(x) = \frac{2\,x+1}{x+2} \quad , \; x \in A = \{x \in \mathcal{R} \; ; x \neq -2\}$$
Verifichiamo che f è iniettiva. Infatti se $x\,,y \in A$,
$$\frac{2\,x+1}{x+2} = \frac{2\,y+1}{y+2} \Rightarrow 2\,x\,y + y + 4\,x + 2 = 2\,x\,y + x + 4\,y + 2 \Rightarrow 3\,x = 3\,y \Rightarrow x = y$$
Pertanto f è iniettiva. Calcoliamo ora l'insieme dei valori di f: $f(A)$. Ricordiamo che $y \in f(A) \Leftrightarrow \; \exists \; x \in A \; con \; f(x) = y$. Allora $y \in f(A) \Leftrightarrow \; \exists \; x \in A$ con
$$\frac{2\,x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow 2\,x+1 = x\,y + 2\,y \Leftrightarrow (2-y)\,x = 2\,y - 1 \Leftrightarrow y \neq 2 \quad e \quad x = \frac{2\,y-1}{2-y}$$
Se ne conclude quindi che
$$f(A) = \{y \in \mathcal{R} \; ; y \neq 2\} = B$$
Il grafico della funzione f è del tipo di quello rappresentato in figura:



La funzione $f \; : A \to B$ è iniettiva e suriettiva e la sua funzione inversa $g \; : B \to A$ è data dalla funzione:
$$g(y) = \frac{2\,y-1}{2-y} \quad , \quad y \in B$$
Verifichiamo direttamente, per esempio, che $f(g(y)) = y \;\; \forall \; y \in B$. Infatti :
$$f(g(y)) = \frac{2\,g(y)+1}{g(y)+2} = \frac{2\,\frac{2\,y-1}{2-y}+1}{\frac{2\,y-1}{2-y}+2} = \frac{4\,y-2+2-y}{2\,y-1+4-2\,y} = \frac{3\,y}{3} = y$$

2. Sia
$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \in \mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} \; ; \; x > 0\} \; .$$
Verifichiamo se f è iniettiva. Siano $x\,,y \in \mathcal{R}^+$, risulta:
$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow x^2\,y + y = x\,y^2 + x \Leftrightarrow x\,y(x-y) + y - x = 0 \Leftrightarrow (x\,y-1)(x-y) = 0$$

La funzione quindi non è iniettiva, infatti l'uguaglianza $f(x) = f(y)$ non vale solo quando $x = y$, ma anche quando $x\,y = 1$ ossia quando $y = \frac{1}{x}$. Ad esempio

$$f(2) = f(\frac{1}{2}) \quad , \quad f(3) = f(\frac{1}{3}) \ .$$

Calcoliamo ora l'insieme dei valori $f(\mathcal{R}^+)$. Ricordiamo che

$$y \in f(\mathcal{R}^+) \Leftrightarrow \ \exists\, x \in \mathcal{R}^+ \ \ con \ \ x + \frac{1}{x} = y$$

D'altra parte

$$x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - y\,x + 1 = 0$$

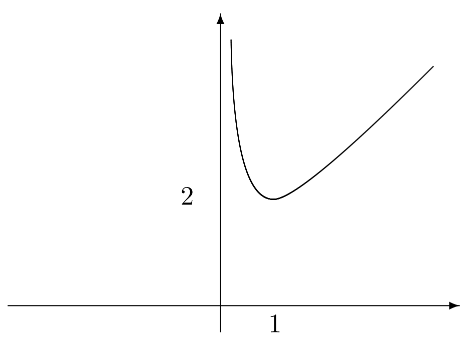
Il delta del polinomio di secondo grado (in x) trovato è dato da $\Delta(y) = y^2 - 4$ e quindi, se vogliamo che l'equazione considerata abbia almeno una soluzione deve essere $\Delta(y) \geq 0$, ossia $y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ e, in tal caso, le soluzioni sono

$$x_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Osserviamo infine che se $y < 0$ le due soluzioni trovate sono negative, mentre se $y > 0$ sono positive. Possiamo quindi concludere che l'equazione nella x : $x + \frac{1}{x} = y$ ha almeno una soluzione $x > 0$ se e solo se $y \geq 2$. Ne deriva quindi che

$$f(\mathcal{R}^+) = [2, +\infty) \ .$$

Osserviamo infine che il grafico della funzione f è del tipo:



3. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad x \in \mathcal{R} \ .$$

Anche in questo caso verichiamo se f è iniettiva. Risulta:

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \sqrt{y^2 + 1} - y \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = x - y \Rightarrow$$

$$x^2 + 1 + y^2 + 1 - 2\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} = x^2 + y^2 - 2\,x\,y \Rightarrow 1 + x\,y = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$1 + x^2\, y^2 + 2\, x\, y = x^2\, y^2 + x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

Pertanto la funzione è iniettiva.
Per calcolare l'insieme dei valori, osserviamo in primo luogo che $f(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{R}$, pertanto $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}^+$. D'altra parte, se $y \in \mathcal{R}^+$, risulta

$$\sqrt{x^2+1} - x = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = x + y \Leftrightarrow x + y \geq 0 \;\; e \;\; x^2 + 1 = x^2 + 2\, x\, y + y^2 \Leftrightarrow x + y \geq 0 \;\; e \;\; x = \frac{1 - y^2}{2\, y}$$

Da notare che se

$$x = \frac{1 - y^2}{2\, y} \quad e \quad y > 0$$

allora la condizione $x + y \geq 0$ è verificata, infatti:

$$x + y = \frac{1 - y^2}{2\, y} + y = \frac{1 + y^2}{2\, y} > 0$$

Pertanto l'equazione considerata ($\sqrt{x^2+1} - x = y$) ha una soluzione $\forall\; y \in \mathcal{R}^+$. Allora $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^+$. Da notare infine che la funzione $g\, : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}$ definita da :

$$g(y) = \frac{1 - y^2}{2\, y}$$

è la funzione inversa di f. Verifichiamo per concludere che $f(g(y)) = y \quad \forall\; y \in \mathcal{R}^+$ e che $g(f(x)) = x \;\; \forall\, x \in \mathcal{R}$. Infatti risulta :

$$f(g(y)) = \sqrt{g^2(y) + 1} - g(y) = \sqrt{\left(\frac{1 - y^2}{2\, y}\right)^2 + 1} - \frac{1 - y^2}{2\, y} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + y^4 - 2\, y^2 + 4\, y^2}{4\, y^2}} - \frac{1 - y^2}{2\, y} = \frac{1 + y^2}{2\, y} - \frac{1 - y^2}{2\, y} = y$$

$$g(f(x)) = \frac{1 - f^2(x)}{2\, f(x)} = \frac{1 - \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2}{2\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = \frac{2\, x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{2\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = x$$

2.2 Esercizi proposti

1. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad , \; x \in \mathcal{R} \; , \;\; x \neq 2 \; .$$

   i) Verificare che f è iniettiva ,
   ii) calcolare l'insieme dei valori ,
   iii) determinare la funzione inversa.

2. Sia

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2} \quad x \in \mathcal{R}$$

i) Dire se f é iniettiva;

ii) Calcolare l'insieme dei valori di f: $f(\mathcal{R})$.

3. Sia
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad x \in \mathcal{R}$$
   i) Dire se f è iniettiva;

   ii) Calcolare l'insieme dei valori di f: $f(\mathcal{R})$.

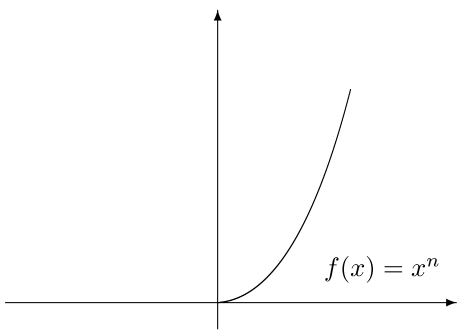
4. Sia
$$f(x) = \sqrt{x^2+x+2} - x$$
   Verificare che f è iniettiva, calcolare l'insieme dei valori di f e scrivere la funzione inversa di f.

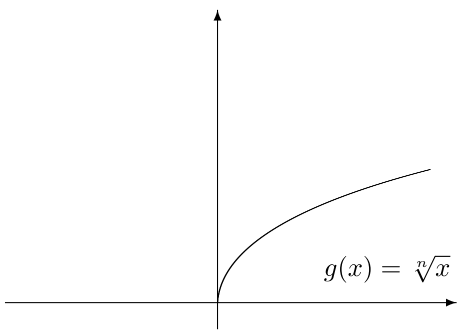
(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

2.3 Alcune funzioni elementari

Ricorderemo in questo paragrafo la definizione e le principali proprietà di alcune funzioni elementari che useremo di frequente nel seguito.

1. **Funzione potenza con esponente naturale**
   La funzione $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ definita da
$$f(x) = x^n \quad n \in \mathcal{N}$$
   se viene ristretta all'insieme $A = \{x \in \mathcal{R}\ ; x \geq 0\}$ è strettamente crescente e quindi iniettiva e $f : A \to A$ è una corrispondenza biunivoca. Possiamo quindi considerare la sua funzione inversa. Tale funzione inversa $g : A \to A$ verrà indicata col simbolo
$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$
   e chiamata la **radice n-esima** di y ($y \geq 0$). Pertanto $\forall\ y \geq 0$, $\sqrt[n]{y}$ è quell'unico numero non negativo tale che
$$(\sqrt[n]{y})^n = y$$
   I grafici delle due funzioni sono i seguenti :

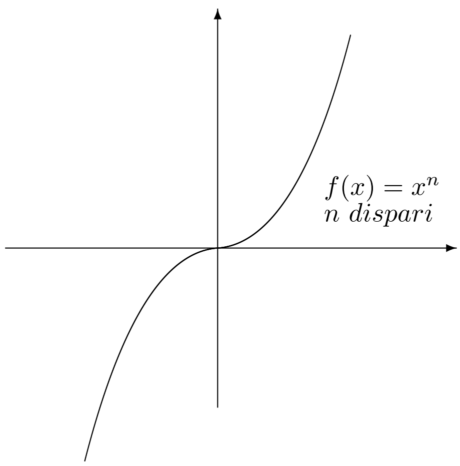


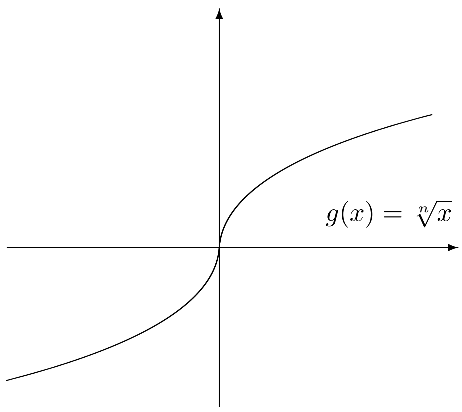


2. **Funzione potenza con esponente naturale dispari**
Da notare che se $n \in \mathcal{N}$ è un numero dispari, allora la funzione considerata $f(x) = x^n$ ($f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$) è strettamente crescente e suriettiva e quindi invertibile (senza imporre la restrizione $x \geq 0$). Per n dispari quindi la funzione

$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$

è definita $\forall\ y \in \mathcal{R}$. In questo caso, i grafici delle due funzioni sono i seguenti :





3. **Funzione esponenziale**
Sia $a \in \mathcal{R}$ con $a > 1$. Definiamo $\forall\ n \in \mathcal{N}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

e $\forall\ n \in \mathcal{N}\ \ e\ \ m \in \mathcal{Z}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si può verificare facilmente (e lo lasciamo per esercizio) che se $n\,, q \in \mathcal{N}$ e $m\,, p \in \mathcal{Z}$ verificano la relazione

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

allora :

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$$

È possibile allora definire la potenza di a con esponente razionale, ponendo $\forall\ r \in \mathcal{Q}$:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} \quad se \quad r = \frac{m}{n} \quad con \quad m \in \mathcal{Z} \quad e \quad n \in \mathcal{N}$$

Ricordando che $a > 1$, la funzione così definita gode delle seguenti proprietà :

i)

$$a^r > 0 \quad \forall\ r \in \mathcal{Q}$$

ii)
$$a^r > 1 \;\; se \;\; r > 0 \;\; , \;\; a^r < 1 \;\; se \;\; r < 0$$

iii)
$$a^{r+s} = a^r\, a^s \;\; e \;\; (a^r)^s = a^{r\,s} \;\; \forall\, r\,,s \in \mathcal{Q}$$

iv)
$$a^r \text{ è una funzione strettamente crescente.}$$

Verifichiamo ad esempio le proprietà iii) e iv).
Esprimendo $r, s \in \mathcal{Q}$ come frazioni con lo stesso denominatore, ad esempio

$$r = \frac{m}{n} \;\; , \;\; s = \frac{p}{n} \;\; n \in \mathcal{N}\,, \;\; m\,,p \in \mathcal{Z}$$

risulta:

$$a^{r+s} = a^{\frac{m+p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m+p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = a^r\, a^s$$

Analogamente:

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^r}\right)^p = \left(\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}\right)^p = \left(\sqrt[n^2]{a}\right)^{mp} = a^{\frac{m\,p}{n^2}} = a^{r\,s}$$

D'altra parte se $r\,,s \in \mathcal{Q}$ e $r < s$, si ha:

$$a^s - a^r = a^r \left(a^{s-r} - 1\right) > 0$$

perchè $a^r > 0$ e $a^{s-r} > 1$ essendo $s - r > 0$.
Possiamo infine estendere la funzione esponenziale a qualunque esponente reale, ponendo se $x \in R$:

$$a^x = \sup\{a^r \;;\; r \in \mathcal{Q}\;,\; r < x\}$$

Ottengo così una funzione $f\;: \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$ che indicheremo con $f(x) = a^x$ e che chiameremo la **funzione esponenziale** (di base a). Essa mantiene le proprietà scritte sopra per l'esponente razionale, in particolare :

i)
$$a^x > 0 \;\; \forall\, x \in \mathcal{R}$$

ii)
$$a^x > 1 \;\; se \;\; x > 0 \;\; , \;\; a^x < 1 \;\; se \;\; x < 0$$

iii)
$$a^{x+y} = a^x\, a^y \;\; e \;\; (a^x)^y = a^{x\,y} \;\; \forall\, x\,,y \in \mathcal{R}$$

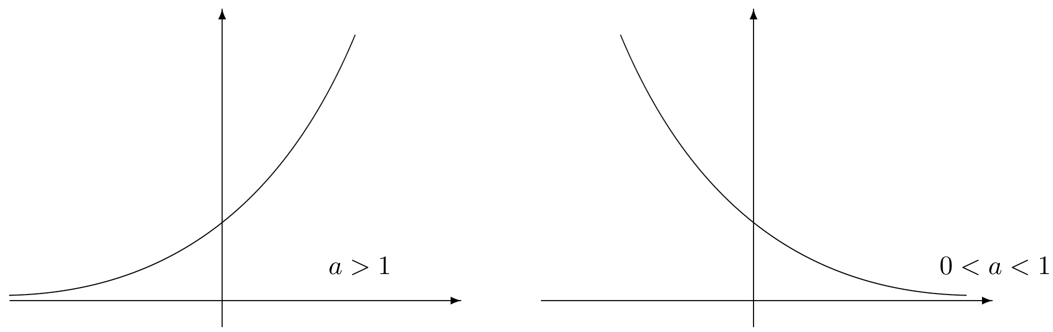
iv)
$$a^x \text{ è una funzione strettamente crescente.}$$

Si può infine definire a^x anche quando la base $a \in (0,1)$. Lo si può fare nello stesso modo che abbiamo seguito con $a > 1$ con le ovvie modifiche, oppure si può procedere rapidamente ponendo in questo caso

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

e usare la definizione già data, in quanto $1/a$ è maggiore di 1.

Il grafico della funzione esponenziale è dato dalle seguenti figure:



4. **La funzione logaritmo**
Abbiamo visto nell'esempio precedente che la funzione esponenziale $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$ definite da $f(x) = a^x \quad a > 0 \quad a \neq 1$ è una funzione biettiva. Si può considerare pertanto la sua funzione inversa $g : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}$. Tale funzione inversa viene indicata col simbolo:

$$g(y) = \log_a y$$

(**logaritmo in base** a **di** y) Le principali proprietà del logaritmo sono le seguenti:

i)
$$a^{\log_a y} = y \quad \forall\, y \in \mathcal{R}^+$$
$$\log_a (a^x) = x \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

ii)
$$\log_a (y\, z) = \log_a y + \log_a z \quad \forall\, y\,, z \in \mathcal{R}^+$$

iii)
$$\log_a (y^z) = z\, \log_a y \quad \forall\, y \in \mathcal{R}^+ \quad e \quad \forall\, z \in \mathcal{R}$$

iv)
$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b} \quad \forall\, y\,, a\,, b \in \mathcal{R}^+ \quad a\,, b \neq 1$$

Verifichiamo per completezza le proprietà ora enunciate.

i) Sono una conseguenza immediata del fatto che la funzione $g(y) = \log_a y$ è la funzione inversa della funzione $f(x) = a^x$.

ii) Risulta:
$$a^{\log_a (y\, z)} = y\, z = a^{\log_a y}\, a^{\log_a z} = a^{\log_a y + \log_a z}$$

Allora :
$$\log_a (y\, z) = \log_a y + \log_a z$$

e quindi vale la ii).

iii) Esercizio.

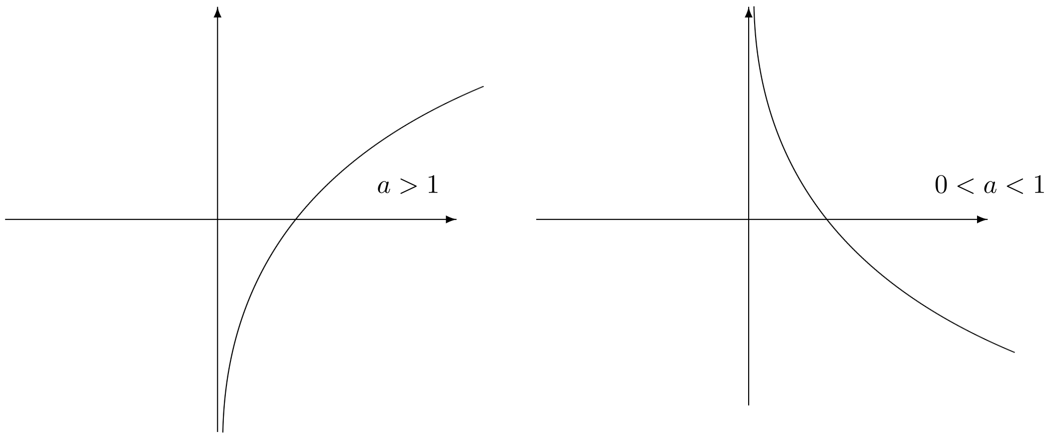
iv) Risulta:

$$a^{\log_a y} = y = b^{\log_b y} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b y} = a^{\log_a b \, \log_b y}$$

Ne deriva quindi che

$$\log_a y = \log_a b \, \log_b y$$

Ricordiamo infine che il grafico della funzione logaritmo è il seguente:

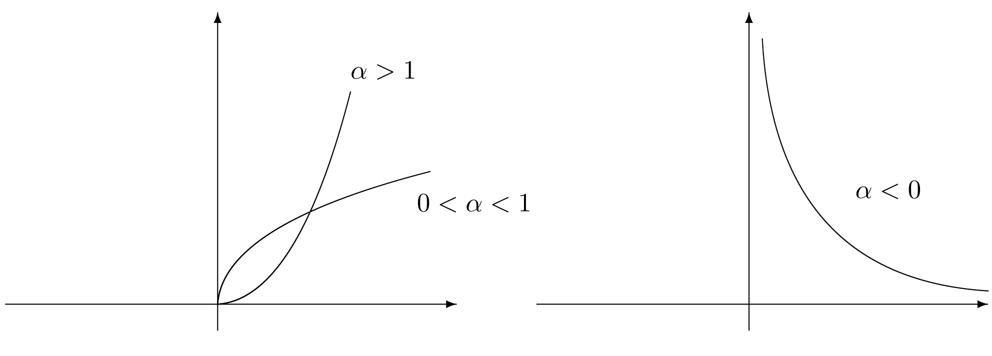


5. **La funzione potenza**

Fissato un numero $\alpha \in \mathcal{R}$, chiameremo **funzione potenza (con esponente** α**)** la funzione $f : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ definita da:

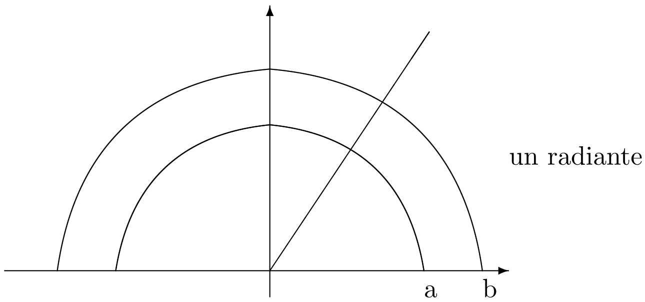
$$f(x) = x^{\alpha} = 10^{\alpha \log_{10} x}$$

Il grafico della funzione potenza è dato dalle seguenti figure:



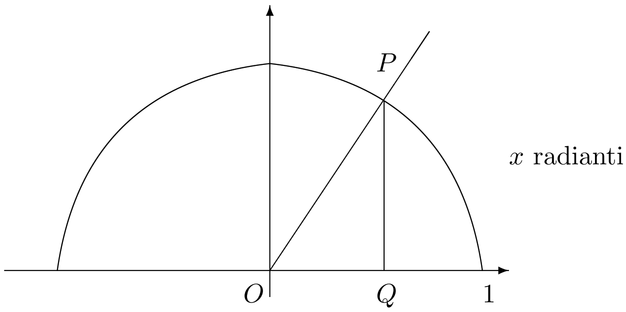
6. Le funzioni trigonometriche

Ricorderemo in questo paragrafo la definizione e le proprietà più importanti delle funzioni trigonometriche seguendo un ragionamento puramente geometrico che non ha nessuna pretesa di essere completo.
Come unità di misura degli angoli considereremo **l'angolo radiante** definito come quell'angolo che, posto al centro di una circonferenza, determina su du essa un arco la cui lunghezza è uguale al raggio della circonferenza stessa. Da notare che, per la similitudine dei settori che intervengono, la definizione di radiante non dipende dal raggio della circonferenza scelta come si può vedere dalla figura seguente:



Fissato ora un numero reale x, consideriamo l'angolo al centro della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che misura x radianti (il verso positivo è quello antiorario). Definiremo allora:

$$\sin x = \overline{Q\,P} \qquad \cos x = \overline{O\,Q}$$



Ovviamente se il raggio della circonferenza che stiamo considerando non fosse 1, si avrebbe:

$$\sin x = \frac{\overline{Q\,P}}{\overline{O\,P}} \qquad \cos x = \frac{\overline{O\,Q}}{\overline{O\,P}}$$

Alcune proprietà elementari delle funzioni ora definite sono le seguenti:

i) (Teorema di Pitagora)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\begin{array}{l} \sin{(x + 2\,\pi)} = \sin x \\ \cos{(x + 2\,\pi)} = \cos x \end{array} \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

iii)

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x+\pi) = -\sin x \\ \cos(x+\pi) = -\cos x\end{array}\right. \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

iv)

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \\ \\ \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x\end{array}\right. \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

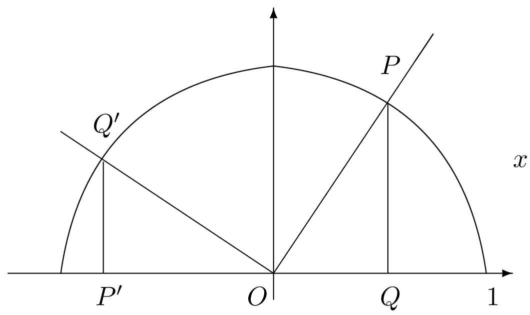
v)

$$\left.\begin{array}{l}\sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x\end{array}\right. \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

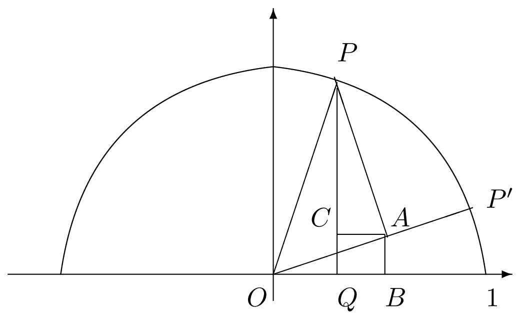
vi) **Formula della somma per il coseno**

$$\cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y \quad \forall\, x\,, y \in \mathcal{R}$$

La prima proprietà espressa in iv) si può verificare ragionando sulla seguente figura:



I due triangoli OQP e $OQ'P'$ sono uguali e quindi $\overline{P'Q'} = \overline{OQ}$.
Per verificare la formula della somma per il coseno, ragioneremo sulla seguente figura:



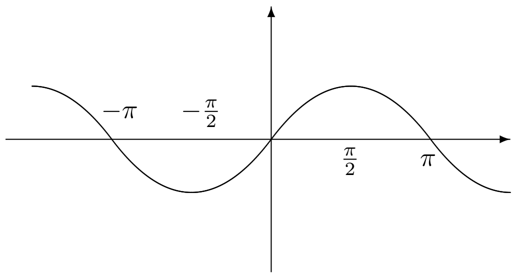
Supponiamo che gli angoli $\widehat{BOP'}$ e $\widehat{P'OP}$ misurino rispettivamente x radianti ed y radianti. Risulta allora, ricordando che il raggio della circonferenza della figura è 1, $\overline{OQ} = \cos(x+y)$. Useremo per ottenere la formula vi), l'uguaglianza: $\overline{OQ} = \overline{OB} - \overline{QB}$. Nella figura, il segmento PA è ortogonale al segmento OP', così che il triangolo OAP è rettangolo con angolo retto in A. Risulta allora: $\overline{AP} = \sin y$. D'altra parte, anche il triangolo ACP è rettangolo con angolo retto in C e l'angolo $\widehat{CPA}$ è uguale all'angolo $\widehat{BOP'}$ e quindi misura x radianti, allora:

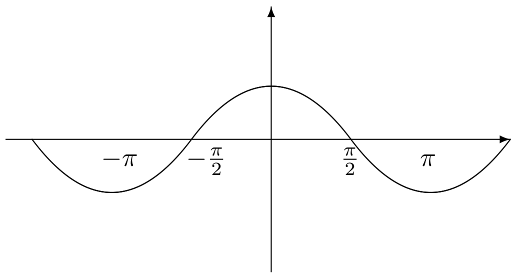
$$\overline{CA} = \overline{QB} = \overline{AP}\,\sin x = \sin y\,\sin x$$

D'altra parte

$$\overline{OB} = \overline{OA}\,\cos x = \cos y\,\cos x$$

e quindi si ottiene la formula della somma.
I grafici delle funzioni *seno* e *coseno* sono i seguenti :





7. **La funzione tangente**
Oltre alle due funzioni seno e coseno, consideremo anche la funzione tangente definita da:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La funzione tangente è definita solamente per quei valori di x per cui $\cos x \neq 0$ ossia per

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \ , \ k \in \mathcal{Z}$$

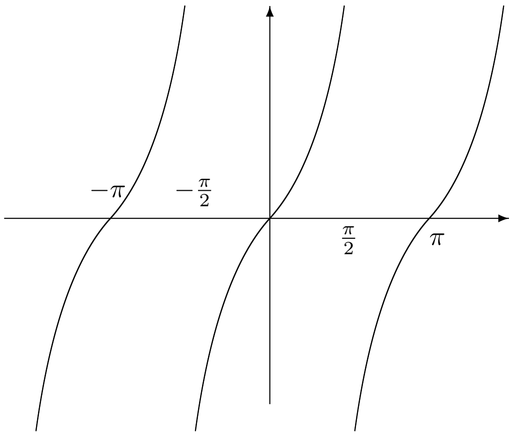
La funzione tangente è periodica di periodo π ossia

$$\tan x = \tan(x + \pi) \ \ \forall\ x \in D$$

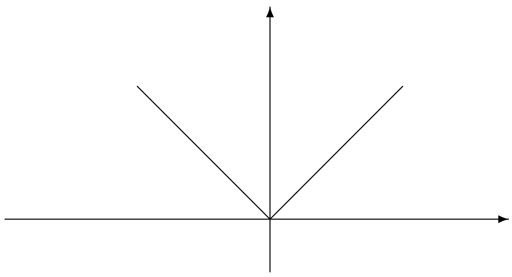
(dove abbiamo indicato con D il dominio della tangente ossia

$$D = \{x \in \mathcal{R}\ ; x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \ , \ k \in \mathcal{Z}\}\ )$$

e in ogni intervallo in cui è definita è strettamente crescente.
Il grafico della tangente è dato da:



8. **La funzione modulo**
Fissato $x \in \mathcal{R}$, definiamo
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
La funzione f ora definita viene chiamata la funzione **modulo o valore assoluto** ed ha il seguente grafico:



Alcune proprietà del modulo che useremo spesso nel seguito sono :

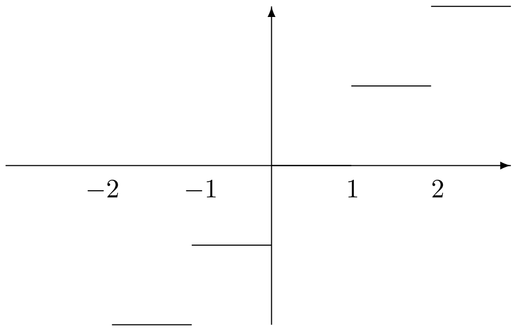
i) $|x| \geq 0 \ \ \forall\, x \in \mathcal{R} \ \ e \ \ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $|x\,y| = |x|\,|y| \ \ \forall\, x\,, y \in \mathcal{R}$,

iii) **Diseguaglianza triangolare**
$$|x+y| \leq |x| + |y| \ \ \forall\, x\,, y \in \mathcal{R}$$

iv) se $r > 0$, allora $|x| \leq r \ \ \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

9. **La funzione parte intera**
Fissato un numero $x \in \mathcal{R}$, esiste un unico $k \in \mathcal{Z}$, tale che $k \leq x < k+1$. Tale unico numero intero k viene chiamato la **parte intera** di x ed indicato col simbolo $[x]$. Il grafico della funzione $f(x) = [x]$ è dato dalla seguente figura:



2.4 Alcune altre formule trigonometriche

a) Usando le proprietà delle funzioni trigonometriche elencate sopra, ricaviamo alcune altre formule di uso comune .

1. **Formula della differenza per il coseno**

$$\cos(x-y) = \cos x\,\cos y + \sin x\,\sin y \quad \forall\, x\,, y \in \mathcal{R}$$

Infatti :

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) = \cos x\,\cos(-y) - \sin x\,\sin(-y) = \cos x\,\cos y + \sin x\,\sin y$$

2. **Formula della somma e della differenza per il seno**

$$\begin{array}{l} \sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \sin y\,\cos x \\ \sin(x-y) = \sin x\,\cos y - \sin y\,\cos x \end{array} \quad \forall\, x\,, y \in \mathcal{R}$$

Infatti, usando le relazioni $\sin x = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$ e $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, si ottiene:

$$\sin(x+y) = -\cos(x+y+\frac{\pi}{2}) = -(\cos(x+\frac{\pi}{2})\,\cos y - \sin(x+\frac{\pi}{2})\,\sin y) =$$

$$= \sin x\,\cos y + \sin y\,\cos x$$

3.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2\,x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2\,x)}{2}$$

Infatti si ha:

$$\cos(2\,x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\,\sin^2 x = 2\,\cos^2 x - 1$$

4.
$$\sin x - \sin y = 2\,\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\,\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\,\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Osserviamo che dalle relazioni:
$$\sin(u+v) = \sin u\,\cos v + \sin v\, cos u$$
$$\sin(u-v) = \sin u\,\cos v - \sin v\, cos u$$
si ottiene, facendo la differenza:
$$\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2\,\sin v\,\cos u$$
Scegliendo infine
$$\begin{cases} u+v=x \\ u-v=y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} u=\frac{x+y}{2} \\ v=\frac{x-y}{2} \end{cases}$$
si ricava la prima formula.
In modo simile si ricava la seconda.

b) Consideriamo ora alcune disuguaglianze in cui interviene il modulo.

1. Determinare l'insieme
$$A = \left\{x \in \mathcal{R}\ ,\ \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le 2\right\}$$
Come abbiamo visto, devono essere verificate contemporaneamente le due disuguaglianze:
$$-2 \le \frac{x+1}{x-1} \le 2$$
Abbiamo quindi
$$\frac{x+1}{x-1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} \ge 0$$
ossia
$$\frac{x+1}{x-1} \le 2 \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$$
D'altra parte
$$\frac{x+1}{x-1} \ge -2 \Leftrightarrow \frac{3\,x-1}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup (1, +\infty)$$
Pertanto
$$A = (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$$

2. Determinare l'insieme
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \ , \ \left| x^2 + x \right| \geq 2\,x + 1 \right\}$$
Osserviamo in primo luogo che se $x^2 + x \geq 0$, ossia se $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$, allora la disuguaglianza diventa $x^2 + x \geq 2\,x + 1$, ossia $x^2 - x - 1 \geq 0$ disuguaglianza che è verificata per valori di x esterni all'intervallo
$$\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$
Possiamo quindi concludere che
$$(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right) \subset A$$
D'altra parte se se $x^2 + x \leq 0$, ossia se $x \in [-1, 0]$, allora la disuguaglianza diventa $-x^2 - x \geq 2\,x + 1$, ossia $x^2 + 3\,x + 1 \leq 0$ disuguaglianza che è verificata per valori di x interni all'intervallo
$$\left[\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$
Pertanto la disuguaglianza vale anche nell'intervallo
$$\left[-1, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$
Ne possiamo concludere che
$$A = \left(-\infty, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

2.5 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 2

1. Sia
$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2} \quad , \ x \in \mathcal{R} \ , \ x \neq 2 \ .$$

   i) Verificare che f è iniettiva ,

   ii) calcolare l'insieme dei valori ,

   iii) determinare la funzione inversa.

   Risulta:
$$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{y + 1}{y - 2} \Leftrightarrow x\,y + y - 2\,x - 2 = x\,y + x - 2\,y - 2 \Leftrightarrow 3\,y = 3\,x$$
   Pertanto la funzione considerata è iniettiva. Fissato $y \in \mathcal{R}$, si ha:
$$y = \frac{x + 1}{x - 2} \Leftrightarrow x\,y - 2\,y = x + 1 \Leftrightarrow x\,(y - 1) = 2\,y + 1 \Leftrightarrow y \neq 1 \quad e \quad x = \frac{2\,y + 1}{y - 1}$$

Ne possiamo concludere che l'insieme dei valori B è dato da

$$B = \{y \in \mathcal{R} \ ; \ y \neq 1\}$$

e la funzione inversa della funzione f è data da

$$g(y) = \frac{2\,y + 1}{y - 1}$$

2. Sia

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2} \quad x \in \mathcal{R}$$

   i) Dire se f é iniettiva;
   ii) Calcolare l'insieme dei valori di f: $f(\mathcal{R})$.

   Se $x\,, y \in \mathcal{R}$, allora

$$f(x) = f(y) \ \Rightarrow x - \sqrt{x^2+2} = y - \sqrt{y^2+2} \Rightarrow x - y = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{y^2+2}$$
$$\Rightarrow x^2 - 2\,x\,y + y^2 = x^2 + 2 + y^2 + 2 - 2\sqrt{x^2+2}\,\sqrt{y^2+2}$$
$$\Rightarrow 2 + x\,y = \sqrt{x^2+2}\,\sqrt{y^2+2} \Rightarrow 4 + 4\,x\,y + x^2\,y^2 = x^2\,y^2 + 2\,x^2 + 2\,y^2 + 4$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2\,x\,y = 0 \Rightarrow x = y$$

   Pertanto la funzione è iniettiva. D'altra parte $y \in f(\mathcal{R})$ se e solo se l'equazione

$$x - \sqrt{x^2+2} = y$$

   ammette almeno una soluzione. Risulta quindi

$$x - \sqrt{x^2+2} = y \Leftrightarrow x - y = \sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x - y \geq 0 \ \ e \ \ x^2 - 2\,x\,y + y^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - y \geq 0\ , \quad y \neq 0 \ \ e \ \ x = \frac{y^2 - 2}{2\,y}$$

   Ottengo infine

$$x - y = \frac{y^2 - 2}{2\,y} - y = \frac{-y^2 - 2}{2\,y}$$

   Pertanto la condizione $x - y \geq 0$ é verificata se e solo se $y < 0$. L'insieme dei valori di f è quindi: $(-\infty, 0)$. Da notare che la funzione

$$g(y) = \frac{y^2 - 2}{2\,y} \quad y < 0$$

   è la funzione inversa di f.

3. Sia

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} \quad x \in \mathcal{R}$$

   i) Dire se f è iniettiva;
   ii) Calcolare l'insieme dei valori di f: $f(\mathcal{R})$.

Se $x\,,y \in \mathcal{R}$, allora

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{y+1}{y^2+y+1}$$

$$\Rightarrow x\,y^2 + x\,y + x + y^2 + y + 1 = x^2\,y + x\,y + y + x^2 + x + 1 \Rightarrow x\,y(y-x) + y^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)\,(x\,y + y + x) = 0$$

Pertanto la funzione non è iniettiva. Infatti l'uguaglianza $f(x) = f(y)$ non vale solo quando $x = y$ ma anche quando $x\,y + y + x = 0$ ossia quando $y = \frac{-x}{x+1}$. Per esempio quindi $f(1) = f\left(\frac{-1}{2}\right)$. D'altra parte $y \in f(\mathcal{R})$ se e solo se l'equazione

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = y$$

ammette almeno una soluzione. Risulta quindi

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = y \Leftrightarrow y\,x^2 + (y-1)\,x + y - 1 = 0$$

Osserviamo ora che se $y = 0$, allora l'equazione diventa di primo grado ed ha la soluzione $x = -1$. D'altra parte se $y \neq 0$ l'equazione ammette almeno una soluzione se e solo se $\Delta(y) = (y-1)^2 - 4\,y\,(y-1) \geq 0$ ossia se e solo se $(y-1)\,(3\,y+1) \leq 0$. L'insieme dei valori è dato dunque dall'intervallo $[-\frac{1}{3}, 1]$.

4. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+2} - x$$

Verificare che f è iniettiva, calcolare l'insieme dei valori di f e scrivere la funzione inversa di f.

Se $x\,,y \in \mathcal{R}$, risulta:

$$\sqrt{x^2+x+2} - x = \sqrt{y^2+y+2} - y \Rightarrow \sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{y^2+y+2} = x - y \Rightarrow$$

$$x^2+x+2+y^2+y+2-2\,\sqrt{x^2+x+2}\,\sqrt{y^2+y+2} = x^2+y^2-2\,x\,y \Rightarrow x+y+2\,x\,y+4 =$$

$$= 2\,\sqrt{x^2+x+2}\,\sqrt{y^2+y+2} \Rightarrow x^2+y^2+4\,x^2\,y^2+16+2\,x\,y+4\,x^2\,y+8\,x+4\,x\,y^2+8\,y+16\,x\,y =$$

$$= 4\,(x^2\,y^2 + x^2\,y + 2\,x^2 + x\,y^2 + x\,y + 2\,x + 2\,y^2 + 2\,y + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\,x^2 + 7\,y^2 - 14\,x\,y = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

Pertanto la funzione è iniettiva. D'altra parte $y \in \mathcal{R}$ sta nell'insieme dei valori di f se e solo se l'equazione (nella x):

$$\sqrt{x^2+x+2} - x = y$$

ammette una soluzione. Risulta

$$\sqrt{x^2+x+2} - x = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} = x+y \Leftrightarrow \;x+y \geq 0 \;\; e \;\; x^2+x+2 = x^2+2\,x\,y+y^2 \Leftrightarrow$$

$$x+y \geq 0 \;\; e \;\; x\,(1-2\,y) = y^2 - 2 \Leftrightarrow \;x+y \geq 0\;,\; 1-2\,y \neq 0 \;\; e \;\; x = \frac{y^2-2}{1-2\,y}$$

Osserviamo infine che

$$x + y = \frac{y^2-2}{1-2\,y} + y = \frac{y^2-2+y-2\,y^2}{1-2\,y} = \frac{-y^2+y-2}{1-2\,y}$$

Pertanto risulta $x + y \geq 0$ se e solo se $1 - 2\,y < 0$, ossia $y > \frac{1}{2}$. L'insieme dei valori della funzione f è dato dunque dall'insieme $B = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

3 SUCCESSIONI

In questo capitolo viene illustrato il concetto di successione, quello di limite di una successione e vengono esposte alcune proprietà del limite di una successione.

3.1 Limiti per successioni

Una funzione $f\ : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$ definita nell'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ viene chiamata **una successione**.
Il valore che una successione ha nel numero naturale n, si indica abitualmente con a_n, ossia :

$$a_n = f(n)\ .$$

Molto importante è la seguente:

Definizione Un numero $a \in \mathcal{R}$ è il limite per n tendente all' infinito di una successione $\{a_n\}$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

se si verifica che:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \nu_\varepsilon \in \mathcal{R}\ \ \text{tale che}\ \ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\ n > \nu_\varepsilon\ .$$

Diremo anche che la successione $\{a_n\}$ è **convergente** e che converge ad a.
Vediamo ora alcuni esempi.

i) Verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\ .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la diseguaglianza:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

è equivalente a

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \ \ \text{ossia}\ \ a\ \ n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Posto quindi

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\ ,$$

la richiesta nella definizione di limite è soddisfatta.

ii) Verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n+1}{n+3} = 2\ .$$

$\forall\ \varepsilon > 0$, si ha:

$$\left|\frac{2\,n+1}{n+3} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{n+3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

Posto quindi

$$\nu_\varepsilon = \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

ottengo che la definizione di limite è verificata, ossia :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{2\,n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu_\varepsilon = \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

iii) Sia $b \in \mathcal{R}$, $b > 0$, verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1 \; .$$

Supponiamo nel ragionamento che segue che sia $b > 1$. (Considerare il caso $0 < b < 1$, dove si ragiona in maniera leggermente diversa, per esercizio).
Se $b > 1$, allora $\sqrt[n]{b} > 1 \;\; \forall\, n \in \mathcal{N}$. Ne deriva quindi che, se $\varepsilon > 0$:

$$\left| \sqrt[n]{b} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{b} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{b} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}\, \log b < \log{(1+\varepsilon)} \Leftrightarrow n > \frac{\log b}{\log{(1+\varepsilon)}} = \nu_\varepsilon$$

Una conseguenza immediata della definizione di limite è il seguente:

Teorema 4.1 (Unicità del limite) Se una successione ha limite, questo è unico. Ossia, se si verifica contemporaneamente che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a' \; ,$$

allora deve essere $a = a'$.

Dimostrazione Supponiamo, ragionando per assurdo, che sia $a \neq a'$ e supponiamo che sia $a < a'$. Allora, scelto $\varepsilon > 0$ con

$$0 < \varepsilon < \frac{a' - a}{2}$$

risulta $a + \varepsilon < a' - \varepsilon$. Dalla definizione di limite, esistono $\nu_\varepsilon \, , \nu'_\varepsilon$ tali che

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu_\varepsilon$$

$$|a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu'_\varepsilon$$

Ottengo allora, se $n > \max\{\nu_\varepsilon \, , \nu'_\varepsilon\}$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$a' - \varepsilon < a_n < a' + \varepsilon$$

e quindi $a' - \varepsilon < a + \varepsilon$ e questo contrasta con la scelta di ε.

Osservazione Una successione può non avere limite. Ad esempio, la successione

$$a_n = (-1)^n$$

non ha limite. Infatti nessun numero $a \in \mathcal{R}$ verifica la condizione richiesta per essere il limite di $\{a_n\}$.

3.2 Successioni convergenti e successioni limitate

Diremo che una successione $\{a_n\}$ è **limitata** se è limitato l'insieme dei suoi valori

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \ ,$$

ossia se esistono due numeri $m\,, M \in \mathcal{R}$ con

$$m \leq a_n \leq M \quad \forall\; n \in \mathcal{N} \ .$$

Da notare che la limitatezza di una successione può essere espressa in maniera equivalente richiedendo che esista $k \in \mathcal{R}$, $k > 0$ con

$$|a_n| \leq k \quad \forall\; n \in \mathcal{N} \ .$$

Vale il seguente:

Teorema 4.2 Ogni successione convergente è limitata .

Dimostrazione Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = 1$, ottengo che

$$\exists\; \nu_1 \in \mathcal{R} \;\; \text{tale che} \;\; |a_n - a| < 1 \quad \forall\; n > \nu_1$$

e quindi $\forall\; n > \nu_1$:

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

Posto ora $h = [\nu_1]$ (dove $[x]$ indica la parte intera di x), se indichiamo con

$$k = \max\{|a_1|\,, |a_2|\,, |a_3|\,, \ldots, |a_h|\,, |a| + 1\}$$

risulta allora

$$|a_n| \leq k \quad \forall\; n \in \mathcal{N}$$

Osservazione Il viceversa del teorema precedente non vale, ossia una successione può essere limitata senza essere convergente. Un esempio semplice è dato dalla successione

$$a_n = (-1)^n \ .$$

3.3 Operazioni coi limiti

Cominciamo con il dimostrare il seguente:

Teorema 4.3 Supponiamo che a_n sia una successione limitata e che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = 0$$

Dimostrazione Sia $k > 0$ tale che $|a_n| \leq k \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ posto

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k}$$

dalla definizione di limite, si ha che $\exists\, \nu_{\varepsilon'}$ tale che

$$|b_n| < \varepsilon' \quad \forall n > \nu_{\varepsilon'}$$

Ne deriva quindi, $\forall n > \nu_{\varepsilon'}$:

$$|a_n\, b_n| \leq k\, \varepsilon' = \varepsilon$$

Teorema 4.4 Supponiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\ .$$

Allora

i)
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\ ;$$

ii)
$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = a\, b\ ;$$

iii) se $b_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$ e $b \neq 0$, allora
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\ .$$

Dimostrazione

i) Esercizio.

ii) Osserviamo che si ha :

$$a_n\, b_n - a\, b = a_n\, b_n - a_n\, b + a_n\, b - a\, b = a_n\, (b_n - b) + b\, (a_n - a)$$

Ora a_n, essendo una successione convergente, è anche limitata e dalle ipotesi

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - b) = \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$$

Pertanto, per il teorema 4.3, risulta:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n - a\, b) = \lim_{n\to\infty} a_n\, (b_n - b) + \lim_{n\to\infty} b\, (a_n - a) = 0$$

iii) Basta dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

Infatti possiamo poi applicare la regola sul limite del prodotto e ottenere:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n\, \frac{1}{b_n} = a\, \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

D'altra parte, essendo:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b\,b_n} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{b_n}\,(b - b_n)$$

sempre per il teorema 4.3, basta dimostrare che la successione

$$\frac{1}{b_n}$$

è limitata. Supponendo $b > 0$, dalla definizione di limite con $\varepsilon = \frac{b}{2}$, si ottiene che esiste $\nu \in \mathcal{R}$ tale che:

$$|b_n - b| < \frac{b}{2} \quad \forall\, n > \nu$$

e quindi $\forall\, n > \nu$:

$$b_n > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

Pertanto, $\forall n > \nu$:

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| = \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$$

Indicando infine con $h = [\nu]$ e con

$$k = \max\left\{\left|\frac{1}{b_1}\right|, \left|\frac{1}{b_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{b_h}\right|, \frac{2}{b}\right\}$$

si ottiene che

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq k$$

3.4 Teoremi di confronto

1. **Teorema della permanenza del segno** Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

e che sia $a \neq 0$. Allora $\exists\, \nu \in \mathcal{R}$ tale che $a_n\, a > 0 \;\; \forall\, n > \nu$.
Dimostrazione Supponiamo che sia $a > 0$. Applicando la definizione di limite con la scelta

$$\varepsilon = \frac{a}{2}$$

ottengo che esiste $\nu \in \mathcal{R}$ tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a}{2} \quad \forall\, n > \nu$$

Ne deriva quindi, che se $n > \nu$

$$a_n > a - \varepsilon = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

2. **Teorema dei due carabinieri** Supponiamo che $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ siano tre successioni verificanti le ipotesi :

i)
$$a_n \le b_n \le c_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N} \;;$$

ii) esistono i limiti
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c$$
e sono uguali, ossia $a = c$. Allora esiste anche il limite
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b$$
e risulta $b = a = c$.

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Sia $q \in (0,1)$, allora
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$
(Esercizio)

2. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)$$
Razionalizzando, si ottiene
$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n\,\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\,\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$
Ne deriva quindi che
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right) = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}\ .$$

3. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right)$$
Razionalizzando anche questa volta, risulta:
$$n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right) = \frac{n\,\left(1+\frac{2}{n}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$
Se ne conclude che
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right) = 1$$

4. Verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
Usiamo il seguente artificio. Poniamo
$$a_n = \sqrt[n]{n} \quad e \quad b_n = \sqrt{a_n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$$

e calcoliamo prima il limite

$$\lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Osserviamo che risulta $b_n \geq 1 \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$, pertanto se poniamo $c_n = b_n - 1$, si ha che $c_n \geq 0 \ \ \forall\ n \in \mathcal{N}$. D'altra parte, risulta

$$(1 + c_n)^n = b_n^n = \sqrt{n}$$

e quindi, usando la diseguaglianza di Bernoulli, si ottiene:

$$\sqrt{n} = (1 + c_n)^n \geq 1 + n\, c_n$$

ossia

$$0 \leq c_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 1 \ .$$

Osservazione Nello svolgere alcuni degli esercizi precedenti, abbiamo usato il seguente fatto generale, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.
Se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

e $a_n \geq 0 \ \ \forall\, n \in \mathcal{N}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

Esercizio Usando il teorema della permanenza del segno, verificare che se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni con

i) $a_n \leq b_n \ \ \forall\ n \in \mathcal{N}$,

ii) esistono i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \ ,$$

allora deve essere $a \leq b$.

Da notare inoltre che anche se nella i) vale la diseguaglianza stretta, ossia se $a_n < b_n \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$, può essere $a = b$.

3.5 Limiti infiniti

Diremo che una successione $\{a_n\}$ ha limite $+\infty$ e scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se si verifica che:

$$\forall\ M \in \mathcal{R} \ \ \exists\ \nu_M \in \mathcal{R} \ \ \textit{tale che} \ \ a_n > M \ \ \forall\ n > \nu_M \ .$$

In modo simile scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

se si verifica che:
$$\forall\ M \in \mathcal{R}\ \ \exists\ \nu_M \in \mathcal{R}\ \ tale\ che\ \ a_n < M\ \ \forall\ n > \nu_M\ .$$
Se si verifica uno dei due casi considerati diremo anche che la successione $\{a_n\}$ **diverge a $+\infty$ o a $-\infty$**.

Osservazione Vale la pena confrontare le due definizioni di successione con limite $+\infty$ e di successione non limitata superiormente, per metterne in evidenza la differenza.

i) Una successione ha limite $+\infty$ se
$$\forall\ M \in \mathcal{R}\ \ \exists\ \nu_M \in \mathcal{R}\ \ tale\ che\ \ a_n > M\ \ \forall\ n > \nu_M$$

ii) Una successione invece non è limitata superiormente se
$$\forall\ M \in \mathcal{R}\ \ \exists\ n_M \in \mathcal{N}\ \ tale\ che\ \ a_{n_M} > M$$

Pertanto se una successione a_n ha limite $+\infty$ è anche non superiormente limitata; mentre una successione può essere non superiormente limitata senza avere limite $+\infty$, come è ad esempio la successione:
$$a_n = (-1)^n\, n$$
Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Verificare che, se $q \in \mathcal{R}$ e $q > 1$, allora
$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$$
Infatti, fissato $M \in \mathcal{R}$ (che possiamo supporre positivo), si ha:
$$q^n > M \Leftrightarrow n\, \log q > \log M \Leftrightarrow n > \frac{\log M}{\log q} = \nu_M\ .$$

2. Verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{1+n} = -\infty$$
Fissato $M \in \mathcal{R}$, risulta
$$\frac{n-n^2}{1+n} < M \Leftrightarrow n - n^2 < M + n\, M \Leftrightarrow n^2 + (M-1)\, n + M > 0$$
Ora il Δ del polinomio di secondo grado (in n) trovato è dato da
$$\Delta(M) = (M-1)^2 - 4\, M = M^2 - 6\, M + 1$$
Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado (in M), sono date da
$$M_1 = 3 - 2\sqrt{2}\ \ e\ \ M_2 = 3 + 2\sqrt{2}$$
Ne deriva quindi che se $M \leq M_1$ 0 se $M \geq M_2$ allora $\Delta(M) \geq 0$ e quindi la disuguaglianza iniziale (nella variabile n) è verificata se
$$n > \frac{1 - M + \sqrt{\Delta(M)}}{2} = \nu_M$$
Da notare infine che se $M \in (M_1, M_2)$, allora $\Delta(M) < 0$ e quindi la disuguaglianza iniziale in n è verificata $\forall\ n \in \mathcal{N}$.

3. Verificare che se $q \in \mathcal{R}$ e $q > 1$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty \ .$$

Scrivendo $q = 1 + b$ con $b > 0$, usando la formula del binomio di Newton, si ottiene se $n \geq 3$

$$q^n = (1+b)^n = 1 + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) b + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) b^2 + \sum_{k=3}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) b^k > 1 + n\, b + \frac{n(n-1)}{2}\, b^2$$

Ne deriva quindi che

$$\frac{q^n}{n} > \frac{1}{n} + b + \frac{n-1}{2}\, b^2$$

e da questa disuguaglianza si ricava appunto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty \ .$$

4. Verificare che se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad o \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Verificare inoltre che

i) se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad e \quad a_n > 0 \ \ \forall\, n \in \mathcal{N}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

ii) se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad e \quad a_n < 0 \ \ \forall\, n \in \mathcal{N}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$$

3.6 Forme indeterminate

Quando si fanno operazioni coi limiti e uno o entrambi sono $+\infty$ o $-\infty$, bisogna fare attenzione perchè in alcuni casi non si può stabilire, con una regola generale, quanto venga il limite della somma, del prodotto e del quoziente.
Supponiamo, per esempio, che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

(dove b puó essere un numero reale o anche $+\infty$ o $-\infty$). Allora

i) se $b \neq -\infty$ (ossia se $b \in \mathcal{R}$ o $b = +\infty$), si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty \ ;$$

ii) se $b \neq 0$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b \in \mathcal{R} \ \ b > 0 \text{ o } b = +\infty \\ -\infty & \text{se } b \in \mathcal{R} \ \ b < 0 \text{ o } b = -\infty \end{cases} \ ;$$

iii) se $b \in \mathcal{R}$ e $b \neq 0$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases} \ .$$

Per quanto riguarda le altre possibilità che si possono verificare, non è possibile in generale dire quanto viene il limite della somma, del prodotto e del quoziente in quanto il risultato dipende dalle particolari successioni che si stanno considerando e, in generale, varia al variare delle successioni che intervengono nel limite.
Per questa ragione, limiti di questo tipo vengono chiamati **"forme indeterminate"**. Esse, in particolare, si presentano quando si hanno limiti del tipo :

$$+\infty + (-\infty) \ ; \ 0 \cdot (+\infty) \ ; \ 0 \cdot (-\infty) \ ; \frac{0}{0} \ ; \ \frac{+\infty}{+\infty} \ , \ \frac{+\infty}{-\infty} \ .$$

Vediamo ora alcuni esempi.

3.7 Alcuni esercizi

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(\frac{n}{2^n}+1\right)}{3^n\left(\frac{n^2}{3^n}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\frac{n}{2^n}+1}{\frac{n^2}{3^n}+1} = 0\,\frac{0+1}{0+1} = 0 \ .$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} 2\,\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^n}+\frac{1}{2^n}} = 2 \ .$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2\sqrt{n}}{2\,n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} \ .$$

4. Verificare che se $\{a_n\}$ è una successione con

$$a_n > 0 \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathcal{R} \ \ con \ \ a > 0$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \ .$$

Dim. Essendo $a > 0$, posso trovare $\nu \in \mathcal{R}$ tale che

$$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \ \ \forall\, n > \nu$$

Ne deriva quindi se $n > \nu$:
$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}\,a}$$
Il risultato segue allora dal teorema dei due carabinieri, ricordando che:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}\,a} = 1$$

5. Calcolare il:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + n^2}$$
Usando la formula del binomio, possiamo scrivere il numeratore nel modo seguente:
$$(n+1)^4 - (n-1)^4 = n^4 + 4\,n^3 + 6\,n^2 + 4\,n + 1 - (n^4 - 4\,n^3 + 6\,n^2 - 4\,n + 1) = 8\,n^3 + 8\,n$$
Pertanto
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\,n^3 + 8\,n}{n^3 + n^2} = 8$$

6. Verificare che se $a \in \mathcal{R}$ verifica la diseguaglianza $a > 1$, allora
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\ .$$
Sia $k = [a]$ e $n > k + 1$, allora:
$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} = \frac{a^k}{k!}\,\frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}$$
Siccome $\frac{a}{k+1} < 1$, si ricava che
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k} = 0\ .$$

7. Verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$
Sia k un numero naturale e sia $n > k$, allora:
$$n! = (k-1)!k(k+1)\cdots n > (k-1)!\,k^{n-k+1}$$
Pertanto
$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{(k-1)!}\ \sqrt[n]{k^{1-k}} \cdot k$$
Siccome abbiamo visto che $\forall\ a > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$
possiamo trovare un numero $\nu_1 \in \mathcal{R}$ tale che $\forall\ n > \nu_1$. si ha
$$\sqrt[n]{(k-1)!} > \frac{1}{2} \quad e \quad \sqrt[n]{k^{1-k}} > \frac{1}{2}\ .$$

Ne deriva quindi che $\forall\, n > \max\{\nu_1, k\}$, si ha :

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{k}{4}$$

e quindi vale l'affermazione iniziale.

8. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2\,n^2 - n + 10} - n\right)$$
Razionalizzando, si ottiene:
$$\left(\sqrt{2\,n^2 - n + 10} - n\right) = \frac{2\,n^2 - n + 10 - n^2}{\sqrt{2\,n^2 - n + 10} + n} = \frac{n^2 - n + 10}{\sqrt{2\,n^2 - n + 10} + n}$$
Ne deriva quindi che
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2\,n^2 - n + 10} - n\right) = +\infty$$

9. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n\right)$$
Razionalizzando, anche in questo caso, otteniamo
$$\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n\right) = \frac{n^3 + n + 1 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1}\right)^2 + n\,\sqrt[3]{n^3 + n + 1} + n^2}$$
(abbiamo usato la formula
$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + a\,b + b^2) \ \ )$$
Possiamo quindi concludere che
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n\right) = 0$$

10. A volte, per calcolare alcuni tipi di limite è utile il seguente criterio:

    Criterio del rapporto Supponiamo che a_n sia una successione di numeri positivi e che esista il limite
    $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$
    dove L può essere un numero reale o anche $+\infty$. Allora:

    - se $L < 1$, si ha
    $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
    - se $L > 1$ si ha
    $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$
    - esiste anche il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$ e risulta
    $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(Provare di dimostrare questa affermazione per esercizio. Una dimostrazione verrà riportata poi alla fine del capitolo.)

Vediamo un esempio il cui il criterio del rapporto si può applicare. Supponiamo infatti di dover calcolare il seguente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\, n!}{(3\,n)!}$$

In questo caso risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(3\,n+3)!}\,\frac{(3\,n)!}{2^n\, n!} = \frac{2\,(n+1)}{(3\,n+1)\,(3\,n+2)\,(3\,n+3)}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

e quindi, per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\, n!}{(3\,n)!} = 0$$

3.8 Successioni monotone

Sia $\{a_n\}$ una successione. Diremo che :

i) $\{a_n\}$ è strettamente crescente se $a_{n+1} > a_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$,

ii) $\{a_n\}$ è crescente se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$,

iii) $\{a_n\}$ è strettamente decrescente se $a_{n+1} < a_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$,

iv) $\{a_n\}$ è decrescente se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$.

Diremo che $\{a_n\}$ è una successione **monotona** se gode di una delle proprietà elencate sopra. Per le successioni monotone vale il seguente:
Teorema Se $\{a_n\}$ è una successione monotona, allora esiste (finito o infinito) il

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

Dimostrazione Supponiamo che $\{a_n\}$ sia crescente ed indichiamo con A l'insieme dei suoi valori, ossia

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

Verifichiamo ora che :

1) Se A non è superiormente limitato, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ ,$$

2) Se A è superiormente limitato, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\, A \ .$$

Supponiamo dunque che A non sia superiormente limitato, allora $\forall\ M \in \mathcal{R}\ \ \exists\ \overline{n} \in \mathcal{N}$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Essendo la successione crescente se $n > \overline{n}$ allora $a_n \geq a_{\overline{n}} > M$. Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ .$$

Se invece A è superiormente limitato, dalle proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, otteniamo:

i) $a_n \leq a\ \ \forall\ n \in \mathcal{N}$,

ii) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ n_\varepsilon \in \mathcal{N}$ tale che $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$.

Essendo la successione crescente se $n > n_\varepsilon$

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$$

Possiamo concludere pertanto che, se $n > n_\varepsilon$

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\ .$$

3.9 Esempi importanti: il numero di Nepero

Sia

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Verifichiamo che la successione $\{a_n\}$ è strettamente crescente, provando che

$$a_{n-1} < a_n\ \ \forall\ n \in \mathcal{N}\ \ n \geq 2$$

Infatti

$$a_{n-1} < a_n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Ricordiamo ora che la diseguaglianza di Bernoulli afferma che, se $n \geq 2$ e $x \geq -1$, $x \neq 0$, allora :

$$(1+x)^n > 1 + n\,x\ .$$

Scegliendo infine $x = -\frac{1}{n^2}$, otteniamo :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

che è proprio l'ultima diseguaglianza della sequenza di diseguaglianze equivalenti che abbiamo ottenuto.

Consideriamo anche una seconda successione definita da:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e verifichiamo che tale successione è strettamente decrescente, provando che

$$b_n < b_{n-1} \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\ n \geq 2$$

Infatti

$$b_n < b_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n+1}{n} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n}$$

Usando ancora la diseguaglianza di Bernoulli, con la scelta $x = \frac{1}{n^2-1}$ (con $n \geq 2$), otteniamo :

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n} > 1 + \frac{n}{n^2-1}$$

Otteniamo infine l'ultima diseguaglianza della sequenza di diseguaglianze precedenti, osservando che :

$$1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}\ .$$

Da notare infine che

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

e pertanto risulta

$$a_n < b_n \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva che $a_n < b_1 = 4 \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$ e che $b_n > a_1 = 2 \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$, ossia $\{a_n\}$ é limitata superiormente, mentre $\{b_n\}$ é limitata inferiormente. Esistono quindi i limiti :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dalla relazione che abbiamo giá notato, ossia

$$b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

risulta che i due limiti sono uguali ($a = b$). Tale limite verrá indicato nel seguito con la lettera e (**numero di Nepero**). Pertanto risulta

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ed inoltre valgono le diseguaglianze :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\ .$$

Un terzo limite importante che vogliamo mettere in evidenza é il seguente

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Con alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

3.10 Sottosuccessioni e teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{a_n\}$ una data successione. Diremo che $\{b_n\}$ è una **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ o una **successione estratta** da $\{a_n\}$ se esiste una successione strettamente crescente di numeri naturali $\{k_n\}$ tale che

$$b_n = a_{k_n} \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\ .$$

Ad esempio, se poniamo $k_n = 2\,n$, otteniamo la sottosuccessione

$$b_n = a_{2\,n}$$

che viene chiamata la sottosuccessione dei termini di posto pari. Analogamente si può considerare la sottosuccessione dei termini di posto dispari

$$c_n = a_{2\,n-1} \quad n \in \mathcal{N}\ .$$

Vale il seguente :

Teorema Supponiamo che una successione $\{a_n\}$ abbia limite (finito o $\pm\infty$) e supponiamo che $\{b_n\}$ sia una sottosuccessione di $\{a_n\}$, allora $\{b_n\}$ ha lo stesso limite di $\{a_n\}$.

Dimostrazione Supponiamo che sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathcal{R}\ .$$

e che $\{k_n\}$ sia la successione strettamente crescenti di numeri naturali tali che

$$b_n = a_{k_n}$$

Osserviamo, in primo luogo, che essendo $\{k_n\}$ una successione strettamente crescenti di naturali, risulta

$$k_n \geq n \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\ .$$

D'altra parte, dalla definizione di limite, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu_\varepsilon$$

Ora, se $n > \nu_\varepsilon$, risulta pure $k_n \geq n > \nu_\varepsilon$ e quindi

$$|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon \ .$$

Osservazione Dal teorema precedente si deduce che, se da una successione $\{a_n\}$, è possibile estrarre due sottosuccessioni con limiti diversi, allora la successione di partenza non ha limite. Per esempio, supponiamo di dover calcolare

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \, \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2\,n + 3}$$

Posto $b_n = a_{2\,n}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4\,n^2 + 2\,n + 1}{4\,n^2 + 4\,n + 3} = 1 \ .$$

D'altra parte, posto $c_n = a_{2\,n-1}$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{(2\,n-1)^2 + 2\,n}{(2\,n-1)^2 + 4\,n + 1} = -1 \ .$$

Possiamo concludere quindi che il limite di partenza non esiste.

Abbiamo già osservato che ogni successione convergente (ossia con limite finito) è anche limitata ma che in generale non vale il viceversa, ossia una successione può essere limitata senza essere convergente, come mostra l'esempio $a_n = (-1)^n$.

Vale però il seguente importante teorema:

Teorema di Bolzano-Weierstrass Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Allora si può estrarre da $\{a_n\}$ una sottosuccessione convergente.

3.11 Eercizi di ripasso

Questo capitolo contiene alcuni esercizi di ripasso sugli argomenti svolti fino ad ora. La risoluzione di tali esercizi si può trovare alla fine del capitolo.

1. Determinare l'insieme
$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \ ; \ \frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \right\} \ .$$

2. Risolvere la seguente disuguaglianza
$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2\,x + 1$$

3. Risolvere la disuguaglianza
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} \leq 5 \ .$$

4. Determinare l'insieme:
$$A = \{x \in \mathcal{R} \ , \ 1 + 2\,x \leq \sqrt{x - x^2 + 2}\} \ .$$

5. Risolvere la seguente disuguaglianza
$$2\sqrt{x^2+x-2} > x+3$$

6. Sia
$$A = \left\{ \frac{2\,n+5}{n+1}\ ;\ n \in \mathcal{N} \right\}\ .$$
Verificare che $\sup\,A = \max\,A = \frac{7}{2}$ e $\inf\,A = 2$.

7. Sia
$$A = \left\{ \frac{x^2+x+1}{x^2}\ \ ,\ x \in \mathcal{R}\quad x \neq 0 \right\}$$
Verificare che

   A non è superiormente limitato,
   Calcolare $\inf\,A$ e dire se è minimo.

8. Sia
$$A = \left\{ \frac{x^2+6\,x+1}{x^2+1}\ ;\ x \in \mathcal{R} \right\}\ .$$
Dire se A è superiormente limitato.

9. Sia $A = \{x \in \mathcal{R}\ ; x \neq 1\}$ ed $f\ : A \to \mathcal{R}$ la funzione definita dalla legge
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$
Sia $B = f(A)$. Verificare che :
   i) B non è nè superiormente nè inferiormente limitato;
   ii) $B = \mathcal{R} - \{1\}$;
   iii) $f\ : A \to B$ è iniettiva.

10. Calcolare i limiti:
$$i)\ \ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2\,n}-\sqrt{n^2-1}\right);\quad ii)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$$
$$iii)\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n^2+n^3\,2^n};\quad iv)\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{n\,2^n}{n+2^n}$$
$$v)\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{n+5^n};\quad vi)\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5-(n-1)^5}{n^4}$$

11. Sia
$$A = \left\{ \frac{n+2\sqrt{n}}{n+1}\ ;\ n \in \mathcal{N} \right\}\ .$$
Verificare che A é inferiormente limitato e calcolare $\inf\,A$.

12. Risolvere la seguente diseguaglianza:
$$\frac{2\,x^2+x}{x-2} < x-3$$

13. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2 - x + 1} \ ; \ x \in \mathcal{R} \right\}$$

Calcolare sup A.

14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

15. Esempi di due prove parziali scritte date in classe in anni precedenti.
PROVA A

1) Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x^2 + 2\,x}{x+1} > 2\,x - 1$$

2) Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n \ \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare inf A e sup A e dire se sono minimo e massimo di A.

3) Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad x \in \mathcal{R} \ , \ x \neq 1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f.

4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} \ \ ; \ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 6\,n + 1} - n \right) \ \ ; \ \lim_{n\to\infty} n \, \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ .$$

PROVA B

1) Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x^2 - x}{x+2} > 2\,x - 3$$

2) Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 2\,n} - n \ \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare inf A e sup A e dire se sono minimo e massimo di A.

3) Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \quad x \in \mathcal{R} \ , \ x \neq -1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f.

4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} \ \ ; \ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4\,n + 6} - n \right) \ \ ; \ \lim_{n\to\infty} n \, \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}} \ .$$

3.12 Dimostrazione del criterio del rapporto.

i) Poniamo $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$, essendo $L < 1$, risulta $\varepsilon > 0$ ed inoltre:

$$L + \varepsilon = L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} = q < 1$$

Dalla definizione di limite, posso trovare $m \in \mathcal{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = q \quad \forall\, n \geq m$$

ossia

$$a_{n+1} < q\, a_n \quad \forall\, n \geq m$$

Applicando ripetutamente questa diseguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&a_{m+1} < q\, a_m \\
&a_{m+2} < q\, a_{m+1} < q^2\, a_m \\
&a_{m+3} < q\, a_{m+2} < q^3\, a_m \\
&\vdots \\
&a_{m+h} < q\, a_{m+h-1} < q^h\, a_m
\end{aligned}$$

Se poniamo infine $n = m + h$, otteniamo

$$a_n < q^{n-m}\, a_m \quad \forall\, n \in \mathcal{N}\,,\ n \geq m+1$$

Siccome $q \in (0,1)$, q^n tende a zero quando n tende all'infinito. Per il teorema dei due carabinieri si ottiene allora che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ii) Si ragiona nello stesso modo con ovvie modifiche.

iii) Verifichiamo l'affermazione nel caso che $L \in \mathcal{R}$ sia positivo, essendo il caso $L = +\infty$ e il caso $L = 0$ più semplici. Fissato $\varepsilon \in (0, L)$ sia $m = m_\varepsilon$ un numero naturale tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \forall\, n \geq m$$

Ragionando per induzione, verifichiamo ora che valgono le diseguaglianze:

$$(L-\varepsilon)^{n-m}\, a_m < a_n < (L+\varepsilon)^{n-m}\, a_m \quad \forall\, n \geq m+1$$

Infatti, se $n = m+1$, la diseguaglianza deriva subito da

$$L - \varepsilon < \frac{a_{m+1}}{a_m} < L + \varepsilon$$

moltiplicando per a_m che è positivo. Supposta ora la doppia diseguaglianza vera per $n \geq m+1$, osserviamo che:

$$a_{n+1} < (L+\varepsilon)\, a_n < (L+\varepsilon)\,(L+\varepsilon)^{n-m}\, a_m = (L+\varepsilon)^{n+1-m}\, a_m$$

$$a_{n+1} > (L-\varepsilon)\, a_n > (L-\varepsilon)\,(L-\varepsilon)^{n-m}\, a_m = (L-\varepsilon)^{n+1-m}\, a_m$$

Estraendo la radice n-esima, ottengo:

$$(L-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L-\varepsilon)^m}} < \sqrt[n]{a_n} < (L+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L+\varepsilon)^m}} \quad \forall\, n \geq m+1$$

Ricordiamo infine che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L-\varepsilon)^m}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L+\varepsilon)^m}} = 1$$

esistono quindi due numeri naturali $m' = m'_\varepsilon$ ed $m'' = m''_\varepsilon$ tali che:

$$\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L-\varepsilon)^m}} > 1-\varepsilon \quad \forall\, n \geq m'$$

$$\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L+\varepsilon)^m}} < 1+\varepsilon \quad \forall\, n \geq m''$$

Possiamo quindi concludere che, $\forall\, n \geq \max\{m, m', m''\}$, valgono le diseguaglianze:

$$(L-\varepsilon)\,(1-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (L+\varepsilon)\,(1+\varepsilon)$$

e quindi vale la tesi.

3.13 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 3

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{x \in \mathcal{R}\ ;\ \frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2}\right\}\ .$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\,x+2-x+3}{2\,(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{2\,(x-3)} < 0$$

Pertanto $A = (-5, 3)$.

2. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$\frac{x^2-x}{x+2} > 2\,x+1$$

Risulta

$$\frac{x^2-x}{x+2} > 2\,x+1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2\,x^2-4\,x-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6\,x+2}{x+2} < 0$$

Il numeratore si annulla per $x_{12} = -3 \mp \sqrt{7}$ e quindi ottengo:

$$\underset{-3-\sqrt{7}\qquad\qquad\qquad -3+\sqrt{7}}{\underline{+\ +\ +\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ +\ +\ +}} \qquad \text{Segno del numeratore}$$

$$\underset{-2}{\underline{-\ -\ -\ -\ +\ +\ +\ +}} \qquad \text{Segno del denominatore}$$

Pertanto la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -3-\sqrt{7}) \cup (-2, -3+\sqrt{7})\ .$$

3. Risolvere la disuguaglianza
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}\leq 5\ .$$
Osserviamo che deve essere $x\geq 1$. Elevando al quadrato otteniamo:
$$x-1+x+4+2\sqrt{(x-1)(x+4)}\leq 25\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(x+4)}\leq 11-x$$
Deve quindi essere anche $11-x\geq 0$ ossia $x\leq 11$. Infine elevando ancora al quadrato, ottengo:
$$x^2+4\,x-x-4\leq 121+x^2-22\,x\Leftrightarrow 25\,x\leq 125\Leftrightarrow x\leq 5$$
Possiamo infine concludere che la diseguaglianza vale se e solo se $x\in[1,5]$.

4. Determinare l'insieme:
$$A=\{x\in\mathcal{R}\ ,\ 1+2\,x\leq\sqrt{x-x^2+2}\}\ .$$
Affinchè la radice sia definita, deve essere $x-x^2+2\geq 0$, ossia $x^2-x-2\leq 0$. Essendo $\Delta=1+8$, deve essere $x\in[-1,2]$. D'altra parte, se $1+2\,x\leq 0$, la diseguaglianza è vera. Pertanto $[-1,-\frac{1}{2}]\subset A$. Infine se $x\in(-\frac{1}{2},2]$, elevando al quadrato, ottengo:
$$1+2\,x\leq\sqrt{x-x^2+2}\Leftrightarrow 1+4\,x^2+4\,x\leq x-x^2+2\Leftrightarrow 5\,x^2+3\,x-1\leq 0$$
Ora l'ultimo polinomio di secondo grado ha $\Delta=9+20=29$ e quindi le sue radici sono:
$$x_{1\,2}=\frac{-3\mp\sqrt{29}}{10}$$
Quindi, affinchè l'ultima diseguaglianza sia verificata, deve essere $x_1\leq x\leq x_2$. Osserviamo infine che $-1<x_1<-1/2$ e che $x_2<2$. Pertanto
$$A=\left[-1,\frac{-3+\sqrt{29}}{10}\right]$$

5. Risolvere la seguente disuguaglianza
$$2\sqrt{x^2+x-2}>x+3$$
Osserviamo, in primo luogo che il radicando deve essere non negativo ed essendo le sue radici $\frac{-1\mp\sqrt{1+8}}{2}$ ossia $x_1=-2$ e $x_2=1$, deve essere $x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$. D'altra parte se $x+3<0$ ossia se $x<-3$ la disuguaglianza è verificata (essendo in tal caso il primo membro non negativo ed il secondo negativo). Infine se $x+3\geq 0$, ossia se $x\geq -3$, risulta
$$2\sqrt{x^2+x-2}>x+3\Leftrightarrow 4\left(x^2+x-2\right)>x^2+6\,x+9\Leftrightarrow 3\,x^2-2\,x-17>0$$
Questa ultima disuguaglianza è verificata infine se $x\in(-\infty,\frac{1-\sqrt{52}}{3})\cup(\frac{1+\sqrt{52}}{3},+\infty)$. Siccome $-3<\frac{1-\sqrt{52}}{3})<-2$, possiamo concludere che la disuguaglianza iniziale è verificata se
$$x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{52}}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{52}}{3},+\infty\right)\ .$$

6. Sia
$$A=\left\{\frac{2\,n+5}{n+1}\ ;\ n\in\mathcal{N}\right\}\ .$$
Verificare che sup $A=$ max $A=\frac{7}{2}$ e inf $A=2$.
Osserviamo che $\frac{7}{2}\in A$ in quanto tale valore si ottiene dalla definizione di A scegliendo $n=1$. Pertanto $\frac{7}{2}=$ max A se e solo se
$$\frac{2\,n+5}{n+1}\le\frac{7}{2}\quad\forall\,n\in\mathcal{N}\ \ .$$
Risulta:
$$\frac{2\,n+5}{n+1}\le\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{4\,n+10-7\,n-7}{2\,(n+1)}\le 0\Leftrightarrow\frac{3\,n-3}{2\,(n+1)}\ge 0\Leftrightarrow n\ge 1$$
D'altra parte
$$\frac{2\,n+5}{n+1}\ge 2\Leftrightarrow\frac{2\,n+5-2\,n-2}{n+1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{3}{n+1}\ge 0$$
Pertanto 2 verifica la prima proprietà caratteristica dell' inf. Sia ora $\eta\in\mathcal{R}$ con $\eta>2$, allora:
$$\frac{2\,n+5}{n+1}<\eta\Leftrightarrow\frac{2\,n+5-\eta\,n-\eta}{n+1}<0\Leftrightarrow\frac{(\eta-2)\,n+\eta-5}{n+1}>0\Leftrightarrow n>\frac{5-\eta}{\eta-2}$$
e quindi 2 verifica anche la seconda proprietà caratterstica dell'inf.

7. Sia
$$A=\left\{\frac{x^2+x+1}{x^2}\quad ,\ x\in\mathcal{R}\quad x\ne 0\right\}$$
Verificare che

- A non è superiormente limitato,
- Calcolare inf A e dire se è minimo.

Sia $b\in\mathcal{R}$ con $b>1$ e verifichiamo che la disuguaglianza
$$\frac{x^2+x+1}{x^2}>b$$
ammette almeno una soluzione. Infatti risulta
$$\frac{x^2+x+1}{x^2}>b\Leftrightarrow x^2+x+1>b\,x^2\Leftrightarrow(b-1)\,x^2-x-1<0$$
Osserviamo che $\Delta=1+4\,(b-1)>0$ e quindi la disuguaglianza è verificata se
$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{\Delta}}{2\,(b-1)},\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2\,(b-1)}\right)\quad ,\quad x\ne 0\ .$$
D'altra parte $d\in\mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se
$$\frac{x^2+x+1}{x^2}\ge d\quad\forall\,x\in\mathcal{R}\quad ,\quad x\ne 0$$

Osserviamo ora che
$$\frac{x^2+x+1}{x^2} \geq d \Leftrightarrow (1-d)\,x^2+x+1 \geq 0$$
Deve quindi essere (ricordando che richiedo che la disuguaglianza sia vera per ogni $x \neq 0$)
$$1-d>0 \quad e \quad \Delta = 1-4\,(1-d) = 4\,d-3 \leq 0 \quad ossia \quad d \leq \frac{3}{4}$$
Pertanto $d=\frac{3}{4}$ é il piú grande dei minoranti e quindi, per definizione, è l'estremo inferiore dell'insieme A. Da notare infine che $\frac{3}{4} \in A$ (si ottiene per $x=-2$) e quindi $\frac{3}{4} = \max A$.

8. Sia
$$A = \left\{ \frac{x^2+6\,x+1}{x^2+1} \;;\; x \in \mathcal{R} \right\} \;.$$
Dire se A è superiormente limitato.
Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se
$$\frac{x^2+6\,x+1}{x^2+1} \leq b \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$
Osserviamo anche che, ponendo $x=0$, si ottiene che deve essere $b \geq 1$. D'altra parte
$$\frac{x^2+6\,x+1}{x^2+1} \leq b \Leftrightarrow (b-1)\,x^2-6\,x+b-1 \geq 0$$
Risulta quindi che b è maggiorante se e solo se $\Delta(b) = 36-4\,(b-1)^2 \leq 0$ e quindi se e solo se $b^2-2\,b-8 \geq 0$. Essendo $\Delta = 4+32$ e
$$b_{1\,2} = \frac{2 \mp 6}{2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$
si ottiene che b è maggiorante se e solo se $b \geq 4$. Allora $4 = \sup A$. Notiamo infine che per $x=1$, si ottiene anche che $4 \in A$ e quindi $4 = \max A$.

9. Sia $A = \{x \in \mathcal{R} \,; x \neq 1\}$ ed $f\,:A \to \mathcal{R}$ la funzione definita dalla legge
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$
Sia $B = f(A)$. Verificare che :
   - i) B non è nè superiormente nè inferiormente limitato;
   - ii) $B = \mathcal{R} - \{1\}$;
   - iii) $f\,:A \to B$ è iniettiva.

Sia $\lambda \in \mathcal{R}$ *con* $\lambda > 1$, allora :
$$\frac{x}{x-1} > \lambda \Leftrightarrow \frac{x-\lambda\,x+\lambda}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)\,x-\lambda}{x-1} < 0$$

Studiando infine il segno di numeratore e denominatore, otteniamo :

$$\begin{array}{c} - - - - \quad + + + + \\ \hline 1 \qquad 1+\frac{1}{\lambda-1} \end{array} \qquad \text{Segno del numeratore}$$

$$\begin{array}{c} - - - - \quad + + + + \\ \hline 1 \end{array} \qquad \text{Segno del denominatore}$$

Se ne ricava che la disuguaglianza iniziale è verificata se

$$x \in \left(1, 1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) \ .$$

Pertanto $B = f(A)$ non è superiormente limitato. Analogamente se $\lambda \in \mathcal{R}$ verifica la disuguaglianza $\lambda < 1$, allora :

$$\frac{x}{x-1} < \lambda \Leftrightarrow \frac{x - \lambda\, x + \lambda}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-\lambda)\, x + \lambda}{x-1} < 0$$

Ora otteniamo:

$$\begin{array}{c} - - - - \quad + + + + \\ \hline 1 - \frac{1}{1-\lambda} \qquad 1 \end{array} \qquad \text{Segno del numeratore}$$

$$\begin{array}{c} - - - - \quad + + + + \\ \hline 1 \end{array} \qquad \text{Segno del denominatore}$$

Se ne ricava che la seconda disuguaglianza è verificata se

$$x \in \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}, 1\right) \ .$$

Pertanto $B = f(A)$ non è inferiormente limitato. Sia ora $y \in \mathcal{R}$, consideriamo l'equazione (nella x)

$$\frac{x}{x-1} = y$$

Risulta :

$$\frac{x}{x-1} = y \Leftrightarrow x - y\, x = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{1-y} \quad (\ se \ \ y \neq 1\ )\ .$$

Pertanto $y \in f(A) \Leftrightarrow y \neq 1$.

10. Calcolare i limiti:

$$i) \ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2\,n} - \sqrt{n^2 - 1}\right); \quad ii) \ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n\right)$$

$$iii) \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3\, 2^n}; \quad iv) \ \lim_{n\to\infty} \frac{n\, 2^n}{n + 2^n}$$

$$v) \ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n}; \quad vi) \ \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4}$$

i) Razionalizzando si ottienne:

$$\left(\sqrt{n^2+2\,n}-\sqrt{n^2-1}\right)=\frac{2\,n+1}{\sqrt{n^2+2\,n}+\sqrt{n^2-1}}$$

possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2\,n}-\sqrt{n^2-1}\right)=1$$

ii) Razionalizzando anche in questo caso, ottengo:

$$\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)=\frac{n}{\left(\sqrt[3]{n^3+n}\right)^2+n\,\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}$$

Ne deriva quindi che:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)=0$$

iii) Raccogliendo $n^3\,2^n$ si ottiene:

$$\sqrt[n]{1+n^2+n^3\,2^n}=2\,\sqrt[n]{n^3}\,\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}\,2^{-n}+\frac{1}{n^3}\,2^{-n}}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n^2+n^3\,2^n}=2$$

iv) Dividendo numeratore e denominatore per 2^n, si ottiene:

$$\frac{n\,2^n}{n+2^n}=\frac{n}{\frac{n}{2^n}+1}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,2^n}{n+2^n}=+\infty$$

v) Dividendo numeratore e denominatore per 5^n, si ottiene:

$$\frac{2^n+4^n}{n+5^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{n}{5^n}+1}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{n+5^n}=0$$

vi) Usando la formula del binomio di Newton, si ha

$$\begin{aligned}(n+1)^5-(n-1)^5&=n^5+5\,n^4+10\,n^3+10\,n^2+5\,n+1-\\&-\left(n^5-5\,n^4+10\,n^3-10\,n^2+6\,n-1\right)=\\&=10\,n^4+20\,n^2+2\end{aligned}$$

Ne possiamo concludere quindi che:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5-(n-1)^5}{n^4}=10$$

11. Sia
$$A = \left\{ \frac{n + 2\sqrt{n}}{n+1} \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\} \ .$$
Verificare che A é inferiormente limitato e calcolare inf A.
Posto
$$a_n = \frac{n + 2\sqrt{n}}{n+1}$$
risulta facile verificare che

- i) $a_n > 1 \ \ \forall\, n \in \mathcal{N}$,
- ii) si ha:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Ne deriva quindi che inf $A = 1$. Infatti se $\eta > 1$, risulta:
$$\frac{n + 2\sqrt{n}}{n+1} < \eta \Leftrightarrow (\eta - 1)\, n - 2\sqrt{n} + \eta > 0$$
Siccome $\eta - 1 > 0$, l'ultima diseguaglianza ha sempre soluzioni. In particolare se $\Delta(\eta) = 4 - 4\,\eta(\eta-1) = 4 - 4\,\eta^2 + 4\,\eta > 0$, basta scegliere n in modo tale che
$$\sqrt{n} > \frac{2 + \sqrt{\Delta(b)}}{2\,(\eta - 1)}$$

12. Risolvere la seguente diseguaglianza:
$$\frac{2\,x^2 + x}{x-2} < x - 3$$
Ottengo:
$$\frac{2\,x^2 + x}{x-2} < x - 3 \Leftrightarrow \frac{2\,x^2 + x - x^2 + 2\,x + 3\,x - 6}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6\,x - 6}{x-2} < 0$$
Osservando che le due radici dell'equazione di secondo grado sono:
$$x_{1\,2} = -3 \mp \sqrt{15}$$
possiamo concludere che la diseguaglianza é verificata se e solo se
$$x \in \ (-\infty, -3 - \sqrt{15}) \cup (\sqrt{15} - 3, 2) \ .$$

13. Sia
$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2 - x + 1} \ ; \ x \in \mathcal{R} \right\}$$
Calcolare sup A.
Ricordiamo che un numero $b \in R\ ,\ b > 0$ è un maggiorante dell'insieme A se risulta:
$$\frac{x+1}{x^2 - x + 1} \leq b \quad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

Ricordando che il denominatore della frazione considerata è sempre positivo, si ottiene:

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} \le b \Leftrightarrow x+1 \le b\,x^2 - b\,x + b \Leftrightarrow b\,x^2 - (b+1)\,x + b - 1 \ge 0$$

Affinchè dunque la diseguaglianza sia vera per ogni $x \in \mathcal{R}$, deve essere:

$$\Delta(b) = (b+1)^2 - 4\,b\,(b-1) = -3\,b^2 + 6\,b + 1 \le 0$$

e quindi deve essere

$$b \ge \frac{3+\sqrt{12}}{3}$$

Ne deriva quindi che

$$\sup A = \frac{3+\sqrt{12}}{3}$$

Osserviamo infine che tale numero risulta essere anche il massimo elemento di A.

14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+3^n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right)$$

Ottengo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\frac{n^2}{2^n}+1}{\frac{n^3}{3^n}+1} = 0$$

Razionalizzando ottengo

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

15. Esempi di due prove parziali scritte date in classe in anni precedenti.
PROVA A

- 1) Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x^2+2\,x}{x+1} > 2\,x - 1$$

- 2) Sia

$$A = \left\{\sqrt{n^2+n} - n \;\; ; \;\; n \in \mathcal{N}\right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A.

- 3) Sia

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1} \quad x \in \mathcal{R}\;,\; x \ne 1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f.

- 4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 6\,n + 1} - n\right) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \ .$$

PROVA B

- 1) Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2\,x - 3$$

- 2) Sia

$$A = \left\{\sqrt{n^2 + 2\,n} - n \ \ ; \ n \in \mathcal{N}\right\}$$

  Calcolare inf A e sup A e dire se sono minimo e massimo di A.

- 3) Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \quad x \in \mathcal{R}\ ,\ x \neq -1$$

  Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f.

- 4) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4\,n + 6} - n\right) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}} \ .$$

Correzione della prova A
1) - Risulta:

$$\frac{x^2 + 2\,x}{x + 1} > 2\,x - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2\,x - 2\,x^2 + x - 2\,x + 1}{x + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x + 1} < 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado al numeratore sono $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$ ed essendo $\frac{1-\sqrt{5}}{2} > -1$, risulta che la disuguaglianza é verificata se

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

2) - Poniamo $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ e verifichiamo che la successione a_n è strettamente crescente. Infatti:

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} - n < \sqrt{n^2 + 2\,n + 1 + n + 1} - n - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} + 1 < \sqrt{n^2 + 3\,n + 2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow n^2 + n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n} < n^2 + 3\,n + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2 + n} < 2\,n + 1 \Leftrightarrow 4\,n^2 + 4\,n < 4\,n^2 + 4\,n + 1$$

Ne deriva quindi che

$$\inf\, A = \min\, A = a_1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\sup\, A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{2}$$

Siccome $\frac{1}{2} \notin A$, A non ha massimo.
3) - Siano $x\,, y \in \mathcal{R}$ con $x \neq 1$, $y \neq 1$, allora:

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{y^2+y+1}{y-1} \Rightarrow x^2\,y + x\,y + y - x^2 - x - 1 = x\,y^2 + x\,y + x - y^2 - y - 1$$

$$\Rightarrow x\,y(x-y) + 2\,(y-x) + (x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x\,y - 2 - y - x) = 0$$

Pertanto l'ultimo prodotto, oltre che per $x = y$, si annulla anche se $y\,(x-1) = x+2$, ossia se

$$y = \frac{x+2}{x-1}$$

Risulta allora, scegliendo per esempio $x = 0$ e quindi $y = -2$, che $f(0) = f(-2)$. Pertanto la funzione f non é iniettiva.
Sia ora $y \in \mathcal{R}$, l'equazione $f(x) = y$, ha soluzioni se e solo se

$$x^2 + x + 1 = x\,y - y \Leftrightarrow x^2 + (1-y)\,x + 1 + y = 0$$

Deve quindi essere

$$\Delta(y) = (1-y)^2 - 4\,(1+y) \geq 0 \quad ossia \quad y^2 - 6\,y - 3 \geq 0$$

Pertanto l'insieme dei valori é dato dall'insieme

$$B = \left(-\infty, 3 - 2\sqrt{3}\right] \cup \left[3 + 2\sqrt{3}, +\infty\right)$$

4) - Risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} = \lim_{n\to\infty} 4\,\sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{4^n} + \frac{3}{4^n}} = 4$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4\,n + 6} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 4\,n + 6 - n^2}{\sqrt{n^2 + 4\,n + 6} + n} = \frac{4}{2} = 2$$

Sempre razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{n+6-n}{(\sqrt{n+6} + \sqrt{n})(\sqrt{n+6} + \sqrt{n})} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

4 LIMITI DI FUNZIONI

Prima di estendere la definizione di limite al caso di una funzione $f : A \to B$, introduciamo brevemente alcuni semplici concetti di topologia della retta reale.

4.1 Nozioni di topologia

Sia $A \subset \mathcal{R}$, diremo che un punto $x_0 \in A$ è un punto **interno** ad A se $\exists\, r > 0$ tale che l'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ è tutto contenuto in A.
L'insieme dei punti interni ad A verrà indicato col simbolo $\overset{\circ}{A}$ e chiamato **interno o apertura** di A.
Diremo che un insieme $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme **aperto** se $A = \overset{\circ}{A}$ ossia se ogni $x \in A$ è un punto interno ad A. In simboli:

$$A \subset \mathcal{R} \text{ è aperto se e solo se } \forall\, x \in A \;\; \exists\, r = r_x > 0 \;\text{ tale che } (x - r, x + r) \subset A$$

Un insieme $A \subset \mathcal{R}$ si dice **chiuso** se il suo complementare $\mathcal{R} - A$ è aperto.
Sono facili da verificare e le lasciamo per esercizio le seguenti proprietà:

i) se $A\,, B \subset \mathcal{R}$ sono due insiemi aperti, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono pure insiemi aperti;

ii) se $A\,, B \subset \mathcal{R}$ sono due insiemi chiusi, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono pure insiemi chiusi;

iii) se $A_n \;\; n \in \mathcal{N}$ è una successione di insiemi aperti, allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ è un insieme aperto ;}$$

Ricordiamo che con il simbolo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ si intende l'insieme } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathcal{R} \;;\; \exists\, n \in \mathcal{N} \text{ con } x \in A_n \}$$

iv) se $A_n \;\; n \in \mathcal{N}$ è una successione di insiemi chiusi, allora

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ è un insieme chiuso ;}$$

Ricordiamo che con il simbolo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ si intende l'insieme } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathcal{R} \;;\; x \in A_n \;\forall\, n \in \mathcal{N}\}$$

Osserviamo che in generale se $A_n \;\; n \in \mathcal{N}$ è una successione di insiemi aperti, allora

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ può non essere un insieme aperto ,}$$

e analogamente se $A_n \ \ n \in \mathcal{N}$ è una successione di insiemi chiusi, allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ può non essere un insieme chiuso .}$$

Ad esempio gli insiemi $A_n = (0, 1 + 1/n)$ sono insiemi aperti e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1] \text{ che non è un insieme aperto ,}$$

mentre gli insiemi $A_n = [0, 1 - 1/n]$ sono insiemi chiusi e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1) \text{ che non è un insieme chiuso .}$$

Se $A \subset \mathcal{R}$ e $x \in \mathcal{R}$, diremo che x è un **punto di accumulazione** per A e scriveremo $x \in A'$ se vale la seguente proprietà: $\forall\, r > 0 \ \ A \cap (x - r, x + r)$ contiene almeno un punto x' diverso da x. In simboli:

$$x \in A' \ \Leftrightarrow \ \forall\, r > 0 \ \ A \cap (x - r, x + r) - \{x\} \neq \emptyset \ .$$

Da notare che se $x \in A'$ allora $\forall\, r > 0$ l'insieme $A \cap (x - r, x + r)$ contiene infiniti elementi.
Indichiamo infine con $\overline{A}$ (**la chiusura** di A) l'insieme $\overline{A} = A \cup A'$. Ovviamente risulta

$$x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \forall\, r > 0 \ \ A \cap (x - r, x + r) \neq \emptyset$$

Un punto $x \in A - A'$ viene chiamato un **punto isolato** di A, infatti $x \in A - A' \ \Leftrightarrow \ \exists\, r > 0$ tale che $A \cap (x - r, x + r) = \{x\}$.
Definiamo infine ∂A (**la frontiera** di A) l'insieme

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} \ .$$

Da notare che

$$x \in \partial A \Leftrightarrow \ \ \forall\, r > 0 \ \ A \cap (x - r, x + r) \neq \emptyset \text{ e } (\mathcal{R} - A) \cap (x - r, x + r) \neq \emptyset \ .$$

Alcune osservazioni che si possono fare sono le seguenti:

1. Se $A \subset \mathcal{R}$, allora

   i) A è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$;

   ii) A è aperto se e solo se $A = \overset{\circ}{A}$.

   Verifichiamo ad esempio la i). Dalla definizione risulta sempre che $A \subset \overline{A}$. Supponiamo ora che A sia chiuso e verifichiamo che $\overline{A} \subset A$. Sia dunque $x \in \overline{A}$. Se fosse $x \in \mathcal{R} - A$, essendo A chiuso, esisterebbe $r > 0$ con $(x - r, x + r) \subset \mathcal{R} - A$ e quindi $(x - r, x + r) \cap A = \emptyset$, in contrasto col fatto che $x \in \overline{A}$. Viceversa se $A = \overline{A}$, allora A è chiuso. Infatti se $x \in \mathcal{R} - A = \mathcal{R} - \overline{A}$ allora esiste $r > 0$ con $A \cap (x - r, x + r) = \emptyset$. Allora $(x - r, x + r) \subset \mathcal{R} - A$ e quindi $\mathcal{R} - A$ è aperto ed A è chiuso.

2. $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $x_n \in A$ con

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Infatti se $x \in \overline{A}$, per ogni numero naturale n, si ha $A \cap (x - 1/n, x + 1/n) \neq \emptyset$ e quindi $\forall\, n \in \mathcal{N}$ esiste $x_n \in A \cap (x - 1/n, x + 1/n)$. Ottengo in questo modo una successione $x_n \in A$ con

$$x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ .$$

La dimostrazione del viceversa viene lasciata per esercizio.

3. $x \in A'$ se e solo se esiste una successione $x_n \in A$ con $x_n \neq x \quad \forall\, n \in \mathcal{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Verificarlo per esercizio.

Altre semplici proprietà, che vengono lasciate per esercizio, sono le seguenti:

- Se $A \subset \mathcal{R}$ è limitato superiormente, allora sup $A \in \overline{A}$,
- A è chiuso se e solo se $\partial\, A \subset A$,
- A' è un insieme chiuso.

4.2 Limiti di funzioni

Sia $f\ : A \to \mathcal{R}$ una data funzione e $x_0 \in A'$, allora diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \ (\in \mathcal{R}\ )$$

se

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 \ \text{ tale che } \ \forall\ x \in A \ \ con \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \ si \ \ ha \ \ |f(x) - L| < \varepsilon \ .$$

Nel caso che $x_0 \in A \cap A'$ e risulti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

diremo che la funzione f è **continua nel punto** x_0.
Analogamente diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \ (o \quad -\infty\ )$$

se

$$\forall\ M \in \mathcal{R}\ \exists\ \delta_M > 0 \ \text{ tale che } \forall\, x \in A \ \ con \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_M \ \ si \ \ ha \ \ f(x) > M \ \ (\ f(x) < M\ )\ .$$

Da notare che nelle definizioni di limite ora riportate si richiede che le disuguaglianze (o $|f(x)-L| < \varepsilon$ o $f(x) > M$ o $f(x) < M$) siano verificate $\forall\, x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \ \ x \neq x_0$ e, in generale il punto $x = x_0$ potrebbe anche non stare nell'insieme di definizione della funzione.

Osservazione Il concetto di limite è un concetto a carattere locale, ossia se $f\,, g\ : A \to \mathcal{R}$

sono due funzioni ed esiste $r > 0$ con $f(x) = g(x)\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap A - \{x_0\}$, allora esiste il limite di f per $x \to x_0$ se e solo esiste il limite di g e risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Vediamo ora alcuni esempi importanti.

Esempi

1. Se la funzione f è un polinomio, ossia se

   $$f(x) = P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$$

   allora risulta

   $$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}$$

2. Risulta $\forall a \in \mathcal{R} \quad a > 0$

   i)
   $$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}$$

   ii)
   $$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}\ x_0 > 0 \quad a \neq 1$$

   i) Supponendo $a > 1$. Siccome:

   $$\lim_{x \to x_0} (a^x - a^{x_0}) = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} \left(a^{x - x_0} - 1\right)$$

   basta dimostrare che

   $$\lim_{x \to x_0} \left(a^{x - x_0} - 1\right) = 0$$

   Ora se $\varepsilon \in (0, 1)$, risulta:

   $$a^{x - x_0} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < \log_a(1 + \varepsilon)$$

   $$a^{x - x_0} - 1 > -\varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 > \log_a(1 - \varepsilon)$$

   Ponendo quindi:

   $$\delta_\varepsilon = \min\{\log_a(1 + \varepsilon), -\log_a(1 - \varepsilon)\}$$

   si ottiene che se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, risulta $|a^{x - x_0} - 1| < \varepsilon$.

   ii) Supponendo sempre $a > 1$.Siccome:

   $$\lim_{x \to x_0} (\log_a x - \log_a x_0) = \lim_{x \to x_0} \log_a \frac{x}{x_0}$$

   basta dimostrare che

   $$\lim_{x \to x_0} \log_a \frac{x}{x_0} = 0$$

   Ottengo dunque se $\varepsilon > 0$:

   $$log_a \frac{x}{x_0} < \varepsilon \Leftrightarrow x < x_0\, a^\varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < x_0\ (a^\varepsilon - 1)$$

$$log_a \frac{x}{x_0} > -\varepsilon \Leftrightarrow x > x_0\, a^{-\varepsilon} \Leftrightarrow x - x_0 > x_0\, \left(a^{-\varepsilon} - 1\right)$$

Ponendo quindi:

$$\delta_\varepsilon = \min\{x_0\, (a^\varepsilon - 1)\,, x_0\, \left(1 - a^{-\varepsilon}\right)\}$$

si ottiene che se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si ha $|\log_a \frac{x}{x_0}| < \varepsilon$.

3. Risulta :

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

Per verificare queste due affermazioni, osserviamo, in primo luogo che vale la diseguaglianza:

$$|\sin x| \le |x| \quad \forall\, x \in \mathcal{R}\ .$$

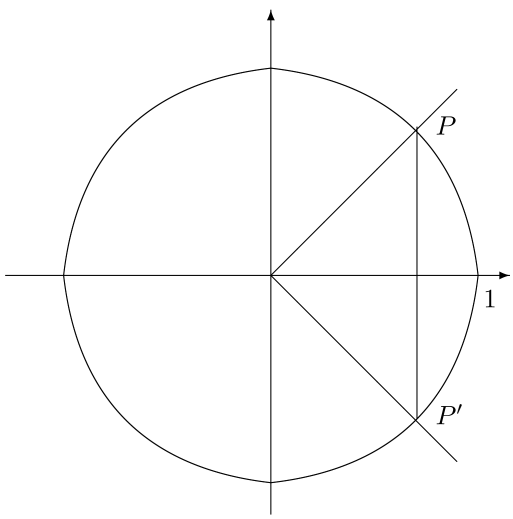
Infatti:

i) se $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, allora :

$$|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|$$

e la diseguaglianza è verificata ;

ii) se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ragionando sulla figura che segue si ottiene:



$$\sin x = \frac{\overline{PP'}}{2} < \frac{\widehat{PP'}}{2} = x$$

($\overline{PP'}$ é la lunghezza del segmento PP', $\widehat{PP'}$ é la lunghezza dell'arco di circonferenza che congiunge P con P').

iii) se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, allora $\sin x = -\sin(-x)$ con $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$, pertanto

$$|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) < -x = |x|\ .$$

In ogni caso dunque vale la diseguaglianza cercata. Ne possiamo concludere che

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le |x-x_0|$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0\ .$$

Analogamente :

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le |x-x_0|$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0}(\cos x - \cos x_0) = 0\ .$$

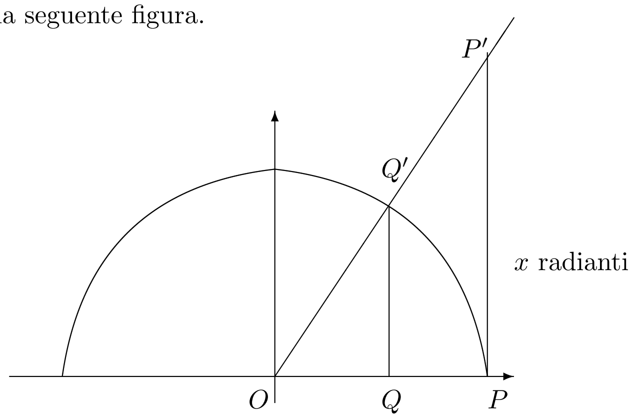
4. Verificare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

Supponiamo che $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, dal ragionamento fatto nell'esempio precedente, si ricava che

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

Ragioniamo ora sulla seguente figura.



Il settore circolare OPQ' è contenuto nel triangolo OPP', pertanto vale la diseguaglianza

$$area(OPQ') < area(OPP')$$

ossia

$$\frac{2\,x\cdot 1}{2} < \frac{\overline{PP'}\cdot 1}{2}$$

D'altra parte, dalla similitudine dei triangoli OPP' e OQQ', si ricava che

$$\frac{\overline{PP'}}{1} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Pertanto si ottiene

$$x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ossia} \quad \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Possiamo quindi concludere che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo infine che se $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, si ha

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin(-x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

e $\cos x = \cos(-x)$, pertanto la doppia diseguaglianza

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

vale $\forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$. Siccome

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

dal teorema dei due carabinieri, si ottiene che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

4.3 Limiti di funzioni e limiti di successioni

Un teorema importante che ci permette subito di estendere al caso di limite per funzioni le proprietà già note per il limite di successioni è il seguente:

Teorema Sia $f\, : A \to \mathcal{R}$ una funzione e $x_0 \in A'$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) esiste il

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\ (o\ +\infty\ o\ -\infty)\,,$$

ii) per ogni successione $\{x_n\}$, con $x_n \in\, A - \{x_0\}\ \forall\, n \in \mathcal{N}$ e tale che

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

risulta

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L\ (o\ +\infty\ o\ -\infty)\,.$$

Dimostrazione Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathcal{R}$$

e che $\{x_n\}$ sia una successione con $x_n \in\, A - \{x_0\}\ \forall\, n \in \mathcal{N}$ e

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Allora dalle definizioni di limite risulta che $\forall\, \varepsilon > 0$

i) $\exists\,\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall\, x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$;

ii) $\exists\,\nu_\varepsilon$ tale che $\forall\, n > \nu_\varepsilon$ si ha $|x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$

Siccome $x_n \neq x_0\ \forall\, n \in \mathcal{N}$, risulta $0 < |x_n - x_0| < \delta_\varepsilon\quad \forall\, n > \nu_\varepsilon$ e quindi per la i): $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Ossia

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

Viceversa, supponiamo che per ogni successione $\{x_n\}$, con $x_n \in\ A - \{x_0\}\ \forall\ n \in \mathcal{N}$ e tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

risulti

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

e proviamo che deve essere anche

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Ragionando per assurdo supponiamo che sia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$$

Ne deriva quindi che:

$$\exists\,\varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall\, r > 0\ \exists\, x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < r\ e\ |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

Applicando questo fatto scegliendo $r = 1/n$ ottengo una successione $x_n \in A$ con $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Abbiamo quindi una successione $x_n \in A - \{x_0\}$ con limite x_0 e con $f(x_n)$ non tendente a L e questo contrasta con l'ipotesi fatta.

Una conseguenza di questo teorema è la seguente:
Osservazione Se esistono due successioni diverse x_n e y_n di elementi di A con

$$x_n \neq x_0\quad,\quad y_n \neq x_0\quad \forall\ n \in \mathcal{N}\quad,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0\quad e\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

allora il

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{non esiste .}$$

Proponiamoci, per esempio, di vedere se esiste il

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se poniamo

$$x_n = \frac{1}{2\,\pi\, n}$$

otteniamo una successione $x_n \neq 0$, che converge a zero con

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\,\pi\, n) = 0\ .$$

D'altra parte, se poniamo

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\, n}$$

otteniamo una nuova successione $y_n \neq 0$, che converge pure a zero ma con

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\, n) = 1\ .$$

Pertanto il limite di partenza non esiste.

4.4 Limiti all'infinito, limite destro e limite sinistro

Sia $f : A \to \mathcal{R}$ una funzione con insieme di definizione A non superiormente limitato, allora si possono dare, in maniera del tutto simile a quelle date per le successioni, le seguenti definizioni. Diremo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathcal{R}$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_\varepsilon \;\; \text{tale che } |f(x) - L| < \varepsilon \;\; \forall x \in A \text{ con } x > \nu_\varepsilon$$

Analogamente diremo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; (o \; -\infty)$$

se e solo se

$$\forall M \in \mathcal{R} \;\; \exists \nu_M \;\; \text{tale che } f(x) > M \; (f(x) < M) \; \forall x \in A \text{ con } x > \nu_M$$

I limiti per $x \to -\infty$ vengono definiti in maniera simile. Ossia se $f : A \to \mathcal{R}$ una funzione con insieme di definizione A non inferiormente limitato, allora diremo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathcal{R}$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_\varepsilon \;\; \text{tale che } |f(x) - L| < \varepsilon \;\; \forall x \in A \text{ con } x < \nu_\varepsilon$$

Analogamente diremo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \; (o \; -\infty)$$

se e solo se

$$\forall M \in \mathcal{R} \;\; \exists \nu_M \;\; \text{tale che } f(x) > M \; (f(x) < M) \; \forall x \in A \text{ con } x < \nu_M$$

Sia infine $f : A \to \mathcal{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A'$. Indichiamo con

$$A^+ = \{x \in A\, ;\; x > x_0\}$$

e supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione anche di A^+, ossia che $x_0 \in (A^+)'$. Allora diremo che la funzione f ha limite $L \in \mathcal{R}$ per x tendente a x_0 da destra e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se

$$\forall \; \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } \; \forall \; x \in A \text{ con } \; x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon \; \text{ risulta che } \; |f(x) - L| < \varepsilon \; .$$

Analogamente, posto

$$A^- = \{x \in A\, ;\; x < x_0\}$$

se $x_0 \in (A^-)'$ diremo che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \delta_\varepsilon > 0 \;\; \text{tale che } \; \forall \; x \in A \;\; \textit{con} \;\; x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \text{ risulta che } \; |f(x) - L| < \varepsilon \; .$$

Dalle definizioni ora date, risulta facilmente che, se $x \in A' \cap (A^+)' \cap (A^-)'$, allora esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se e solo se esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

e sono entrambi uguali a L.
Vale il seguente:
Teorema Sia $f\,:A \to \mathcal{R}$ una funzione crescente, allora

i) se $x_0 \in (A^-)'$, esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x)\,;\; x \in A^-\}$$

ii) se $x_0 \in (A^+)'$, esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x)\,;\; x \in A^+\}$$

iii) se $x_0 \in A \cap (A^-)' \cap (A^+)'$, risulta

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)\ .$$

Dimostrazione Verifichiamo la i). Ricordiamo che, f crescente, significa che

$$se\ x_1\,, x_2 \in A\ e\ x_1 < x_2\ \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ .$$

Sia ora

$$B = \{f(x)\ ;\ x \in A^-\}\ .$$

Se l'insieme B è limitato superiormente, poniamo $L = \sup B$, altrimenti poniamo $L = +\infty$ e verifichiamo infine che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L\ .$$

Infatti, ragionando nel caso che $L \in \mathcal{R}$, se $\varepsilon > 0$, per la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore, $\exists\ x_\varepsilon \in A^-$ con $f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon$. Ne deriva quindi che, se $x \in A$ e $x_\varepsilon < x < x_0$

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon\ .$$

4.5 Limite della funzione composta

Vale il seguente teorema che ci permette di calcolare il limite di una funzione composta.
Teorema Siano $f\,:A \to \mathcal{R}$ e $g\,:B \to \mathcal{R}$ due funzioni con $f(A) \subset B$. Supponiamo che $x_0 \in A'$ e che siano verificate le seguenti condizioni :

i) esiste il

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\ (\in \mathcal{R}\ o\ +\infty\ o\ -\infty\,),$$

ii) esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \neq L \;\; \forall\, x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$;

iii) $L \in B'$ ed esiste il
$$\lim_{y \to L} g(y) = M \;(\in \mathcal{R} \;o\; +\infty \;o\; -\infty\,)\,.$$

Allora
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M \;.$$

(Osserviamo che se $L = +\infty$ o $L = -\infty$ la condizione ii) è sempre verificata; mentre se la funzione gè continua nel punto L, tale condizione può essere eliminata)

Dimostrazione Ragioniamo nel caso che L, $M \in \mathcal{R}$. Dall'ipotesi iii), $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall\, y \in B$ con $0 < |y - L| < \delta_\varepsilon$ risulta $|g(y) - M| < \varepsilon$. D'altra parte per la i), $\exists\,\delta'_\varepsilon$ tale che $\forall\, x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$ si ha $|f(x) - L| < \delta_\varepsilon$. Infine per la ii), posto $\delta''_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon, \delta\}$, risulta che se $0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$ che $0 < |f(x) - L| < \delta'_\varepsilon$ e quindi $|g(f(x)) - M| < \varepsilon$.

Vediamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare il
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha\, x)}{x}$$
(dove $\alpha \in \mathcal{R}$ é un numero fissato diverso da 0). Risulta
$$\frac{\sin(\alpha\, x)}{x} = \alpha\, \frac{\sin(\alpha\, x)}{\alpha\, x}$$
e la funzione
$$\frac{\sin(\alpha\, x)}{\alpha\, x}$$
è la funzione composta delle funzioni $f(x) = \alpha\, x$ e $g(y) = \frac{\sin y}{y}$. Allora:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha\, x)}{x} = \alpha \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha \;.$$

2. Calcolare
$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)}{x - 1} \;.$$
Posto $y = x - 1$, risulta, per il teorema sul limite della composta:
$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)}{x - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi\, y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \to 0} -\frac{\sin\left(\frac{\pi\, y}{2}\right)}{y} = -\frac{\pi}{2} \;.$$

3. Calcolare
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x \;.$$
Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$, ottengo:
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = \lim_{y \to 0} y\, \tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{y\, \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= \lim_{y \to 0} \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{\sin y} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -1 \;.$$

4. Verificare che
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\ .$$
Infatti si ha
$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos x^2}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$
Quindi, si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1^2\cdot\ \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\ .$$

5. La funzione
$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
è definita quando $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}>0$, ossia se $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. Verifichiamo che:

i)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

ii)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ .$$

i) Indichiamo con $[x]$ la parte intera di x. Siccome $[x]\le x<[x]+1$, risulta:
$$1+\frac{1}{[x]+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{[x]}$$
e quindi :
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\ .$$
Il risultato segue allora dal teorema dei due carabinieri, se ricordiamo che
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\ .$$

ii) Dal teorema sul limite della funzione composta, si ottiene, ponendo $y=-x$:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y$$
Ponendo infine $z=y-1$, ottengo
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1}=e$$

6. Calcolare il
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
Ponendo $y=\frac{1}{x}$, si ottiene :
$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e\ ,$$
$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e\ .$$
Pertanto
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\ .$$

7. Verificare che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1\ .$$
Risulta :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ \log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log e = 1\ .$$

8. Calcolare il
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$
Ponendo $y=e^x-1$, ottengo :
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)} = 1\ .$$

4.6 Alcuni esercizi conclusivi

1. Calcolare il
$$\lim_{x\to+\infty} x\ \log\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
Usando la sostituzione $y=\frac{1}{x}$, ottengo:
$$\lim_{x\to+\infty} x\ \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

2. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n}\right)^n$$
Risulta :
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\ \right]^{\sqrt{n}} = +\infty$$

3. Calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

Risulta :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-2}\right)^{x^2}=(y=x^2-2)=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+2}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^2\left[\left(1+\frac{1}{\frac{y}{2}}\right)^{\frac{y}{2}}\right]^2=e^2$$

4. Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} n\,\log\left(\frac{2\,n+3}{2\,n+6}\right)$$

Risulta :

$$\lim_{n\to\infty} n\,\log\left(\frac{2\,n+3}{2\,n+6}\right)=\lim_{n\to\infty} n\,\log\left(1-\frac{3}{2\,n+6}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{3}{2\,n+6}\right)}{-\frac{3}{2\,n+6}}\cdot\frac{-3}{2\,n+6}\cdot n=1\cdot(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}$$

5. Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$$

Usiamo il criterio del rapporto. Se indichiamo con

$$a_n=\frac{n!}{n^n}$$

risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1\ .$$

Risulta pertanto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

6. Calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}\quad .$$

Risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n+4}\right)^{\frac{n}{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{n+4}{3}}\right)^{\frac{n+4}{3}}\right]^{\frac{3}{n+4}\,\frac{n}{2}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3}{2}}\quad .$$

7. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^n$$
Si ottiene:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-n}{n^3+n}\right)^n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{n^3+n}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+n}{n-1}}\right]^{\frac{(n-1)\,n}{n^3+n}}=\left(\frac{1}{e}\right)^0=1\;.$$

8. Calcolare il
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$$
Razionalizzando si ottiene:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2}\,\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}\;.$$

9. Calcolare il
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$
Ottengo:
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\,e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}\,\frac{\left(e^{\frac{1}{x\,(x+1)}}-1\right)}{\frac{1}{x\,(x+1)}}\,\frac{x^2}{x\,(x+1)}=e^0\cdot 1\cdot 1=1\;.$$

10. Calcolare il
$$\lim_{x\to+\infty}x\left(5^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}\right)$$
Risulta:
$$\lim_{x\to+\infty}x\left(5^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}\,\log 5}-e^{\frac{1}{x}\,\log 2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\,\log 2}\,\frac{\left(e^{\frac{1}{x}\,(\log 5-\log 2)}-1\right)}{\frac{1}{x}\,(\log 5-\log 2)}\,(\log 5-\log 2)=e^0\cdot 1\cdot(\log 5-\log 2)=\log\left(\frac{5}{2}\right)\;.$$

11. Calcolare il
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(\pi\,x)}{x-3}$$
Ponendo $y=x-3$, si ottiene:
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(\pi\,x)}{x-3}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi\,(y+3))}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi\,y)}{y}=-\pi\;.$$

12. Calcolare il
$$\lim_{x\to+\infty} x\,(1-\cos x)$$
Poniamo $f(x) = x\,(1-\cos x)$ e osserviamo che se $x_n = 2\,\pi\,n$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0\ .$$
D'altra parte, se $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n$, si ha
$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = +\infty\ .$$
Ne deriva quindi che il limite di partenza non esiste.

13. Calcolare il
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$$
dove ricordiamo che $[x]$ é la parte intera di x.
Dalla definizione risulta:
$$[x] \le x < [x]+1 \quad \forall\ x\in\mathcal{R}$$
e quindi se $x>0$
$$1-\frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \le 1$$
Risuta pertanto
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1\ .$$

4.7 Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{x+4}{x+5}\right)\ ,\ 2)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x-3)(x+1)}-x\ ,$$
$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+3}-a\,x\right)\ \ a\in\mathcal{R}\ ,\ 4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}\ ,$$
$$5)\ \lim_{x\to0^+} x\,\log x\ ,\ 6)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8-(x-1)^8}\ ,$$
$$7)\ \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ 8)\ \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\ ,$$
$$9)\ \lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2-1}\ ,\ 10)\ \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x\ .$$

(La soluzione si trova alle fine del capitolo)

4.8 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 4

Calcolare i seguenti limiti:

$$1)\quad \lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{x+4}{x+5}\right)\quad ,\ 2)\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x-3)(x+1)}-x\quad ,$$

$$3)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+3}-a\,x\right)\quad a\in\mathcal{R}\quad ,\quad 4)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1+x^2}}\quad ,$$

$$5)\quad \lim_{x\to 0^+} x\,\log x\quad ,\quad 6)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8-(x-1)^8}\quad ,$$

$$7)\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\quad ,\quad 8)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\quad ,$$

$$9)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\quad ,\quad 10)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\quad .$$

1. Risulta
$$\frac{x+4}{x+5}=\frac{1}{\frac{x+5}{x+4}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x+4}}$$
Pertanto, posto $y=\frac{1}{x+4}$ ossia $x=\frac{1}{y}-4$, per il teorema sul limite della composta, ottengo:
$$\lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{x+4}{x+5}\right)=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{y}-4\right)\log\left(\frac{1}{1+y}\right)=$$
$$\lim_{y\to 0^+}-\left(\frac{\log(1+y)}{y}-4\,\log(1+y)\right)=-1$$

2. Razionalizzando, ottengo:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-3)(x+1)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(x+1)-x^2}{\sqrt{(x-3)(x+1)}+x}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\,x-3}{\sqrt{(x-3)(x+1)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}=-1\ .$$

3. Risulta
$$\frac{x^2-1}{x+3}-a\,x=\frac{(1-a)\,x^2-3\,a\,x-1}{x+3}$$
Pertanto se $1-a>0$ ossia se $a<1$, il limite viene $+\infty$, mentre se $1-a<0$ ossia $a>1$, viene $-\infty$. Infine, se $a=1$, risulta:
$$\frac{x^2-1}{x+3}-x=\frac{-3\,x-1}{x+3}$$
e quindi il limite viene -3.

4. Risulta:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left[e^x(1+e^{-x})\right]}{\sqrt{1+x^2}}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^x+\log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}\right)=1+0=1$$

5. Posto $y=\log x$, ottengo:
$$\lim_{x\to0^+}x\,\log x=\lim_{y\to-\infty}e^y\,y=(\text{ ponendo } z=-y\ )\ =\lim_{z\to+\infty}-\left(\frac{z}{e^z}\right)=0$$

6. Dalla formula del binomio di Newton, scrivendo esplicitamente solo i primi due termini, si ottiene:
$$(x+1)^9=x^9+9\,x^8+\sum_{n=2}^{9}\begin{pmatrix}9\\n\end{pmatrix}x^{9-n}$$
$$(x-1)^9=x^9-9\,x^8+\sum_{n=2}^{9}\begin{pmatrix}9\\n\end{pmatrix}(-1)^n\,x^{9-n}$$
Ne deriva che:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^9-(x-1)^9}{(x+1)^8+(x-1)^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18\,x^8+\sum_{n=2}^{9}\begin{pmatrix}9\\n\end{pmatrix}\left[1-(-1)^n\right]\,x^{9-n}}{(x+1)^8+(x-1)^8}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{18+\sum_{n=2}^{9}\begin{pmatrix}9\\n\end{pmatrix}\left[1-(-1)^n\right]\,x^{1-n}}{(1+\frac{1}{x})^8+(1-\frac{1}{x})^8}=\frac{18}{2}=9$$

7. Risulta:
$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\,\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\,\sqrt{x-1}}\right)=$$
$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\,\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\frac{0}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

8. Razionalizzando, ottengo.
$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1+x^2-1}{x^2\,\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$
pertanto
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

9. Si ha:
$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{(x-1)\,(x+1)}=\frac{3}{2}$$

10. Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x}=\ (y=x-1)\ =\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}}=\frac{1}{e}$$

5 FUNZIONI CONTINUE

Sia $f : A \to \mathcal{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A \cap A'$. Diremo che f è continua in x_0, se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \ tale\ \ che\ \ \forall\, x \in A\ \ con\ \ |x - x_0| < \delta_\varepsilon\ \ risulta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Diremo poi che f è continua in A se f è continua in ogni punto di A.
Ad esempio sono funzioni continue nel loro insieme di definizione le funzioni elementari che abbiamo usato fino ad ora. In particolare sono funzioni continue:

- i polinomi, ossia le funzioni del tipo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad x \in \mathcal{R} \quad (a_n \neq 0)$$

- le funzioni razionali, ossia le funzioni del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

  dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi e $x \in A = \{x \in \mathcal{R}\ ,\ Q(x) \neq 0\}$,

- le funzioni trigonometriche: $\sin x\,, \cos x\,, \tan x$,

- la funzione esponenziale e la funzione logaritmo.

Useremo nel seguito il teorema della permanenza del segno, che nel caso delle funzioni continue ha il seguente enunciato:
Teorema della permanenza del segno Se una funzione $f : A \to \mathcal{R}$ è continua in un punto $x_0 \in A \cap A'$ e $f(x_0) > 0$, allora $\exists\ \delta > 0$ tale che $f(x) > 0\ \ \forall\ x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$.

5.1 Funzioni continue in un intervallo

Dimostriamo ora alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue definite in un intervallo. Il primo è il seguente:

Teorema degli zeri Sia $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ una funzione continua. Supponiamo che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione Indichiamo con

$$A = \{x \in [a, b]\ ;\ f(x) > 0\}$$

Ricordando che $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ e che f è continua sia in a che in b, per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un numero positivo δ, tale che:

$$f(x) > 0\ \ \forall\ x \in [a, a + \delta)$$

$$f(x) < 0 \quad \forall\ x \in (b-\delta, b]\ ,$$

ossia, usando notazioni diverse

$$[a, a+\delta) \subset A \quad ; \quad A \cap (b-\delta, b] = \emptyset\ .$$

Ne deriva quindi che, se poniamo

$$c = \sup\ A$$

risulta:

$$a < a+\delta \leq c \leq b-\delta < b\ .$$

ossia $c \in (a, b)$.
Verifichiamo ora che deve essere $f(c) = 0$. Infatti, ragionando per assurdo, supponiamo che sia $f(c) \neq 0$ e consideriamo separatamente i due casi: i) $f(c) > 0$ e ii) $f(c) < 0$.

i) Supponiamo dunque che sia $f(c) > 0$. Siccome f è continua in c, per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un numero positivo r tale che $f(x) > 0 \quad \forall\ x \in (c-r, c+r)$. Ne deriva quindi che l'intervallo $(c-r, c+r)$ è tutto contenuto in A, pertanto A conterrebbe dei numeri (per esempio $c+\frac{r}{2}$) che sono più grandi di c che è l'estremo superiore di A e questo è in contrasto con la prima proprietà caratteristica dell'estremo superiore, che afferma che deve essere
$$x \leq c \quad \forall\ x \in A$$

ii) Supponiamo allora che sia $f(c) < 0$. Sempre per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un numero positivo ρ tale che $f(x) < 0 \quad \forall\ x \in (c-\rho, c+\rho)$. Pertanto $(c-\rho, c+\rho) \cap A = \emptyset$. Questo è in contrasto con la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore, la quale afferma che
$$\forall\ \lambda \in \mathcal{R} \quad \lambda < c\ \exists x_\lambda \in A \quad con \quad x_\lambda > \lambda$$
Infatti, nel caso che stiamo considerando, scegliendo $\lambda = c-\rho$, dovrebbe esistere $x_\lambda \in A$ con $c-\rho < x_\lambda \leq c$ e quindi risulterebbe $(c-\rho, c+\rho) \cap A \neq \emptyset$.

Una conseguenza del teorema degli zeri è un secondo teorema importante sulle funzioni continue noto come teorema dei valori assunti.
Ricordiamo, prima di enunciare questo teorema, che con la parola intervallo, intenderemo uno dei seguenti tipi di insieme di numeri:

a) intervalli limitati, che possono essere:
   - i) chiusi: $[a, b] = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ a \leq x \leq b\}$ (con $a\,, b \in \mathcal{R}\ a < b$);
   - ii) aperti: $(a, b) = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ a < x < b\}$ (con $a\,, b \in \mathcal{R}\ a < b$);
   - iii) semiaperti a sinistra: $(a, b] = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ a < x \leq b\}$ (con $a\,, b \in \mathcal{R}\ a < b$);
   - iv) semiaperti a destra: $[a, b) = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ a \leq x < b\}$ (con $a\,, b \in \mathcal{R}\ a < b$);

b) intervalli illimitati, che possono essere:
   - i) chiusi: $[a, +\infty) = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x \leq b\}$ ($a\,, b \in \mathcal{R}$);
   - ii) aperti: $(a, +\infty) = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x < b\}$ ($a\,, b \in \mathcal{R}$), $(-\infty, +\infty) = \mathcal{R}$.

Una proprietà che accomuna tutti questi tipi di intervalli è la seguente:

Caratterizzazione di un intervallo Un sottoinsieme $A \subset \mathcal{R}$ è uno degli intervalli sopra indicati se e solo se A gode della seguente proprietà: se $x_1\,, x_2 \in A$ e $x_1 < x_2$, allora $[x_1, x_2] \subset A$.
Possiamo ora enunciare il seguente:

Teorema dei valori assunti Sia $f\ : A \to \mathcal{R}$ una funzione continua e sia A un intervallo, allora anche $f(A)$ è un intervallo.

Dimostrazione
Supponiamo che $y_1\,, y_2 \in f(A)$ e che $y_1 < y_2$ e verifichiamo che se $y \in (y_1, y_2)$, allora $y \in f(A)$. Siccome $y_1\,, y_2 \in f(A)$, esistono $x_1\,, x_1 \in A$ con $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Supponiamo che sia $x_1 < x_2$ (altrimenti si ragiona in modo simile scambiando x_1 con x_2). Siccome A è un intervallo $[x_1, x_2] \subset A$. Consideriamo la funzione $g\ : [x_1, x_2] \to \mathcal{R}$ definita da: $g(x) = y - f(x)\ \ ,\ x \in [x_1, x_2]$. La funzione g è continua nell'intervallo $[x_1, x_2]$, essendo continua la f, inoltre

$$g(x_1) = y - f(x_1) = y - y_1 > 0$$

$$g(x_2) = y - f(x_2) = y - y_2 < 0$$

Applicando il teorema degli zeri alla funzione g nell'intervallo $[x_1, x_2]$, possiamo concludere ceh esiste un numero $c \in (x_1, x_2)$ con $g(c) = y - f(c) = 0$ ossia $y = f(c)$ e quindi $y \in f(A)$.

Come applicazione del teorema degli zeri possiamo fare la seguente affermazione:
Se $P(x)$ é un polinomio di terzo grado, ossia

$$P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d \quad a\,, b\,, c\,, d \in \mathcal{R}\ \ a \neq 0$$

allora l'equazione $P(x) = 0$ ammette almeno una soluzione reale.
Infatti, supponendo per esempio $a > 0$, risulta

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \ \ e \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

Possiamo quindi trovare due numeri $\alpha\,, \beta \in \mathcal{R}$ con $\alpha < \beta$ e tali che $P(\alpha) < 0$ e $P(\beta) > 0$. Allora, per il teorema degli zeri, esiste $c \in (\alpha, \beta)$ con $P(c) = 0$, ossia una soluzione dell'equazione considerata.

5.2 Teorema di Weierstrass e continuità dell'inversa

Un terzo teorema molto importante sulle funzioni continue è il seguente:
Teorema di Weierstrass Sia $f\ : [a, b] \to \mathcal{R}$ una funzione continua. Allora esistono due punti $x_1\,, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x)\ \ \forall\ x \in [a, b]$$

$$f(x_2) \geq f(x)\ \ \forall\ x \in [a, b]$$

Il punto x_1 viene chiamato il **punto di minimo (assoluto)** di f in $[a, b]$ e il valore $f(x_1)$ viene chiamato il **valore minimo** (sempre di f in $[a, b]$). Analogamente il punto x_2 viene chiamato il **punto di massimo (assoluto)** di f in $[a, b]$ e il valore $f(x_2)$ viene chiamato il **valore massimo** (sempre di f in $[a, b]$).

Dimostrazione Dimostriamo solo l'esistenza di un punto di massimo. L'esistenza di un punto di minimo si dimostra in modo analogo.

Primo passo Dimostriamo che l'insieme dei valori $f([a,b])$ è limitato superiormente, ragionando per assurdo. Se $f([a,b])$ non fosse limitato superiormente, allora

$$\forall\ M \in \mathcal{R} \quad \exists\ x_M \in [a,b] \quad con \quad f(x_M) > M\ .$$

Scegliendo $M = 1, 2, 3, \ldots$ (ossia dando a M valori naturali) otterremmo dei numeri $x_n \in [a,b]$ con $f(x_n) > n$. La successione x_n è limitata, infatti

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$$

Possiamo quindi applicare ad essa il teorema di Bolzano-Weierstrass ed estrarre da x_n una sottosuccessione convergente. Indichiamo tale sottosuccessione con

$$y_n = x_{k_n} \quad n \in \mathcal{N}$$

e supponiamo che sia

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{x}\ .$$

Siccome

$$a \leq y_n = x_{k_n} \leq b \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$$

dal teorema della permanenza del segno, deve pure essere $a \leq \overline{x} \leq b$, ossia $\overline{x} \in [a,b]$ e quindi la funzione f è definita in $\overline{x}$. Essendo la funzione continua in $\overline{x}$, si ottiene:

$$f(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) \geq \lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $f(x_{k_n}) > k_n$ valida per la scelta di x_n). Si avrebbe quindi $f(\overline{x}) = +\infty$, mentre, essendo $\overline{x} \in [a,b]$, risulta $f(\overline{x}) \in \mathcal{R}$.

Secondo passo Indichiamo con $M = \sup f([a,b])$ e verifichiamo che esiste $\overline{x} \in [a,b]$ con $f(\overline{x}) = M$. Dalle proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, si ricava che:

- i) $f(x) \leq M\ \forall\ x \in [a,b]$,
- ii) $\forall\ \lambda \in \mathcal{R},\ \lambda < M,\ \exists\ x_\lambda \in [a,b]$ con $f(x_\lambda) > \lambda$.

Applicando la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore a $\lambda = M - \frac{1}{n}$ con $n \in \mathcal{N}$, otteniamo una successione $x_n \in [a,b]$ con $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Ragionando ora come nel primo passo, applichiamo il teorema di Bolzano-Weierstrass, per ottenere una sottosuccessione $y_n = x_{k_n}$ con

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{x} \in [a,b]$$

Allora, essendo la funzione f continua in $\overline{x}$:

$$f(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = M$$

(da notare che l'ultimo uguale nella relazione precedente deriva dal fatto che

$$M - \frac{1}{k_n} < f(y_n) \leq M\ )$$

Osservazione Se $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ é una funzione continua, allora $f([a,b])$ é un intervallo per il teorema dei valori assunti che risulta essere un intervallo limitato e chiuso per il teorema di Weierstrass: Allora $f([a,b]) = [m,M]$.

Concludiamo questo capitolo con alcuni teoremi che legano i concetti di continuità e di iniettività.

Teorema 1 Sia $f : A \to \mathcal{R}$ una funzione continua e supponiamo cha A sia un intervallo. Supponiamo inoltre che f sia iniettiva. Allora f è:

i) o strettamente crescente ,

ii) o strettamente decrescente.

Dimostrazione Siano $x_1\,, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$. Supponiamo, dovendo essere $f(x_1) \neq f(x_2)$, che sia $f(x_1) < f(x_2)$ e proviamo che allora la funzione f è strettamente crescente. Osserviamo in primo luogo che se $x \in A$ e $x < x_1$, allora $f(x) < f(x_1)$. Infatti se fosse $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$, per il teorema dei valori assunti, esisterebbe $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ con $f(\overline{x}) = f(x)$, contro l'ipotesi che f è iniettiva (infatti $\overline{x} \neq x$). In modo analogo si può vedere che non può essere $f(x_1) < f(x_2) < f(x)$. In modo del tutto simile si prova che se $x \in A$ e $x_1 < x < x_2$, allora $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$ e che se $x \in A$ e $x_2 < x$ allora $f(x_2) < f(x)$. Ragionando nello stesso modo si può infine verificare che se $x\,, y \in A$ e $x < y$, allora $f(x) < f(y)$.

Teorema 2 Sia $f : A \to \mathcal{R}$ una funzione monotona definita in un intervallo A. Supponiamo inoltre che $f(A)$ sia pure un intervallo. Allora f è continua.
Dimostrazione Supponiamo che f sia crescente. Se x_0 è un punto interno ad A, allora esistono i limiti:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Risulta inoltre

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \sup\{f(x)\ ;\ x \in A\ ,\ x < x_0\} \leq f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = M = \inf\{f(x)\ ;\ x \in A\ ,\ x > x_0\} \geq f(x_0)$$

Si tratta quindi di dimostrare che $L = M = f(x_0)$.
Supponiamo, ragionando per assurdo, che sia $L < f(x_0)$. Osserviamo che se $x < x_0$, allora $f(x) \leq L$, mentre se $x \geq x_0$, allora $f(x) \geq f(x_0)$. Ne deriverebbe quindi che $f(A)$ non é un intervallo. Analogamente si prova che deve essere $M = f(x_0)$.

Teorema 3 (sulla continuità della funzione inversa) Sia $f : A \to B$ una funzione continua, iniettiva e suriettiva e sia A un intervallo. Allora la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ è pure una funzione continua.
Dimostrazione Per il teorema dei valori assunti, $B = f(A)$ è un intervallo. Per il teorema 1 inoltre f è o strettamente crescente o strettamente decrescente. La funzione inversa f^{-1} è monotona dello stesso tipo della diretta, è definita in un intervallo: B e $f^{-1}(B) = A$ è ancora un intervallo. Allora per il teorema 2, f^{-1} è una funzione continua.

Consideriamo infine alcuni esempi.

- **La funzione arcoseno**
La funzione $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ definita da $f(x) = \sin x$ è iniettiva e suriettiva. Infatti f é strettamente crescente. Questo si puó verificare usando la formula:

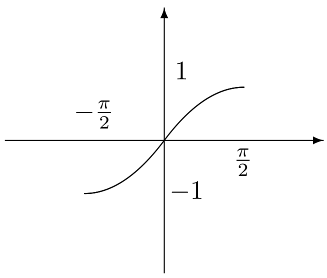
$$\sin y - \sin x = 2 \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

osservando che se $-\frac{\pi}{2} \le x < y \le \frac{\pi}{2}$, allora

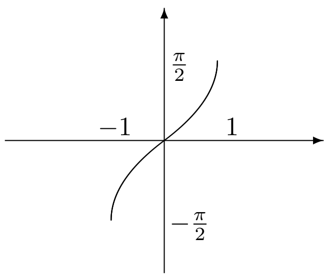
$$\frac{y+x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad \frac{y-x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e pertanto

$$\cos\left(\frac{y+x}{2}\right) > 0 \quad e \quad \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$$



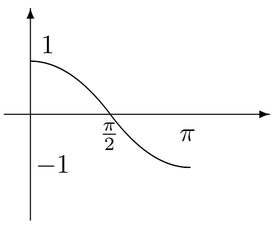
La funzione inversa $f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ viene chiamata **arcoseno** ed indicata con $f^{-1}(y) = \arcsin y$.
Il suo grafico è dato da:

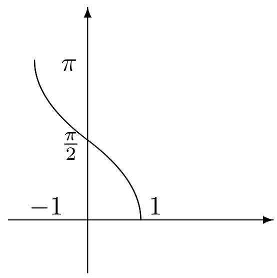


Da ricordare le due identità:

  – $\sin(\arcsin y) = y \quad \forall\, y \in [-1,1]$,
  – $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- **La funzione arcocoseno**
La funzione $f(x) = \cos x$ con $x \in [0,\pi]$ è strettamente decrescente (verificarlo per esercizio). Pertanto $f : [0,\pi] \to [-1,1]$ è una funzione iniettiva e suriettiva. La funzione inversa $f^{-1}\,[-1,1] \to [0,\pi]$ viene indicata col simbolo $f^{-1}(y) = \arccos y$. I grafici delle due funzioni (coseno ed arcocoseno) sono riportati nella seguente figura:

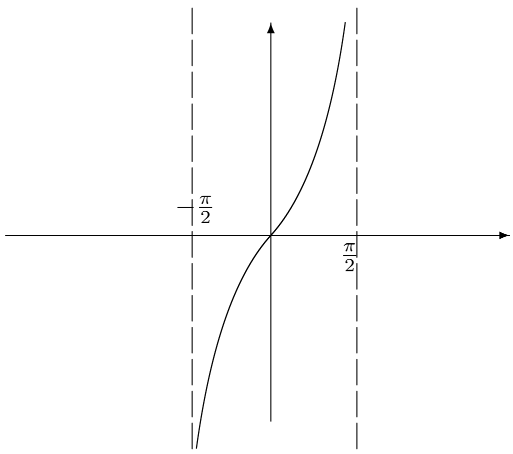




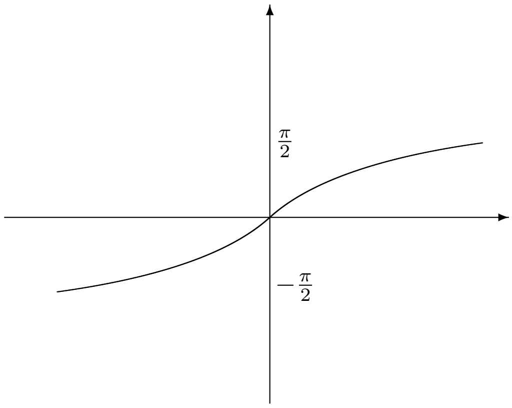
Da ricordare anche in questo caso le due identità:

- $\cos(\arccos y) = y \quad \forall\, y \in [-1, 1]$,
- $\arccos(\cos x) = x \quad \forall\, x \in [0, \pi]$.

- **La funzione arcotangente**
La funzione
$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
è una funzione continua e strettamente crescente. Infatti se $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$, si ottiene
$$\tan y - \tan x = \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y\, \cos x - \sin x\, \cos y}{\cos x\, \cos y} = \frac{\sin(y-x)}{\cos x\, \cos y} > 0$$
Infatti $\cos x > 0$, $\cos y > 0$ ed, essendo $y - x \in (0, \pi)$, si ha pure $\sin(y - x) > 0$. Osserviamo infine che
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$
Pertanto la funzione tangente è una funzione iniettiva e suriettiva tra $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\mathcal{R}$.



La sua funzione inversa $f^{-1} : \mathcal{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ viene chiamata **arcotangente** ed indicata col simbolo $f^{-1}(y) = \arctan y$ Il grafico dell'arcotangente è dato dalla figura:



Da notare infine le due identità:

- $\arctan(\tan x) = x \quad \forall\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- $\tan(\arctan y) = y \quad \forall\, y \in \mathcal{R}$.

5.3 Alcuni esercizi di ripasso

1. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n}{1+2^n}}$$
Risulta:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n}{1+2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

2. Sia a_n la successione così definita:
$$a_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$$
Dire se a_n ha limite.
Da notare che se n è pari, ossia se $n = 2\,h \;\; con \;\; h \in \mathcal{N}$, risulta:
$$a_{2\,h} = h - [h] = 0$$
D'altra parte se n è dispari, ossia se $n = 2\,h - 1 \;\; con \;\; h \in \mathcal{N}$, si ha:
$$a_{2\,h-1} = h - \frac{1}{2} - \left[h - \frac{1}{2}\right] = h - \frac{1}{2} - (h-1) = \frac{1}{2}$$
ne deriva quindi che la successione a_n non ha limite.

3. Verificare che la successione
$$a_n = \sqrt{n^2 + 2\,n + 3} - n$$
è strettamente decrescente e calcolarne il limite.
Risulta:
$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2\,n + 1 + 2\,n + 5} - n - 1 < \sqrt{n^2 + 2\,n + 3} - n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2+4\,n+6} < 1+\sqrt{n^2+2\,n+3} \Leftrightarrow n^2+4\,n+6 < 1+n^2+2\,n+3+2\sqrt{n^2+2\,n+3}$$

$$\Leftrightarrow n+1 < \sqrt{n^2+2\,n+3} \Leftrightarrow n^2+2\,n+1 < n^2+2\,n+3 \Leftrightarrow 1<3$$

Infine

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2\,n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2\,n+3}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

4. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(\frac{1+2\,x+x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\,\log\left(1+\frac{2\,x}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2\,x}{1+x^2}\right)}{\frac{2\,x}{1+x^2}}\,\frac{2\,x}{1+x^2}\,x = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$$

5. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,10^n}{n^2+n!}$$

Indichiamo con

$$a_n = \frac{n^2\,10^n}{n^2+n!}$$

e applichiamo il criterio del rapporto. Risulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2\,10^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}\,\frac{n^2+n!}{n^2+10^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\,\frac{10}{n+1}\,\frac{1+\frac{n^2}{n!}}{1+\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

Possiamo dunque concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,10^n}{n^2+n!} = 0$$

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{x}$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-\cos^2 x}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin^2 x}{x}\right)\,\frac{1}{\sqrt{1+x}+\cos x} = (1+0)\,\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

7. Sia a_n la successione definita dalla seguente legge ricorsiva:

$$\begin{array}{l} a_1 = \sqrt{2} \\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad \text{se } n \in \mathcal{N},\ n \geq 2 \end{array}$$

Verificare che a_n è strettamente crescente e limitata superiormente e calcolarne il limite. Ragioniamo per induzione. Risulta $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ e quindi $a_1 < a_2$. D'altra parte, se supponiamo $a_n < a_{n+1}$ per un certo numero naturale n, ottengo

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Verifichiamo infine sempre ragionando per induzione che

$$0 < a_n < 2 \quad \forall\ n \in \mathcal{N}$$

Infatti $0 < a_1 = \sqrt{2} < 2$ e, se supponiamo che, per un certo numero naturale n valga $0 < a_n < 2$, otteniamo

$$0 < a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2$$

Per il teorema sull'esistenza del limite di una successione monotona, esiste dunque finito il

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L\ .$$

Dalla relazione

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

deve essere $L = \sqrt{2+L}$, ossia $L^2 - L - 2 = 0$. Ne deriva quindi che

$$L = \frac{1 \mp \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Ricordando infine che deve essere $0 \leq L \leq 2$, si ottiene $L = 2$.

8. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$$

Il polinomio che sta al numeratore si annulla per $x = 1$ e pertanto è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione ottengo:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + x^2 + x - 3 & x - 1 \\ \hline & -x^3 + x^2 & x^2 + 2\,x + 3 \\ \hline & 2\,x^2 + x - 3 & \\ & -2\,x^2 + 2\,x & \\ \hline & 3\,x - 3 & \\ & -3\,x + 3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2\,x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2\,x + 3}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$$

9. Calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,x+3}{2\,x+5}\right)^x \quad , \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,x+3}{2\,x+5}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{2\,x+5}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{2\,x+5}{2}}\right)^{\frac{2\,x+5}{2}}\right]^{\frac{2\,x}{2\,x+5}} = \frac{1}{e}$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\,(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\;\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

10. Dire se esiste il

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\,\sin x}{1+x^2}$$

Poniamo

$$f(x) = \frac{x^2\,\sin x}{1+x^2}$$

e osserviamo che se indichiamo con $x_n = 2\,\pi\,n$ otteniamo una successione con

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

D'altra parte se indichiamo con $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n$ otteniamo una seconda successione con

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n^2}{1+y_n^2} = 1$$

Pertanto il limite di partenza non esiste.

11. Calcolare i limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{10^n\,n!}$$

Poniamo

$$a_n = \frac{n^n}{10^n\,n!}$$

e applichiamo il criterio del rapporto. Ottengo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{10^{n+1}\,(n+1)!}\;\frac{10^n\,n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\;\frac{1}{10} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\;\frac{1}{10}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{10} < 1$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{10^n\,n!} = 0$$

12. Verificare che l'equazione $\tan x = x$ ha infinite soluzioni.
Sia $a_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathcal{Z}$. La funzione $f(x) = \tan x - x$ é definita in ogni intervallo del tipo $A_k = (a_{k-1}, a_k)$ $(k \in \mathcal{Z})$ e risulta:
$$\lim_{x \to a_{k-1}^+} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to a_k^-} f(x) = +\infty$$
Possiamo quidi applicare il teorema degli zeri per ottenere che esiste $z_k \in (a_{k-1}, a_k)$ con $f(z_k) = 0$ ossia con $\tan(z_k) = z_k$.

13. Calcolare i limiti:
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2}\, \log\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+n!}}$$
Risulta:
$$\sqrt{1+x^2}\, \log\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) = \sqrt{1+x^2}\, \log\left(1+\frac{2\,x}{x^2-x}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{2\,x}{x^2-x}\right)}{\frac{2\,x}{x^2-x}}\, \frac{2\,x}{x^2-x}\, \sqrt{1+x^2}$$
Ne deriva quindi che
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x^2}\, \log\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right) = 1 \cdot 2 = 2$$
Raccogliendo 3^n a numeratore e $n!$ a denominatore, ottengo:
$$\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+n!}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n!}}\, \sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{4^n}{n!}}}$$
e quindi
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+n!}} = \frac{3}{+\infty} \cdot 1 = 0$$

14. Dire se esiste il limite:
$$\lim_{x \to +\infty} x\,(1+\sin x)$$
Indichiamo con $f(x) = x\,(1+\sin x)$ e osserviamo che se poniamo $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi \;\; n \;\in \mathcal{N}$ otteniamo una successione che verifica:
$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$$
D'altra parte, se poniamo $y_n = 2\,n\,\pi$ con $n \;\in \mathcal{N}$, otteniamo una seconda successione che verifica
$$\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$$
Allora il limite di partenza non esiste.

15. Calcolare il
$$\lim_{x \to +\infty} x\,(2+\sin x)$$
Essendo $2+\sin x \geq 1$ se $x > 0$ si ottiene
$$x\,(2+\sin x) \geq x$$
Pertanto
$$\lim_{x \to +\infty} x\,(2+\sin x) = +\infty\ .$$

16. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,8^n}{n^2+n!}$$
Posto
$$a_n = \frac{n^2\,8^n}{n^2+n!}$$
usando il criterio del rapporto, ottengo:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2\,8^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}\,\frac{n^2+n!}{n^2\,8^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 8\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{1+\frac{n^2}{n!}}{1+\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}$$
Pertanto:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$
e quindi risulta zero anche il limite considerato.

17. Verificare che l'equazione
$$x\,\sin x = 10$$
ammette infinite soluzioni:
Se poniamo
$$a_k = 2\,k\,\pi \quad e \quad b_k = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \quad k\in\mathcal{N}$$
ed indichiamo con $f(x) = x\,\sin x$, si ottiene
$$f(a_k) = 0 \quad e \quad f(b_k) = b_k = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$$
Pertanto se $k\in\mathcal{N}$ è scelto in modo che
$$\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi > 10$$
per il teorema dei valori assunti, esiste $x_k \in (a_k, b_k)$ con $f(x_k) = 10$, ossia una soluzione dell'equazione considerata.

18. Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty} n\,\sin\left(\frac{2\,n+6}{n^2+n+3}\right)$$
Risulta
$$n\,\sin\left(\frac{2\,n+6}{n^2+n+3}\right) = n\,\frac{\sin\left(\frac{2\,n+6}{n^2+n+3}\right)}{\frac{2\,n+6}{n^2+n+3}}\,\frac{2\,n+6}{n^2+n+3}$$
Ne deriva che
$$\lim_{n\to\infty} n\,\sin\left(\frac{2\,n+6}{n^2+n+3}\right) = 2$$

19. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+x^2}-e^{-2\,x}}{\sin(3\,x)} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

Nel primo limite, raccogliendo $e^{-2\,x}$, si ottiene:

$$e^{-2\,x}\,\frac{e^{3\,x+x^2}-1}{\sin(3\,x)}=e^{-2\,x}\,\left(\frac{e^{3\,x+x^2}-1}{3\,x+x^2}\right)\,\frac{3\,x+x^2}{\sin(3\,x)}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+x^2}-e^{-2\,x}}{\sin(3\,x)}=1$$

Nel secondo, razionalizzando, si ottiene:

$$\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=1$$

20. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{2^n+n^n}\qquad\lim_{n\to\infty}\left(n^2+n\right)\log\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)$$

Nel primo limite, posto

$$a_n=\frac{(n!)^2}{2^n+n^n}$$

usando il criterio del rapporto, si ottiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{[(n+1)!]^2}{2^{n+1}+(n+1)^{n+1}}\,\frac{2^n+n^n}{(n!)^2}=(n+1)\,\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\,\frac{1+\frac{2^n}{n^n}}{1+\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}$$

Si ottiene quindi che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$$

e quindi vale anche

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{2^n+n^n}=+\infty$$

Per calcolare il secondo limite, osserviamo che

$$\left(n^2+n\right)\log\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)=\left(n^2+n\right)\log\left[1+\left(\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)-1\right)\right]=$$

$$=\frac{\log\left[1+\left(\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)-1\right)\right]}{\left(\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)-1\right)}\,\frac{\left(\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)-1\right)}{\left(\frac{3}{n+1}\right)^2}\,\left(\frac{3}{n+1}\right)^2\,\left(n^2+n\right)$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2+n\right)\log\cos\left(\frac{3}{n+1}\right)=-\frac{9}{2}$$

21. Dire se esiste il

$$\lim_{x\to 0} x\, e^{-\frac{1}{x}}$$

Ponendo $y = \frac{1}{x}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x\, e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{y} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\, e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} \frac{e^{-y}}{y} = -\infty$$

e quindi il limite iniziale non esiste.

22. Verificare che valgono le seguenti identità:

- a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall\, x \in [-1,1]$,
- b) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall\, x \in [-1,1]$,
- c) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, x \in [-1,1]$.

Siccome $\arccos x \in [0,\pi]$, risulta:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2} = \sqrt{1-x^2}$$

Analogamente, si verifica la b).
Per ottenere la c), ricordiamo che $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intervallo in cui il seno è strettamente crescente. Ne deriva che:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \Leftrightarrow x = \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\arccos x) - \sin(\arccos x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = x$$

5.4 Esempio di seconda prova scritta in classe

Prova A

1) Calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos(3\,x)} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} (x+2)\log\left(\frac{x^2+2\,x+1}{x^2-x+3}\right)$$

2) Calcolare i limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n+n^2+n^3}{2^n+3^n}} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+\sqrt{n}}\right)^n$$

3) Dire se esiste il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

4) Vericare che l'equazione

$$\frac{x}{3} = \log x$$

ammette almeno due soluzioni .

5) **Esercizio di recupero per chi vuole migliorare il risultato della prima provetta**
Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 - n + 1} - n \ , \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare sup A e inf A.

Prova B

1) Calcolare i limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 - \cos(4\,x)} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} (x+2) \log \left(\frac{x^2 + 3\,x + 1}{x^2 - x + 1} \right)$$

2) Calcolare i limiti:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1 + n^2 + n^3}{3^n + 5^n}} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n + \sqrt{n}} \right)^n$$

3) Dire se esiste il limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n+2} \sin \left(n \, \frac{\pi}{2} \right)$$

4) Vericare che l'equazione

$$e^x = 3\,x$$

ammette almeno due soluzioni .

5) **Esercizio di recupero per chi vuole migliorare il risultato della prima provetta**
Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 - n + 1} - n \ , \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare sup A e inf A.

Correzione della prova A

1) Nel primo limite, razionalizzando, si ottiene:

$$\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos(3\,x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \, \frac{x^2}{1 - \cos(3\,x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \, \frac{(3\,x)^2}{1 - \cos(3\,x)} \, \frac{1}{9}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos(3\,x)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Nel secondo limite, osservo che:

$$\frac{x^2 + 2\,x + 1}{x^2 - x + 3} = \frac{x^2 - x + 3 + 3\,x - 2}{x^2 - x + 3} = 1 + \frac{3\,x - 2}{x^2 - x + 3}$$

Posso quindi scrivere:

$$(x+2) \log \left(\frac{x^2 + 2\,x + 1}{x^2 - x + 3} \right) = \frac{\log \left(1 + \frac{3\,x - 2}{x^2 - x + 3} \right)}{\frac{3\,x - 2}{x^2 - x + 3}} \, \frac{3\,x - 2}{x^2 - x + 3} \, (x+2)$$

Ne deriva quindi che:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2)\log\left(\frac{x^2+2\,x+1}{x^2-x+3}\right)=1\cdot 3=3$$

2) Per calcolare il primo limite, osserviamo che:

$$\sqrt[n]{\frac{1+n+n^2+n^3}{2^n+3^n}}=\frac{\sqrt[n]{n^3}}{3}\ \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1+n+n^2+n^3}{2^n+3^n}}=\frac{1}{3}$$

Nel secondo limite, osserviamo che:

$$\left(\frac{n+1}{n+\sqrt{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}}\right)^{\frac{n+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}}\right]^{\frac{1-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\,n}$$

Ricordando che

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^y=e$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+\sqrt{n}}\right)^n=e^{-\infty}=0$$

3) Poniamo

$$a_n=\frac{n+1}{n+2}\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo, in primo luogo, che se n é dispari, ossia se $n=2\,h+1$, otteniamo

$$\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(h\,\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

e quindi $b_h=a_{2\,h+1}=0$.D'altra parte se n é multiplo di 4, ossia se $n=4\,h$, risulta

$$\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\,h\,\pi\right)=1$$

e quindi:

$$c_h=a_{4\,h}=\frac{4\,h+1}{4\,h+2}$$

e quindi

$$\lim_{h\to\infty}c_h=1$$

La successione a_n ammette due sottosuccessioni con limiti diversi e quindi non é dotata di limite.
4) Poniamo

$$f(x)=\frac{x}{3}-\log x$$

e osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e che

$$f(e) = \frac{e}{3} - \log e = \frac{e}{3} - 1 < 0$$

Dalla definizione di limite, possiamo ora trovare due numeri $a\,,b$ con $0 < a < e < b$ tali che $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Possiamo quindi aopplicare il teorema degli zeri per affermare che esistono due punti $x_1\,,x_2$ con $a < x_1 < e < x_2 < b$ con $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
5) Posto $a_n = \sqrt{n^2 - n + 1} - n$, verifichiamo che la successione a_n é decrescente. Infatti risulta:

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2\,n + 1 - n - 1 + 1} - n - 1 < \sqrt{n^2 - n + 1} - n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n + 1} < \sqrt{n^2 - n + 1} + 1 \Leftrightarrow n^2 + n + 1 < n^2 - n + 1 + 1 + 2\,\sqrt{n^2 - n + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,n + 1 < 2\,\sqrt{n^2 - n + 1} \Leftrightarrow 4\,n^2 - 4\,n + 1 < 4\,n^2 - 4\,n + 4$$

Ne deriva quindi che

$$\sup\, A = \max\, A = a_1 = 0$$

$$\inf\, A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-n+2}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = -\frac{1}{2}$$

6 DERIVATE

6.1 Definizione e prime proprietà

Sia f:$[a,b] \to \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a,b]$. La funzione

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad x \in [a,b]-\{x_0\} \ ,$$

viene chiamata il **rapporto incrementale** di f in x_0. Diremo che la funzione f é **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Tale limite viene chiamato la **derivata** di f nel punto x_0 ed é indicato, di solito, con il simbolo $f'(x_0)$. Pertanto

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Usando la ε -definizione di limite possiamo scrivere che :

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta_\varepsilon > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x \in [a,b] \ \textit{con} \ 0 < |x-x_0| < \delta_\varepsilon \ \textit{si ha}$$

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora alcuni esempi:

1. Sia $f(x) = x^2$ e sia x_0 un qualunque numero reale, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x+x_0) = 2\,x_0$$

2. Sia $f(x) = x^3$ e sia x_0 un qualunque numero reale, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2+x\,x_0+x_0^2)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} (x^2+x\,x_0+x_0^2) = 3\,x_0^2$$

3. Sia $f(x) = \sqrt{x}$ *con* $x \geq 0$ e sia x_0 un numero reale positivo, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

D'altra parte nel punto $x_0 = 0$, risulta:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Pertanto la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

4. Sia $f(x) = \sin x$ e sia x_0 un qualunque numero reale. Usando la formula

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos x_0$$

5. Sia $f(x) = \cos x$ e sia x_0 un qualunque numero reale. Usando la formula

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin x_0$$

6. Sia $f(x) = e^x$ e sia x_0 un qualunque numero reale, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

7. Sia $f(x) = \log x$ *con* $x > 0$ e sia x_0 un qualunque numero reale positivo, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\log \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\log\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}$$

6.2 Osservazione

Se $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ è una funzione derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$, allora f è continua in x_0. Infatti risulta:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Pertanto:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0)\, 0 = 0.$$

Il viceversa di questa affermazione non è vera; ossia una funzione può essere continua in un punto senza essere ivi derivabile. Un esempio è la funzione $f(x) = |x|$. Infatti tale funzione è continua in ogni punto e se consideriamo il punto $x_0 = 0$, risulta:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

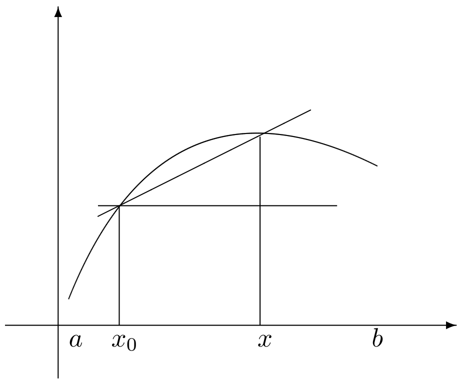
Pertanto f non è derivabile in 0.

6.3 Significato geometrico del concetto di derivata

Fissati due punti x_0 ed x nell'intervallo $[a, b]$, indichiamo con r la retta passante per i punti del piano di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Se indichiamo con α la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con l'asse delle x, risulta:

$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il rapporto incrementale quindi della funzione f nel punto x_0 ha il significato geometrico di coefficiente angolare ($\tan\alpha$) della retta secante (la retta per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$).



Se f è derivabile nel punto x_0, il rapporto incrementale tende a $f'(x_0)$ quando x tende a x_0 e la retta secante (che varia la variare di x) tende ad una retta limite: la retta che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ ed ha coefficiente angolare $f'(x_0)$. Tale retta viene chiamata la **retta tangente** al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$. La sua equazione risulta quindi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\ .$$

Da notare che, se indichiamo con:

$$d(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

la distanza con segno, sulla retta verticale, dei punti, rispettivamente sul grafico di f e sul grafico della tangente, che si proiettano in x, risulta:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{d(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

Da notare inoltre che la proprietá di limite indicata é vera solo per la retta tangente, infatti se

$$y = f(x_0) + m\,(x - x_0)$$

é l'equazione di un'altra retta passante per il punto del piano $(x_0, f(x_0))$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + m\,(x - x_0))}{x - x_0} = f'(x_0) - m \neq 0 \quad se \quad m \neq\ f'(x_0).$$

6.4 Regole di derivazione della somma, del prodotto e del quoziente

Siano f, $g : [a,b] \to \mathcal{R}$ due funzioni derivabili in un punto $x_0 \in [a,b]$, allora

i) la funzione somma f+g è derivabile nel punto x_0 e vale la formula:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \ ;$$

ii) la funzione prodotto f g è derivabile in x_0 e vale la formula:

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) \ ;$$

iii) se $g(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$, allora la funzione quoziente $\frac{f}{g}$ è derivabile nel punto x_0 e vale la formula:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Dimostrazione

i) Lasciata per esercizio.

ii) Risulta:

$$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Passando quindi al limite per x tendente ad x_0, si ottiene la seconda formula, ricordando che g, essendo derivabile in x_0, è anche continua in tale punto.

iii) Risulta:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)} =$$

$$= \frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x)\,g(x_0)} =$$

$$= \frac{[f(x) - f(x_0)]\,g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)\,g(x_0)}$$

Dividendo ora per $x - x_0$ e facendo tendere x a x_0, si ottiene la formula di derivazione del quoziente cercata.

6.5 Regola di derivazione della funzione composta

Siano $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ e $g : [c,d] \to \mathcal{R}$ due funzioni. Supponiamo che $f([a,b]) \subset [c,d]$ in modo che si possa considerare la funzione composta:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Supponiamo inoltre che la funzione f sia derivabile nel punto x_0 e che la funzione g sia derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta h è derivabile nel punto x_0 e vale la seguente formula:

$$h'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Dimostrazione Poniamo:

$$\sigma(y, y_0) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{se } y \in [c, d] - \{y_0\} \\ \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

Dalla definizione di derivata, si ottiene che :

$$\lim_{y\to y_0} \sigma(y, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = \sigma(y_0, y_0)$$

e quindi la funzione $\sigma : [c, d] \to \mathcal{R}$ è una funzione continua in y_0. Inoltre, dalla definizione di σ, si ottiene per ogni $y \in [c, d]$:

$$g(y) - g(y_0) = \sigma(y, y_0)\, (y - y_0)$$

Ponendo infine $y = f(x)$, nella formula precedente e dividendo per $x - x_0$, si ottiene:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \sigma(f(x), y_0)\, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Usando infine il teorema sul limite della funzione composta, otteniamo che

$$h'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y\to y_0} \sigma(y, y_0) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \sigma(y_0, y_0)\, f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$$

6.6 Regola di derivazione della funzione inversa

Sia $f : [a, b] \to [c, d]$ una funzione continua e invertibile, ossia continua, iniettiva e suriettiva. Indichiamo con $g : [c, d] \to [a, b]$ la sua funzione inversa. Supponiamo che la funzione diretta f sia derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$ e che si abbia $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa g è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

Dimostrazione Ponendo $y = f(x)$, per il teorema sul limite della funzione composta, ottengo:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

6.7 Alcuni esempi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1.

$$f(x) = x\,\cos x$$

Se $x_0 \in R$, risulta:

$$f'(x_0) = \cos x_0 - x_0\,\sin x_0$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

Se $x_0 \in R$, risulta:

$$f'(x_0) = \frac{(2x_0+1)(x_0^2+1) - (x_0^2+x_0+1)\,2\,x_0}{(x_0^2+1)^2}$$

3.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad x \neq \pi/2 + k\,\pi \ , \ k \in \mathcal{Z}$$

In ogni punto $x_0 \neq \pi/2 + k\,\pi$, $k \in \mathcal{Z}$, risulta:

$$f'(x_0) = \frac{\cos x_0\,\cos x_0 - \sin x_0(-\sin x_0)}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2 x_0$$

4.

$$f(x) = x^n \ , \ n \in \mathcal{N}$$

Se $x_0 \in \mathcal{R}$, risulta:

$$f'(x_0) = n\,x_0^{n-1}$$

(Verifichiamo questa formula, ragionando per induzione su n). Se $n = 1$, la formula è vera. Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo numero naturale n, allora si ha:

$$(x^{n+1})'(x_0) = (x^n\,x)'(x_0) = (x^n)'(x_0)\,x_0 + x_0^n = n x_0^{n-1}\,x_0 + x_0^n = (n+1)x_0^n$$

e quindi la formula vale per $n+1$. Pertanto vale per ogni n.

5.

$$h(x) = \log(1+x^2)$$

Cosideriamo la funzione h come composta delle due funzioni $g(y) = \log y$ e $f(x) = 1 + x^2$. Dalla formula di derivazione della composta, si ottiene:

$$h'(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}\,2x_0 \ .$$

6.

$$g(y) = \arctan y \quad y \in \mathcal{R}$$

Posto $f(x) = \tan x \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$, risulta, se $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ *e* $y_0 = \tan x_0$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2} \ .$$

7.
$$g(y) = \arcsin y \quad y \in [-1, 1]$$

Posto $f(x) = \sin x$ $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, risulta,se $y_0 \in (-1, 1)$ e $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ sono tali che $y_0 = \sin x_0$:
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}} \ .$$

8.
$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

Si ha che $f(x) = e^{x \ \log x}$, pertanto per la regola di derivazione della funzione composta , si ha se $x_0 > 0$:
$$f'(x_0) = e^{x_0 \ \log x_0} (\log x_0 + x_0 \, \frac{1}{x_0}) = x_0^{x_0} (\log x_0 + 1) \ .$$

9.
$$h(x) = (f(x))^{g(x)}$$

dove supponiamo che $f(x) > 0$ $\forall \, x$ appartenente al suo insieme di definizione. Essendo
$$h(x) = e^{g(x) \log f(x)}$$

si ha:
$$h'(x_0) = e^{g(x_0) \ \log f(x_0)} \left(g'(x_0) \log f(x_0) + g(x_0) \, \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right)$$

Come caso speciale, vogliamo mettere in risalto la formula quando $f(x) = x$ e $g(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathcal{R}$. Si ottiene allora la funzione $h(x) = x^\alpha$ e risulta:
$$h'(x_0) = \alpha \, x_0^{\alpha - 1}$$

10.
$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \neq 0$$

Se $x_0 \neq 0$, si ottiene:
$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x_0})^2} (-\frac{1}{x_0^2}) = -\frac{1}{1 + x_0^2}$$

11.
$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Si ha:
$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}} \left(1 + \frac{2 \, x_0}{2 \, \sqrt{1 + x_0 2}}\right) = \frac{\sqrt{1 + x_0^2} + x_0}{x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}} \, \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}}$$

12. **Le funzioni iperboliche** Poniamo

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Le due funzini f e g godono delle seguenti proprieta :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$f'(x_0) = \frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} = g(x_0)$$

$$g'(x_0) = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{2} = f(x_0)$$

7 APPLICAZIONE DELLE DERIVATE ALLO STUDIO DI FUNZIONI

In questo capitolo illustreremo alcuni metodi analitici utili per studiare il grafico di una funzione.

7.1 Massimi e minimi relativi e teorema di Fermat

Sia $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Diremo che il punto x_0 é un **punto di minimo (massimo) relativo** se :

$$\exists\, r > 0 \text{ tale che } \forall x \in [a, b] \cap [x_0 - r, x_0 + r] \text{ vale la diseguaglianza}$$

$$f(x) \geq f(x_0)\ (f(x) \leq f(x_0)\ ).$$

Molto importante é il seguente:

Teorema di Fermat
Sia $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Supponiamo che:

i) il punto x_0 sia un punto di minimo (massimo) relativo per f;

ii) x_0 sia un punto interno all'intervallo $[a, b]$: ossia $x_0 \in (a, b)$;

iii) la funzione f sia derivabile nel punto x_0.

Allora risulta $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione Supponiamo che il punto x_0 sia un punto di minimo relativo. Allora $\exists\, r > 0$ tale che $\forall x \in [a, b] \cap [x_0 - r, x_0 + r]$ vale la diseguaglianza $f(x) \geq f(x_0)$. Inoltre, usando la seconda ipotesi e scegliendo r eventualmente piú piccolo, posso supporre che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a, b]$. Ne deriva quindi che:

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)\ si\ ha\ f(x) - f(x_0) \geq 0\ .$$

Allora il rapporto incrementale della funzione f nel punto x_0 ha il seguente segno:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x < x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

Possiamo quindi concludere, essendo f derivabile in x_0, che:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e quindi che deve essere $f'(x_0) = 0$.
Concludiamo il paragrafo sul teorema di Fermat, osservando che:

- se il punto di minimo (massimo) relativo x_0 non è interno all'intervallo $[a, b]$: ossia se $x_0 = a$ o $x_0 = b$ (e quindi la seconda ipotesi del teorema di Fermat non è verificata), allora in generale non si ha che $f'(x_0) = 0$. Infatti, se consideriamo la funzione $f(x) = x$ con $x \in [0, 1]$, risulta che $x_0 = 0$ è il punto di minimo di f in $[0, 1]$ (e quindi anche un punto di minimo relativo) e risulta $f'(0) = 1$;
- la condizione $f'(x_0) = 0$ è una condizione solo necessaria a che x_0 sia punto di minimo o di massimo relativo. In altre parole, una funzione può avere derivato zero in un punto senza che questo punto sia di minimo né di massimo relativi per la funzione. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ $(x \in \mathcal{R})$ è una funzione strettamente crescente anche se $f'(0) = 0$.

7.2 Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Supponiamo che:

i) f sia continua in ogni punto dell'intervallo chiuso $[a, b]$;

ii) f sia derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b);

iii) $f(a) = f(b)$.

Allora:

$$\exists\, c \in (a, b) \textit{ tale che } f'(c) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Essendo f una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, posso applicare il teorema di Weierstrass e affermare che :

$$\exists\, x_1\, , x_2 \in [a, b] \textit{ tali che } f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in [a, b] \ .$$

(ossia la funzione f assume in $[a, b]$ sia valore minimo che valore massimo). Cosideriamo ora i seguenti casi:

- se il punto di minimo x_1 è interno all'intervallo $[a, b]$: ossia se $x_1 \in (a, b)$, allora, per il teorema di Fermat, $f'(x_1) = 0$ e il teorema di Rolle è dimostrato prendendo $c = x_1$;
- se x_1 coincide con a o con b, consideriamo il punto x_2 e supponmiamo che x_2 sia interno all'intervallo $[a, b]$: ossia $x_2 \in (a, b)$, allora sempre per il teorema di Fermat, si ha $f'(x_2) = 0$ e il teorema di Rolle è dimostrato prendendo $c = x_2$;
- infine se x_1 e x_2 coincidono entrambi con gli estremi (per esempio $x_1 = a$ *e* $x_2 = b$), allora dall'ipotesi $f(a) = f(b)$, si ha che il valore minimo di f coincide col suo valore massimo, pertanto in questo caso f è costante ($f(x) = f(a) = f(b)\ \forall\, x \in [a, b]$). Allora $f'(x) = 0\ \forall\, x \in (a, b)$.

7.3 Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to R$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Supponiamo che :

i) f sia continua in ogni punto dell'intervallo chiuso $[a, b]$;

ii) f sia derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b).

Allora:

$$\exists\, c \in (a,b) \; tale\ che \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \; .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Risulta:

$$y = s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Notiamo infine che la funzione differenza:

$$g(x) = f(x) - s(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right)$$

verifica le ipotesi del teorema di Rolle: infatti g è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ perchè f ed s lo sono, è derivabile nell'intervallo aperto (a,b), sempre perchè f e s lo sono ed inoltre risulta $g(a) = g(b) = 0$. Allora per il teorema di Rolle esiste un punto c tale che $g'(c) = 0$. Ossia:

$$0 = g'(c) = f'(c) - s'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Pertanto il teorema di Lagrange è dimostrato.

7.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

Sia $f\ : [a,b] \to \mathcal{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a,b]$.

- Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$, allora f è strettamente crescente in $[a,b]$. Infatti se $x_1\,, x_2 \in [a,b]$ sono tali che $x_1 < x_2$, applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$, si ottiene che esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$, con:

  $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

  ed essendo $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$, risulta:

  $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

  e quindi $f(x_2) > f(x_1)$;
- se $f'(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$, allora f è strettamente decrescente in $[a,b]$;
- se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, allora f è crescente in $[a,b]$;
- se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$, allora f è decrescente in $[a,b]$;
- se $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$, allora f è costante in $[a,b]$.

Usando questi fatti, potremo enunciare i seguenti criteri per stabilire se un punto x_0 è un punto di massimo o minimo relativi.

Supponiamo che $x_0 \in (a,b)$, che $r > 0$ sia tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a,b]$ e che $f'(x_0) = 0$. Allora

- se $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ e $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
- se $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ e $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$, allora x_0 è un punto di massimo relativo;
- se $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ (oppure $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$), allora x_0 non è un punto nè di massimo né di minimo relativo.

Riassumendo quanto visto a parole, possiamo dire che se la derivata prima di una funzione é nulla in un punto interno x_0 ed ha valori di segno diverso in un intorno sinistro e destro di x_0, allora il punto x_0 é un punto di massimo o minimo relativi. Invece se la derivata si annulla in x_0, ma poi ha valori dello stesso segno in un intorno sinistro e destro di x_0, allora il punto x_0 non è nè di massimo nè di minimo relativo.

7.5 Derivate di ordine superiore

Se $f\ : [a, b] \to \mathcal{R}$ é una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$, possiamo considerare la funzione derivata $f'\ : [a, b] \to R$, cioé la funzione che ad ogni $x \in [a, b]$ associa $f'(x)$. Se la funzione f' é derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$ diremo che la funzione f é **derivabile due volte** in x_0 e chiameremo tale derivata la **derivata seconda** di f in x_0 e la indicheremo col simbolo $f''(x_0)$.
Pertanto :

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Ad esempio:

- $$f(x) = x\ \sin x$$
  $$f'(x) = \sin x + x\ \cos x$$
  $$f''(x) = \cos x + \cos x - x\ \sin x = 2\ \cos x - x\ \sin x\ .$$
- $$f(x) = \tan x \quad x \neq \pi/2 + k\,\pi \quad k\ intero\ relativo$$
  $$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$
  $$f''(x) = 2\ \tan x\,(1 + \tan^2 x)$$

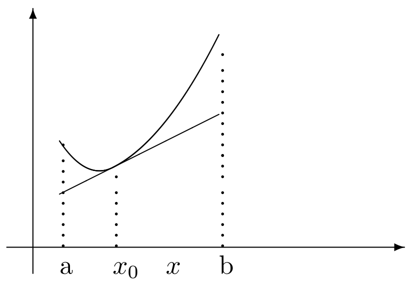
Da notare il seguente criterio per individuare i punti di massimo e minimo relativi.
Sia $f\ : [a, b] \to \mathcal{R}$ una funzione dotata di derivata seconda continua in ogni punto di $[a, b]$ e $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che $f'(x_0) = 0$ e che $f''(x_0) > 0$. Allora il punto x_0 é un punto di minimo relativo per f.
Infatti, essendo $f''(x_0) > 0$ ed essendo f'' una funzione continua, allora per il teorema della permanenza del segno, esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a, b]$ e $f''(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora f' é una funzione crescente (avendo derivata positiva) e siccome $f'(x_0) = 0$, risulta $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$ e $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0 - r, x_0)$. Pertanto x_0 é punto di minimo relativo.
Analogamente se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora il punto x_0 é un punto di massimo relativo per f.

7.6 Funzioni convesse

Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$. Diremo che f é **convessa** nell'intervallo $[a, b]$ se :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \; \forall x \,, x_0 \in [a, b] \; .$$

Da notare che il significato geometrico della definizione di convessitá é la seguente: il grafico della funzione sta sempre "sopra" la retta tangente (qualunque sia il punto in cui tale tangente viene considerata).



Un criterio per stabilire se una funzione é convessa é il seguente:
Criterio di convessitá Se una funzione é dotata di derivata seconda e risulta $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b]$, allora f é convessa in $[a, b]$.

Infatti se la derivata seconda é maggiore o uguale a zero, allora la derivata prima é crescente e quindi, supponendo $x_0 < x$ e applicando il teorema di Lagrange, ottengo che $\exists \; c \in (x_0, x)$ tale che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \geq f'(x_0)$$

e quindi la funzione f é convessa.
Una funzione viene detta poi **concava** se la funzione $-f$ é convessa. In altre parole se :

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \; \forall x \,, x_0 \in [a, b] \; .$$

Da un ragionamento simile a quello fatto in precedenza risulta che se $f''(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b]$, allora f é concava in $[a, b]$.
Diremo infine che il punto $x_0 \in (a, b)$ é un **flesso** per la funzione f se esiste un numero $r > 0$ tale che f é convessa nell'intervallo $[x_0 - r, x_0]$ ed é concava nell'intervallo $[x_0, x_0 + r]$ (o viceversa).

7.7 Studio del grafico di una funzione

Applicheremo le considerazioni dei paragrafi precedenti allo studio del grafico di una funzione. Indichiamo il metodo generale di procedere:

- Determinare il dominio (o insieme di definizione) D della funzione e calcolare i limiti quando x tende agli estremi di D.

- Evidenziare qualche proprietá qualitativa di f (se evidente). Per esempio se f é pari o dispari, dove la funzione si annulla o dove la funzione é positiva o negativa.

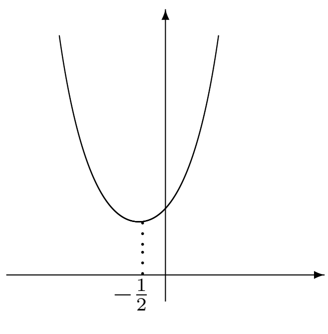
- Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, per vedere dove la funzione é crescente o decrescente e per trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativi.

- Calcolare la derivata seconda della funzione e studiarne il segno per vedere dove la funzione é convessa e dove é concava e per trovare gli eventuali punti di flesso.

- Vedere se la funzione ha **asintoti obliqui**, ossia vedere se esiste una retta di equazione $y = m\,x + q$ tale che:
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (m\,x + q)) = 0$$
(asintoto a $+\infty$); oppure tale che:
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (m\,x + q)) = 0$$
(asintoto a $-\infty$).
Da notare che una retta di equazione $y = m\,x + q$ é asintoto di una funzione f a $+\infty$ se e solo se :
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e\ q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x)$$
Analogamente una retta di equazione $y = m\,x + q$ é asintoto di una funzione f a $-\infty$ se e solo se :
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e\ q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m\,x)$$

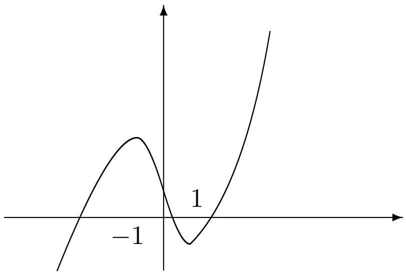
Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Tracciare il grafico della funzione : $f(x) = x^2 + x + 2$.
Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$. Inoltre $f'(x) = 2\,x + 1$ e quindi il punto $x = -\frac{1}{2}$ é un punto di minimo relativo per f. Inoltre risulta $f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$. Pertanto il grafico della funzione f é del tipo :



2. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.
Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$. Inoltre:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ e \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Inoltre $f'(x) = 3\,x^2 - 3$ e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -1$ o $x > 1$. Il punto $x = -1$ pertanto é un punto di massimo relativo per f, mentre il punto $x = 1$ é un punto di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$. Risulta infine $f''(x) = 6\,x$. Pertanto la funzione é convessa nell'intervallo $[0, +\infty)$ ed é concava nell'intervallo $(-\infty, 0]$. Pertanto il grafico della funzione f é del tipo :



3. Tracciare il grafico della funzione :

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

Il dominio della funzione risulta $D = \{x \in \mathcal{R}\ ;\ x \neq 0\}$ e risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ e \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \ e \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Risulta inoltre

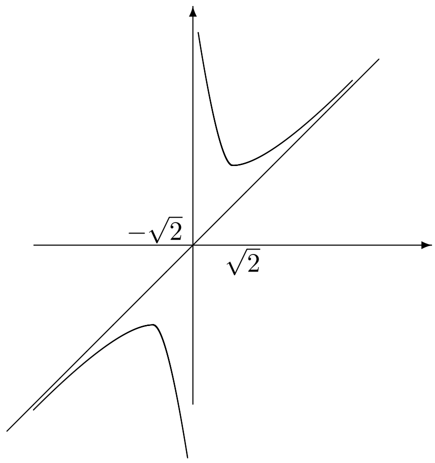
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ pertanto é un punto di massimo relativo per f, mentre il punto $x = \sqrt{2}$ é un punto di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-\sqrt{2}) = -2\,\sqrt{2}$ e $f(\sqrt{2}) = 2\,\sqrt{2}$. Infine $f''(x) = \frac{4}{x^3}$. Pertanto la funzione é convessa nell'intervallo $(0, +\infty)$ ed é concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Osserviamo ancora che la funzione é dispari e che si ha :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \ e \ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \ e \ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = 0$$

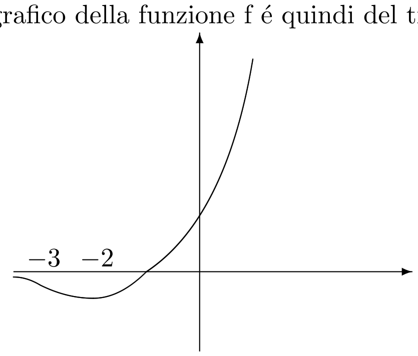
Pertanto la retta di equazione $y = x$ é asintoto al grafico di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Il grafico della funzione f é quindi del tipo:



4. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = (x+1)e^x$.
   Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$ e risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ e \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

   Come si vede facilmente, la funzione é positiva se $x > -1$.
   Risulta $f'(x) = e^x(1 + x + 1) = e^x(x+2)$ e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -2$. Il punto $x = -2$ é un punto di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-2) = -e^{-2}$. Infine $f''(x) = e^x(x+3)$. Pertanto la funzione é convessa nell'intervallo $[-3, +\infty)$ ed é concava nell'intervallo $(-\infty, -3]$. Il grafico della funzione f é quindi del tipo :



5. Tracciare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

   Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$ e risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \ e \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

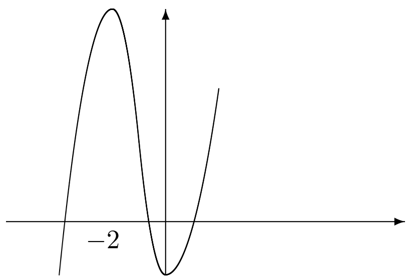
Come si vede facilmente , la funzione é positiva se $x > -1$.
Risulta

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - (x + 1)(2\,x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x\,(x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

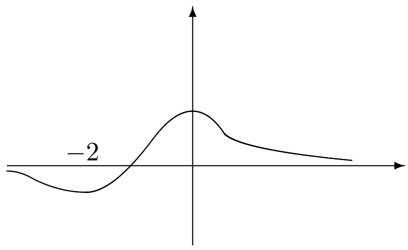
quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2, 0)$. Il punto $x = -2$ é un punto di minimo relativo e il punto $x = 0$ é un punto di massimo relativo. Da notare che risulta $f(-2) = -1/3$ e $f(0) = 1$.
Infine

$$f''(x) = -\frac{(2\,x + 2)(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + 2\,x)\,2\,(x^2 + x + 1)(2\,x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} = \frac{2\,x^3 + 6\,x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Osserviamo che il segno della derivata seconda, essendo il denominatore sempre positivo, é determinato dal segno del numeratore che é un polinomio di terzo grado. Per studiare il segno di tale numeratore , indichiamolo con $g(x)$, ossia $g(x) = 2\,x^3 + 6\,x^2 - 2$ e facciamo un rapido studio di questa funzione. Risulta $g'(x) = 6\,x^2 + 12\,x = 6\,x(x + 2)$ e quindi $g'(x) > 0$ se e solo se $x < -2$ o $x > 0$. Essendo $g(-2) > 0$ e $g(0) < 0$, otteniamo per la funzione g un grafico del tipo:



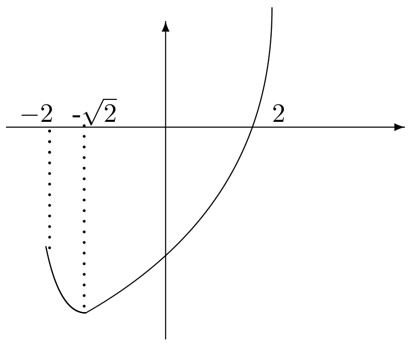
Ne deriva pertanto che la funzione g si annulla in tre punti: x_1 , x_2 , x_3 con $x_1 < -2$, $-1 < x_2 < 0$ *e* $0 < x_3 < 1$ e il segno della funzione g é quello indicato in figura. Pertanto la funzione f é convessa negli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_3, +\infty)$ ed é concava negli intervalli $(-\infty, x_1]$ e $[x_2, x_3]$. Il grafico della funzione f é quindi del tipo:



6. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$.
Dovendo essere $4 - x^2 \geq 0$, il dominio della funzione é : $D = [-2, 2]$. Da notare inoltre che $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$ *e* $f(0) = -2$. Inoltre:

$$f(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow x > \sqrt{4 - x^2} \;\Leftrightarrow x > 0 \;e\; x^2 \geq 4 - x^2 \;\Leftrightarrow\; x \geq \sqrt{2}$$

Risulta inoltre:
$$f'(x) = 1 - \frac{-2\,x}{2\,\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}$$
Pertanto
$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{4-x^2} \geq -x\ .$$
Notiamo ora che se $x \geq 0$ l'ultima diseguagliaza é sempre verificata, mentre se $x < 0$ l'ultima disuguaglianza si riduce a:$4 - x^2 \geq x^2$ e quindi $-\sqrt{2} \leq x < 0$. Possiamo quindi concludere che $f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{2} \leq x \leq 2$. Il punto $-\sqrt{2}$ é quindi un punto di minimo relativo. Risulta infine:
$$f''(x) = \left(\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)\frac{1}{4-x^2} = \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$$
Pertanto la funzione considerata é convessa. Il grafico sará del tipo :

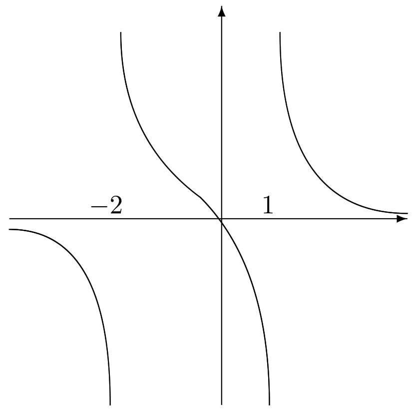


7. Tracciare il grafico della funzione:
$$f(x) = \frac{x}{(x-1)\,(x+2)}$$
Il dominio di questa funzione é l'insieme $D = \{x \in \mathcal{R}\ ; x \neq -2\ , x \neq 1\}$. La funzione f é positiva negli intervalli $(-2, 0)$ e $(1, +\infty)$, mentre é negativa in $(-\infty, -2)$ e $(0, 1)$. Risulta inoltre:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \; e \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$
Calcolando la derivata prima si ha:
$$f'(x) = \frac{(x^2+x-2) - x\,(2\,x+1)}{(x^2+x-2)^2} = -\frac{2+x^2}{(x^2+x-2)^2}$$

Ne deriva che la derivata prima é sempre negativa. Risulta ora:

$$f''(x) = -\frac{2\,x\,(x^2+x-2)^2 - (2+x^2)\,(2\,x+1)\,2\,(x^2+x-2)}{(x^2+x-2)^4} = \frac{2\,(x^3+6\,x+2)}{(x^2+x-2)^3}$$

Posto infine $g(x) = x^3 + 6\,x + 2$, osserviamo che $g'(x) = 3\,(x^2+2)$. Pertanto la funzione g é strettamente crescente e, siccome $g(-1) = -5$ e $g(0) = 2$, allora esiste un unico punto $x_0 \in (-1, 0)$ tale che $g(x) > 0$ se e solo se $x > x_0$. Ne deriva quindi che la funzione di partenza f é convessa negli intervalli $(-2, x_0)$ *e* $(1, +\infty)$ ed é concava negli intervalli $(-\infty, -2)$ *e* $(x_0, 1)$. Il grafico della funzione f é pertanto del tipo :



8. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = x - \sqrt{x\,(x-2)}$. Il dominio della funzione é: $D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Risulta inoltre $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2\,x)}{x + \sqrt{x^2 - 2\,x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2/x}} = 1\ .$$

Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = 1 - \frac{2\,x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2\,x}} = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2\,x}}$$

Pertanto $f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2 - 2\,x} \geq x - 1$. Ora se $x < 1$ la disuguaglianza precedente é verificata, mentre se $x \geq 1$ la disuguaglianza precedente risulta equivalente alla disuguaglianza $x^2 - 2\,x \geq x^2 - 2\,x + 1$, e questa disuguaglianza non é vera. Possiamo concludere quindi che $f'(x) > 0$ se $x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ se $x > 2$. Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = -\left(\sqrt{x^2 - 2\,x} - (x-1)\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2\,x}}\right)\frac{1}{x^2 - 2\,x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2\,x}(x^2 - 2\,x)}$$

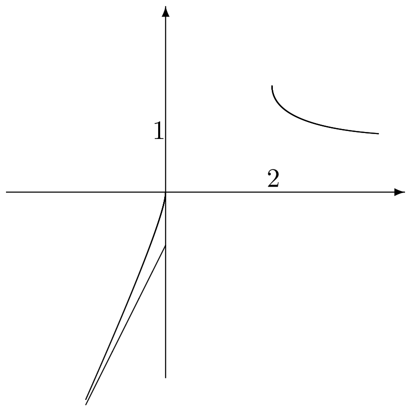
Ne deriva quindi che la derivata seconda é sempre positiva. Verifichiamo infine che la funzione ha un asintoto a $-\infty$. Infatti, ricordando che se $x < 0$ si ha $\sqrt{x^2} = -x$ si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1 + \sqrt{1 - 2/x}) = 2$$

ed inoltre:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2\,x)=\lim_{x\to-\infty}(-x-\sqrt{x^2-2\,x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\,x}{-x+\sqrt{x^2-2\,x}}=-1$$

Pertanto la retta $y=2\,x-1$ é asintoto di f. Il grafico risulta quindi del tipo :



7.8 Regole di De l'Hospital

Siano $f\,,g\,:[a,b]\to\mathcal{R}$ due funzioni derivabili nell'intervallo $[a,b]$ e supponiamo che $x_0\in(a,b)$ sia un punto tale che $f(x_0)=g(x_0)=0$. Allora se esiste il limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\ (\ o\ \ \pm\infty)$$

allora esiste anche il limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ed ha lo stesso valore. Pertanto, se esiste il secondo limite, possiamo scrivere che:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Un teorema simile si puó enunciare anche se, invece della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, devo studiare una forma indeterminata del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. In particolare :
Siano $x_0\in(a,b)$ e $f\,,g\,:[a,b]-\{x_0\}\to R$ due funzioni derivabili. Supponiamo inoltre che:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\ (\ o\ \ -\infty)\ e\ che\ \lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty\ (\ o\ \ -\infty)$$

Allora se esiste il limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\ (\ o\ \ \pm\infty)$$

allora esiste anche il limite :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ed ha lo stesso valore .Pertanto , se esiste il secondo limite possiamo scrivere che :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La stessa regola si puó usare pure per calcolare limiti del tipo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

sempre che tale limite sia della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Consideriamo alcuni esempi.

- Calcolare :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x\,\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\sin x+x\,\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)(\sin x+x\,\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)(\frac{\sin x}{x}+\cos x)}=\frac{1}{2}\,.$$

- Calcolare il :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\log(1+x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+x)}\,\frac{x^2}{1-\cos x}\,\frac{\sin x-x}{x^3}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3\,x^2}=-\frac{1}{3}$$

7.9 Polinomio di Taylor

Abbiamo visto che la retta tangente ad una funzione f nel punto x_0 é la miglior retta che approssima la funzione nell'intorno del punto x_0, nel senso che

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)))/(x-x_0)=0 \tag{7}$$

Ora ci chiediamo se possiamo ottenere una miglior approssimazione della funzione nell'intorno di x_0 utilizzando non un polinomio di grado uno, ma un polinomio di grado n, ovvero ci chiediamo se esiste un $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ tale che

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-P_n(x))/(x-x_0)^n=0 \tag{8}$$

Sia $f(x)$ una funzione $C^n(a,b)$ e $x_0\in(a,b)$ definisco **il polinomio di Taylor di ordine** n della funzione f in x_0 il polinomio

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\,(x-x_0)^j \tag{9}$$

In particolare il se $n=1$ $P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

La differenza $f(x)-P_n(x)$ viene chiamata **resto di Taylor** ed indicato col simbolo $R_n(x,x_0)$, ossia

$$R_n(x,x_0)=f(x)-P_n(x)=f(x)-\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\,(x-x_0)^j \tag{10}$$

Noi studieremo il comportamento del resto di Taylor per $x\to x_0$

Teorema 7.1 *Sia $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathcal{R}$ una data funzione. Allora:se f è derivabile n volte nell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$, allora:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{11}$$

Dimostrazione. Dalla definizione (9), il resto è derivabile n volte in $(x_0 - r, x_0 + r)$ e risulta per $h \leq n$:

$$R_n^{(h)}(x, x_0) = f^{(h)}(x) - \sum_{j=h}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j(j-1) \dots (j-h+1)(x - x_0)^{j-h}$$

In particolare

$$R_n^{(h)}(x_0, x_0) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{N}, \quad h \leq n$$

e

$$R_n^{(n-1)}(x, x_0) = f^{(n-1)}(x) - \sum_{j=n-1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j(j-1) \dots (j-n+2)(x - x_0)^{j-n+1} =$$

$$= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$$

Usando pertanto il teorema di De l'Hospital, si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x, x_0)}{n!\,(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0$$

q.e.d.

Ovvero

$$R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x) \tag{12}$$

é una quantitá infinitesima per $x \to xo$ di ordine n e scriveremo $R_n(x, x_0) = o((x - xo)^n)$ ovvero

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \tag{13}$$

questo vuol dire che abbiamo approssimato la funzione con un polinomio piú un resto infinitesimo di ordine n.
Il resto puó essere espresso anche nella forma $R_n(x, x_0) = o((x - xo)^n) = \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^n$ dove $\epsilon(x - x_0)$ é una quantitá infinitesimo di ordine n quando $x \to x_0$
Una semplice applicazione della serie di Taylor.
Sia $f(x)$ una funzione $C^2(a, b)$ sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ allora sappiamo che $f(x) = f(x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + o((x - x_0)^2)$, ora dato che $o((x - xo)^2) = \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^2$ questo mi permette di dire $f(x) - f(x_0) = (\frac{f''(x_0)}{2} + \epsilon(x - x_0))(x - x_0)^2$ se supponiamo $f''(x_0) > 0$ il punto é un minimo locale, mentre se $f''(x_0) < 0$ é un punto di massimo locale, mentre se $f''(x_0) = 0$ non posso dire nulla.
Ora supponiamo che $f(x) \in \mathcal{C}^n(a, b)$, x_0 tale che $f'(x_0) = f''(x_0) \cdots f^{k-1}(x_0) = 0$, e $f^k(x_0) \neq 0$, allora se k é dispari il punto non é ne di massimo ne minimo, se k é pari e $f^k(x_0) > 0$ il punto é di minimo, se $f^k(x_0) < 0$ il punto é di massimo.
Noto che se il polinomio di Taylor di ordine k di $f(x)$ diventa

$$P_k(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k \tag{14}$$

ovvero

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k + \epsilon(x - x_0)(x - x_0)^k \tag{15}$$

ovvero

$$f(x) - f(x_0) = \big(\frac{1}{k!} f^k(x_0) + \epsilon(x - x_0)\big)(x - x_0)^k \tag{16}$$

ora quando $x \to x_0$ il segno di $\big(\frac{1}{k!} f^k(x_0) + \epsilon(x - x_0)\big)$ ĺo steso di di $f^k(x_0)$. Se k é dispari Il termine $(x - x_0)^k$ é positivo se $x > x_0$ e negativo se $x < x_0$, ovvero $f(x) - f(x_0)$ cambia segno nell'intorno di x_0 e questo ci dice che il punto x_0 non é ne' di massimo ne' di minimo. Analogamente se k é pari, il termine $(x - x_0)^k$ é sempre > 0 e, nell'intorno del punto $x \to$ il segno di $f(x) - f(x_0)$ dipende da quello di $f^k(x_0)$. Se $f^k(x_0) > 0$ ho un punto di minimo relativo, se $f^k(x_0) < 0$ ho un massimo relativo.
Vediamo alcuni esempi.
Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 di :

- $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$
- $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$
- $$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3}$$
- $$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
- $$\exp x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$
- $$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!}$$
- $$\cosh(x) = x + \frac{x^2}{2!}$$

Vediamo ora alcune proprietá degli infinitesimi di ordine n.

$$o((x - x_0)^n) \cdot o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^{n+m})$$
$$o((x - x_0)^n) + o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^n) \text{ con } n < m$$
$$x^n \cdot o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^{n+m})$$
$$c \cdot o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n) \;\; c \in \mathcal{R}$$

Per verificarle basta applicare la definizione

7.10 Alcuni esercizi in cui si usa il Polinomio di Taylor

1. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\arctan x}$$
Usando la formula di Taylor, possiamo scrivere
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \overline{R}_3(x)$$
Si ottiene quindi
$$\frac{x-\sin x}{x-\arctan x} = \frac{\frac{x^3}{6} - R_3(x)}{\frac{x^3}{3} - \overline{R}_3(x)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{R_3(x)}{x^3}}{\frac{1}{3} - \frac{\overline{R}_3(x)}{x^3}}$$
e ricordando la prima proprietá del resto nella formula di Taylor, si ha che
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\arctan x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$$
Ricordando le formule di Taylor
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \overline{R}_2(x)$$
si ottiene
$$\frac{e^x - x - \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \frac{\frac{2}{3}\,x^2 + R_2(x) - \frac{R_3(x)}{x}}{\frac{x^2}{2} - \overline{R}_2(x)}$$
Pertanto
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \frac{4}{3}$$

3. Determinare $a \in R$ (se esiste), tale che il seguente limite esista finito :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-(a\,x)^2} - \frac{\sin x}{x}}{x^4}$$
Usando la formula
$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + \widehat{R}_2(y)$$
e la formula per il seno con un termine in piú, ossia
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$$

si ottiene :

$$\sqrt{1-(a\,x)^2}-\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{2}\,a^2\,x^2-\frac{1}{8}\,a^4\,x^4+\widehat{R}_2(a^2\,x^2)-1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{5!}-\frac{R_5(x)}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-a^2\right)x^2-\left(\frac{1}{8}\,a^4+\frac{1}{5!}\right)x^4+\widehat{R}_2(a^2\,x^2)+\frac{R_5(x)}{x}$$

Deve quindi essere $a^2=\frac{1}{3}$. In tal caso il limite risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-(a\,x)^2}-\frac{\sin x}{x}}{x^4}=-\left(\frac{1}{72}+\frac{1}{120}\right)$$

8 INTEGRALE DI RIEMANN

Sia $f\,:[a,b]\to\mathcal{R}$ una funzione limitata. Indichiamo con :

$$m=\inf\{f(x)\ ;\ x\in[a,b]\}$$

$$M=\sup\{f(x)\ ;\ x\in[a,b]\}$$

Chiameremo **partizione** dell'intervallo $[a,b]$ un numero finito di punti :

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

con $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. Indicheremo infine con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte la partizioni dell'intervallo $[a,b]$.
Se $P\,,P'\in\mathcal{P}$, diremo che P' é piú fine di P se $P\subset P'$.
Fissata una partizione $P\in\mathcal{P}$, indicheremo con :

$$m_i=\inf\{f(x)\ ;\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

$$M_i=\sup\{f(x)\ ;\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

e porremo:

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,(x_i-x_{i-1})$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,(x_i-x_{i-1})$$

$s(f,P)$ e $S(f,P)$ vengono chiamate rispettivamente **somme integrale inferiore** e **somma integrale superiore** di f (relativamente alla partizione P). Dalla diseguaglianza:

$$m\le m_i\le M_i\le M$$

valida $\forall\ i=1,2,\ldots,n$, si ricava la diseguaglianza:

$$m\,(b-a)\le s(f,P)\le S(f,P)\le M(b-a)$$

Osserviamo che se $P\,,P' \in \mathcal{P}$ sono due partizione con P' piú fine di P, allora:

$$s(f,P) \leq s(f,P')$$

$$S(f,P') \leq S(s,P)$$

Verifichiamo, per esempio, la prima diseguaglianza nel caso che P' si ottenga da P aggiungendo un punto:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$P' = \{x_0, c, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Indicato ora con:

$$m_1' = \inf\{f(x)\ ;\ x \in [x_0, c]\}$$

$$m_2' = \inf\{f(x)\ ;\ x \in [c, x_1]\}$$

risulta $m_1' \geq m_1$ e $m_2' \geq m_1$ (dove ricordiamo $m_1 = \inf\{f(x)\ ;\ x \in [x_0, x_1]\}$ e quindi:

$$s(f,P') - s(f,P) = m_1'\,(c - x_0) + m_2'\,(x_1 - c) - m_1\,(x_1 - x_0) \geq 0$$

D'altra parte se $P_1\,,P_2 \in \mathcal{P}$ sono due partizioni generiche di $[a,b]$, la partizione $P_1 \cup P_2$ é piú fine sia di P_1 che di P_2, ne deriva quindi che:

$$s(f,P_1) \leq s(f,P_1 \cup P_2) \leq S(f,P_1 \cup P_2) \leq S(f,P_2)$$

Pertanto se poniamo:

$$A = \{s(f,P)\ ,\ P \in \mathcal{P}\}$$

$$B = \{S(f,P)\ ,\ P \in \mathcal{P}\}$$

otteniamo una coppia di sottoinsiemi di $\mathcal{R}$ separata. Ne deriva quindi che:

$$\sup A \leq \inf B$$

Noi diremo che una funzione limitata f é **integrabile (secondo Riemann)** nell'intervallo $[a,b]$ se:

$$\sup A = \inf B$$

In tal caso, il valore comune verrá chiamato **integrale (definito)** della funzione f nell'intervallo $[a,b]$ ed indicato col simbolo :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Dalla definizione si ricava che:
una funzione limitata f é integrabile in un intervallo $[a,b]$ se e solo se

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}\ \ tale\ che\ S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) <\ \varepsilon$$

Indicheremo con $\mathcal{R}([a,b])$ l'insieme delle funzioni che sono integrabili (secondo Riemann).

8.1 Alcuni esercizi

Concludiamo la lezione di oggi con alcuni limiti svolti con la regola di de L'Hospital.

- 1. - Calcolare il :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\,\cos x}{x\,\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\,\sin x}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\,\cos x}{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}} = 0$$

- 2. - Calcolare :

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\cos x}{x^2}}$$

Considerando solo l'esponente si ha :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\,\frac{-\sin x}{2\,x} = -\frac{1}{2}\ .$$

- 3. - Calcolare :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\,(1-\cos x) - x^2}{x^2\,(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\,\sin x - 2\,x}{2\,x\,(1-\cos x) + x^2\,\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,(\cos x - 1)}{2\,(1-\cos x) + 4\,x\,\sin x + x^2\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\,(\cos x - 1)}{x^2}}{\frac{2\,(1-\cos x)}{x^2} + 4\,\frac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{1}{6}$$

- 4. - Calcolare :

$$\lim_{x\to +\infty} x\,(\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}) = \lim_{x\to +\infty} x^2\,(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}) = (y = \frac{1}{x}) =$$

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{1+y^2} - \sqrt[3]{1+y^3}}{y^2} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{y^2}{(\sqrt[3]{1+y^3})^2}}{2\,y} = \frac{1}{2}$$

Alcune proprietá di $\mathcal{R}([a,b])$ sono le seguenti:

- **Linearitá dell'integrale** Se $f_1\,,f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$, allora $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$ e vale la formula:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\ dx = \int_a^b f_1(x)\ dx + \int_a^b f_2(x)\ dx$$

  Inoltre se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e $\lambda \in R$, allora $\lambda\,f \in \mathcal{R}([a,b])$ e vale la formula:

$$\int_a^b (\lambda\,f(x))\ dx = \lambda\int_a^b f(x)\ dx$$

- **Proprietá additiva dell'integrale** Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e $c \in (a,b)$, allora $f \in \mathcal{R}([a,c]) \cap \mathcal{R}([c,b])$ e vale la formula:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

- **Monotonia dell'integrale** Se $f\,, g \in \mathcal{R}([a,b])$ e $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

- **Integrabilitá del modulo** Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$, allora $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$, e vale la disegauaglianza:

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

- **Teorema della media integrale** Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$, indichiamo con:

$$m = \inf\{f(x)\ ;\ x \in [a,b]\}$$

$$M = \sup\{f(x)\ ;\ x \in [a,b]\}$$

  Allora vale la disuguaglianza:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} \leq M$$

  Il quoziente che compare nella disuguaglianza precedente viene chiamato **la media integrale** di f (sull'intervallo $[a,b]$). Da notare che la media integrale é l'altezza che deve avere un rettangolo la cui base sia l'intervallo $[a,b]$ in modo che la sua area sia uguale all' $\int_a^b f(x)\ dx$. Se supponiamo che la funzione f oltre che integrabile sia anche continua nell'intervallo $[a,b]$, allora per il teorema dei valori assunti, esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che:

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} = f(c)$$

- **Integrabilitá delle funzioni continue** Se f é una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$, allora f é integrabile in tale intervallo.
- **Integrabilitá delle funzioni monotone** Se f é una funzione monotona nell'intervallo $[a,b]$, allora f é integrabile in tale intervallo.
- **Integrabilitá delle funzioni continue a tratti** Se f é una funzione limitata ed ha nell'intervallo $[a,b]$ un numero finito di punti di discontinuitá, allora f é integrabile in tale intervallo.

Concludiamo la lezione con un esercizio
Dire, al variare di $\lambda \in \mathcal{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$e^x = \lambda\, x\ .$$

Ovviamente se $\lambda = 0$, l'equazione non ha nessuna soluzione. Se $\lambda \neq 0$, possiamo scrivere l'equazione nella forma:

$$x\, e^{-x} = \frac{1}{\lambda}$$

Se studiamo la funzione

$$f(x) = x\, e^{-x}$$

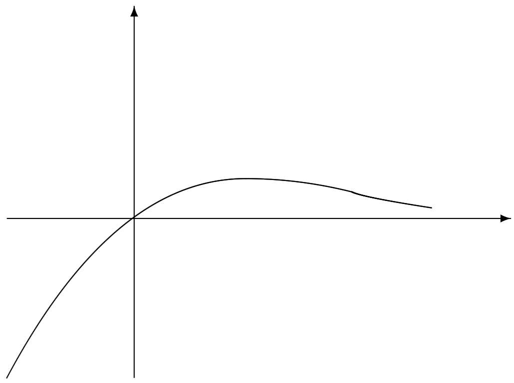
e ne disegniamo il grafico, potremo determinare il numero di soluzioni dell'equzione dal numero di intersezioni che il grafico di f ha con la retta orizzontale di equazione $y = \frac{1}{\lambda}$.
Il dominio dalla funzione f é $D = \mathcal{R}$ e risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

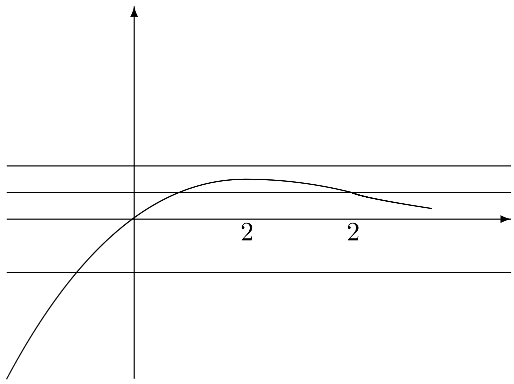
Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$ e $f(0) = 0$. Derivando si ottiene:

$$f'(x) = e^{-x}\,(1 - x)$$

e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < 1$. Pertanto il punto $x = 1$ é un punto di massimo relativo e $f(1) = \frac{1}{e}$. Infine $f''(x) = e^{-x}\,(-1 - 1 + x) = e^{-x}\,(x - 2)$ e quindi la funzione f é convessa se e solo se $x > 2$. Il grafico della funzione f dunque é del tipo.



Visto il grafico di f e ricordando che l'equazione da considerare é $f(x) = \frac{1}{\lambda}$, possiamo concludere che (vedi anche il disegno):



- i) - se $\lambda < 0$, l'equazione ha una unica soluzione (negativa);

- ii) - se $0 < \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e}$, ossia se $\lambda > e$, allora l'equazione ha due soluzioni;
- iii) - se $\lambda = e$, allora l'equazione ha una soluzione ($x = 1$);
- iv) - se $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e}$, ossia se $0 < \lambda < e$, allora l'equazione non ha nessuna soluzione.

8.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$, consideriamo la funzione $F : [a,b] \to \mathcal{R}$ definita dalla seguente legge :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \quad x \in [a,b]$$

La funzione F viene chiamata la **funzione integrale** di f. Vale il seguente importante :

Teorema fondamentale del calcolo integrale Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e continua nell'intervallo $[a,b]$, allora la funzione F é derivabile nell'intervallo $[a,b]$ e :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dimostrazione Siano $x_0\,, x \in [a,b]$ con $x_0 < x$, usando la proprietá additiva dell'integrale, si ottiene :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt}{x - x_0} =$$

$$= \frac{\int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\ dt}{x - x_0}$$

Applicando infine il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $[x_0, x]$ (ricordare che stiamo supponendo f continua), si ottiene l'esistenza di un punto $c_x \in (x_0, x)$ tale che:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$$

D'altra parte se x *tende a* x_0 anche c_x *tende a* x_0 ed essendo f continua in x_0, si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)\ .$$

8.3 Formula fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a,b] \to R$, una funzione $G : [a,b] \to R$ si dice una **primitiva** di f se G é derivabile e risulta :

$$G'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a,b]$$

Vale il seguente :

Teorema (Formula fondamentale del calcolo integrale) Sia $f : [a,b] \to R$ una funzione continua e G una sua primitiva. Allora :

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione Ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ e la funzione G hanno la stessa derivata, infatti :

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

Allora F e G differiscono per una costante, ossia

$$F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in [a, b]$$

In particolare :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx$$

8.4 Alcune primitive immediate

Elenchiamo di seguito alcune primitive immediate.

- $f(x) = \sin x$ ha come primitiva $G(x) = -\cos x$, $f(x) = \cos x$ ha come primitiva $G(x) = \sin x$;
- $f(x) = e^x$ ha come primitiva $G(x) = e^x$;
- $f(x) = x^\alpha$ con $x > 0$ e $\alpha \in \mathcal{R}$, allora:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{se } \alpha + 1 \neq 0 \\ \log x & \text{se } \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

- Da notare che se considero la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, allora la funzione $G(x) = \log |x|$ $(x \neq 0)$ é una primitiva di f;
- la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

  ha come primitiva $G(x) = \arctan x$;
- la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

  ha una primitiva che si puó calcolare nel seguente modo. Sommando e sottraendo 1 a numeratore, ottengo :

$$f(x) = \frac{x + 1 - 1}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}$$

  Allora una primitiva di f é : $G(x) = x - \log |x + 1|$;
- la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

  con $a \neq 0$ ha la seguente primitiva. Raccogliendo a^2 si ottiene :

$$f(x) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2}$$

  Pertanto $G(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

8.5 Integrali per decomposizione: primo caso

Vediamo ora come si calcola una primitiva di una funzione razionale del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove Q é un polinomio di secondo grado del tipo $Q(x) = x^2 + b\,x + \,c$ con $\Delta = b^2 - 4\,c > 0$, cosí che il polinomio si puó decomporre in $Q(x) = (x - x_1)\,(x - x_2)$ con

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Nel caso che $P(x)$ sia un polinomio di primo grado (ad esempio $P(x) = \alpha\,x + \beta$), allora la funzione f si puó decomporre nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{\alpha\,x + \beta}{x^2 + b\,x + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

dove $A\,, B$ son due opportuni numeri reali che si ottengono osservando che:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A\,(x - x_2) + B\,(x - x_1)}{(x - x_1)\,(x - x_2)} = \frac{(A + B)\,x - A\,x_2 - B\,x_1}{x^2 + b\,x + c}$$

e quindi se voglio che valga la decomposizione deve essere:

$$\begin{cases} A + B = \alpha \\ -A\,x_2 - B\,x_1 = \beta \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere questo sistema. Trovate A e B, una primitiva della funzione f é del tipo :

$$G(x) = A\,\log|x - x_1| + B\,\log|x - x_2|$$

Nel caso che $P(x)$ sia un polinomio di grado ≥ 2, allora dividendo il polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$, si ottiene:

$$P(x) = Q(x)\,S(x) + R(x)$$

dove $R(x)$ é un polinomio di grado minore o uguale a uno. Pertanto in questo caso:

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

e quindi posso procedere come nel caso precedente. Vediamo per concludere alcuni esempi.

1. Sia

$$f(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)\,(x + 4)}$$

Risulta:

$$\frac{x + 1}{(x - 1)\,(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 4} = \frac{A\,(x + 4) + B\,(x - 1)}{(x - 1)\,(x + 4)}$$

Pertanto deve essere

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 4\,A - B = 1 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni ottengo $5\,A = 2$ ossia $A = \frac{2}{5}$ e quindi $B = 1 - A = \frac{3}{5}$. Ne deriva che una primitiva di f é data da:

$$G(x) = \frac{2}{3}\,\log|x-1| + \frac{3}{5}\,\log|x+4|$$

2. Sia

$$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$$

Facendo la divisione tra i due polinomi, si ha:

$$\frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x + \frac{2\,x+1}{x^2-1}$$

D'altra parte:

$$\frac{2\,x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1)+B\,(x-1)}{x^2-1}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 4\,A-B=1 \end{cases}$$

Se ne ricava quindi che $A = 3/2$ e $B = 1/2$. Pertanto una primitiva di f é data da:

$$G(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\,\log|x-1| + \frac{1}{2}\,\log|x+1|$$

8.6 Formula di integrazione per parti

Siano $f\,,g\ : [a,b] \to \mathcal{R}$ due funzioni derivabili in $[a,b]$ con derivata prima continua. Dalla formula di derivazione del prodotto, ottengo:

$$(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Integrando tale relazione su $[a,b]$ e ricordando che:

$$\int_a^b (f\,g)'(x)\ dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$$

ottengo la seguente:
Formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\ dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx = f\ g\ |_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx$$

Vediamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi x\ \sin x\,dx$$

Scegliendo $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$ (e quindi $f(x) = -\cos x$), ottengo:

$$\int_0^\pi x\ \sin x\,dx = -x\ \cos x\ |_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi\ .$$

2. - Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan x$. Scegliendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$, ottengo:

$$\int_0^x \arctan t\, dt = t \arctan t \,|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \,.$$

3. Calcolare

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx$$

Risulta :

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \sin x \sin x\, dx = -\cos x \sin x \,|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x)\, dx$$

Ne deriva quindi che:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Da notare che l'integrale ora calcolato, poteva essere calcolato in modo doverso usando la formula di trigonometria:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2\,x)}{2}$$

Infatti usando tale formula si ottiene:

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\, dx - \int_0^\pi \frac{\cos(2\,x)}{2}\, dx = (\frac{1}{2}\,x - \frac{\sin(2\,x)}{4}) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \,.$$

4. Calcolare $\int_0^1 \log(1+x^2)\, dx$. Risulta :

$$\int_0^1 \log(1+x^2)\, dx = x \log(1+x^2)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,2\,x}{1+x^2}\, dx = \log 2 - 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx =$$

$$= \log 2 - 2 + 2 \arctan 1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{4}$$

5. Calcolare $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$. Risulta :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \cos^2 x\, dx = \sin x \cos^2 x\big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos^3 x)\, dx$$

e quindi :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{2}{3}$$

6. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \log x$. Calcoliamo per esempio :

$$F(x) = \int_1^x \log t\, dt = t\, logt|_1^x - \int_1^x dt = x \log x - x + 1 = x\,(logx - 1) + 1$$

8.7 Integrali per decomposizione : secondo caso

Vediamo come si calcola una primitiva di una funzione razionale del tipo :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove Q é un polinomio di secondo grado del tipo $Q(x) = x^2 + b\,x + c$ con $\Delta = b^2 - 4\,c \leq 0$ e P é un polinomio di primo grado del tipo $P(x) = \alpha\,x + \beta$.
Consideriamo in primo luogo il caso in cui $\Delta = 0$. In tal caso Q é un quadrato, infatti essendo $b^2 = 4\,c$, risulta:

$$Q(x) = x^2 + b\,x + c = Q(x) = x^2 + b\,x + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = (x - x_1)^2$$

dove abbiamo posto $x_1 = -\frac{b}{2}$. Consideriamo ora la decomposizione del tipo:

$$\frac{\alpha\,x + \beta}{x^2 + b\,x + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

Per ricavare A e B, procediamo come nel primo caso considerato, ossia:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} = \frac{A\,(x - x_1) + B}{(x - x_1)^2} = \frac{\alpha\,x + \beta}{x^2 + b\,x + c}$$

se e solo se A e B verificano il sistema:

$$\begin{cases} A = \alpha \\ -A\,x_1 + B = \beta \end{cases}$$

Una primitiva della funzione f é data dunque in questo caso da

$$G(x) = A\,\log|x - x_1| - \frac{B}{x - x_1}$$

Consideriamo infine il caso in cui sia $\Delta < 0$. Completando il quadrato, possiamo scrivere:

$$Q(x) = x^2 + b\,x + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = \frac{-\Delta}{4}\left[1 + \left(\frac{2\,x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]$$

Pertanto ottengo

$$\frac{1}{Q(x)} = -\frac{4}{\Delta}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}$$

Possiamo quindi concludere che una primitiva di $\frac{1}{Q}$ é data dalla funzione

$$-\frac{4}{\Delta}\ \arctan\left(\frac{2\,x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\ \arctan\left(\frac{2\,x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

Scriviamo infine f nel modo seguente

$$f(x) = \frac{\alpha\, x + \beta}{x^2 + b\, x + c} = \frac{\alpha}{2}\, \frac{2\, x + b}{x^2 + b\, x + c} + \left(\frac{2\, \beta - \alpha\, b}{2}\right) \frac{1}{x^2 + b\, x + c}$$

e ricordando quanto detto sopra, possiamo concludere che una primitiva di f é data dalla funzione:

$$G(x) = \frac{\alpha}{2} \log\left(x^2 + b\, x + c\right) + \frac{(2\, \beta - \alpha\, b)}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2\, x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare una primitiva della funzione:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2\, x + 1}$$

Il polinomio a denominatore ha $\Delta = 0$ e quindi é un quadrato. In particolare $x^2 + 2\, x + 1 = (x + 1)^2$, cerchiamo allora una decomposizione del tipo :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 2\, x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1) + B}{x^2 + 2\, x + 1}$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = -1 \end{cases}$$

Si ottiene quindi $B = -2$. Pertanto:

$$f(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2}$$

Allora una primitiva di f é data da :

$$G(x) = \log|x + 1| + \frac{2}{x + 1}$$

2. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 2\, x + 2}$$

Il polinomio di secondo grado a denominatore ha Δ negativo. Il primo passo consiste nel far comparire a numeratore la derivata del denominatore. Ossia :

$$f(x) = \frac{1}{2}\, \frac{2\, x + 2}{x^2 + 2\, x + 2} + \frac{2}{x^2 + 2\, x + 2}$$

Osservo ora che, completando il quadrato, posso scrivere:

$$x^2 + 2\, x + 2 = 1 + (x + 1)^2$$

In conclusione ottengo la decomposizione :

$$\frac{x + 3}{x^2 + 2\, x + 2} = \frac{1}{2}\, \frac{2\, x + 2}{x^2 + 2\, x + 2} + \frac{2}{1 + (x + 1)^2}$$

Posso concludere che una primitiva di f é :

$$G(x) = \frac{1}{2} \log\,(x^2 + 2\, x + 2) + 2 \arctan\,(x + 1)$$

3. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

Completando il quadrato, posso scrivere:

$$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

Ne deriva quindi che :

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Possiamo quindi concludere che una primitiva é del tipo :

$$G(x) = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Calcolare una primitiva della funzione:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2}$$

Essendo il grado del denominatore piú grande del grado del numeratore, facciamo in primo luogo la divisione dei due polinomi. Risulta :

$$x^4 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 2)\,(x^2 - x) + 3\,x + 1$$

e quindi:

$$\frac{x^4 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2} = x^2 - x + \frac{3\,x + 1}{x^2 + x + 2}$$

Ricordando ora che :

$$x^2 + x + 2 = (x + 1/2)^2 + 7/4 = \frac{7}{4}\left(1 + \left(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

ottengo

$$f(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}\,\frac{2\,x + 1}{x^2 + x + 2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2 + x + 2} =$$
$$= x^2 - x + \frac{3}{2}\,\frac{2\,x + 1}{x^2 + x + 2} - \frac{4}{14}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

Posso quindi concludere che una primitiva di f é data da:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\log(x^2 + x + 2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{2\,x + 1}{\sqrt{7}})$$

5. Calcolare l'integrale:
$$\int_0^1 x\,\log\left(x^2+x+1\right)dx$$
Integrando per parti, ottengo:
$$\int_0^1 x\,\log\left(x^2+x+1\right)dx = \frac{x^2}{2}\,\log\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,\frac{2\,x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2\,x^3+x^2}{x^2+x+1}\,dx$$
D'altra parte, facendo la divisione dei due polinomi che compaiono nell'integrale, ottengo
$$\frac{2\,x^3+x^2}{x^2+x+1} = 2\,x-1+\frac{-x+1}{x^2+x+1}$$
Allora:
$$\int_0^1 x\,\log\left(x^2+x+1\right)dx = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\left(x^2-x\big|_0^1\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx$$
Applicando infine la formula ottenuta sopra, posso concludere che:
$$\int_0^1 x\,\log\left(x^2+x+1\right)dx = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1\right) =$$
$$= \frac{3}{4}\log 3 + \frac{1}{2\,\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

8.8 Formula di integrazione per sostituzione

Sia $f\ :\ [a,b]\to\mathcal{R}$ una funzione continua e sia $\varphi\ :\ [\alpha,\beta]\to[a,b]$ una funzione derivabile con derivata prima continua. Supponiamo che $\varphi(\alpha)=a$ e che $\varphi(\beta)=b$. Allora vale la formula :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$
Dimostrazione Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é derivabile e risulta $F'(x)=f(x)\ \ \forall\,x\in[a,b]$. Consideriamo ora la funzione :
$$H(t)=F(\varphi(t))\ ;\ t\in[\alpha,\beta]$$
Derivando ottengo:
$$H'(t)=F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)=f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$
e quindi integrando sull'intervallo $[\alpha,\beta]$, ottengo:
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta H'(t))\,dt = H(\beta)-H(\alpha)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$
Vediamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$
Usando la sostituzione $x = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, ottengo:
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

2. Calcolare
$$\int_0^1 x\sqrt{4-x}\,dx$$
Ponendo $4 - x = t$, ottengo :
$$\int_0^1 x\sqrt{4-x}\,dx = -\int_4^3 (4-t)\sqrt{t}\,dt = \int_3^4 4\,t^{1/2}\,dt - \int_3^4 t^{3/2}\,dt = \left(4\,\frac{2}{3}\,t^{3/2} - \frac{2}{5}\,t^{5/2}\right)\Big|_3^4$$

3. Calcolare
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$
Usiamo la sostituzione $x = \sinh t$. Risulta $\alpha = 0$. Per ricavare β devo risolvere l'equazione
$$1 = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \textit{ossia} \quad e^t - \frac{1}{e^t} = 2$$
Posto $y = e^t$, ottengo l'equazione di secondo grado $y^2 - 2\,y - 1 = 0$ che ha le soluzioni $y = 1 \pm \sqrt{2}$. Risulta dunque $t = \beta = \log(1+\sqrt{2})$. Possiamo quidi concludere che :
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^\beta \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,dt = \int_0^\beta \cosh^2 t\,dt =$$
$$= \int_0^\beta \frac{e^{2\,t} + e^{-2\,t} + 2}{4}\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2\,t}}{2} - \frac{e^{-2\,t}}{2} + 2\,t\right)\Big|_0^\beta$$

4. Da notare che l'integrale precedente si poteva calcolare anche integrando per parti. Infatti :
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left. x\sqrt{1+x^2}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left. x\sqrt{1+x^2}\right|_0^1 -$$
$$-\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
Possiamo allora concludere che :
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)\Big|_0^1$$

5. Mostriamo infine un ulteriore modo per calcolare lo stesso integrale. Consideriamo la sostituzione
$$\sqrt{1+x^2} = t - x$$
ossia $1 + x^2 = t^2 - 2t\,x + x^2$ o
$$x = \frac{t^2-1}{2\,t}$$
Otteniamo allora :
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t - \frac{t^2-1}{2\,t}\right) \frac{1}{2}\,\frac{2\,t^2 - t^2 + 1}{t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^4 + 2\,t^2 + 1}{t^3}\,dt =$$
$$\frac{1}{4}\int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\,\log|t| - \frac{1}{2\,t^2}\right)\Bigg|_1^{1+\sqrt{2}}$$

6. Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \sqrt{1+x+x^2}\,dx$$
Essendo
$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$
con la sostituzione : $\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}} = t$ ossia $x = \frac{\sqrt{3}\,t-1}{2}$, ottengo:
$$\int_0^1 \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = \frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\left(t\,\sqrt{1+t^2} + \log\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

7. Calcolare l'integrale
$$\int_0^2 \sqrt{x\,(2-x)}\,dx$$
Notiamo che:
$$x\,(2-x) = 2\,x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$$
e quindi se pongo $x - 1 = t$, ottengo:
$$\int_0^2 \sqrt{x\,(2-x)}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

8. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$
Ricordando la formula di trigonometria:
$$\sin x = 2\,\sin(x/2)\,\cos(x/2) = \frac{2\,\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$$
consideriamo la sostituzione $\tan(x/2) = t$ ossia $x = 2\,\arctan t$. Otteniamo:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2\,t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{t+1}\Bigg|_0^1 = 1$$

9. Calcolare l'integrale
$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$$
Usiamo la sostituzione $\sqrt{x^2-1} = t - x$, ossia $x^2 - 1 = x^2 - 2\,t\,x + t^2$ e quindi $x = \frac{t^2+1}{2\,t}$.
Possiamo allora scrivere
$$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_1^{2+\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^2+1}{2\,t}\right) \frac{1}{2} \frac{2\,t^2 - t^2 - 1}{t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)^2}{t^3}\,dt =$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{3}} \left(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} - 2\,\log|t| - \frac{1}{2\,t^2}\right)\Bigg|_1^{2+\sqrt{3}}$$
10. Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$
Usando la sostituzione $x = 2\,\sin t$, ottengo:
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{4\,\sin^2 t}{2\,\cos t}\,2\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/6} 4\,\sin^2 t\,dt =$$
$$= 2\int_0^{\pi/6}(1-\cos(2\,t))\,dt = 2\,\left(t - \frac{\sin(2\,t)}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/6}$$
11. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{\pi/2} \sin(3\,x)\,\cos(5\,x)\,dx$$
Notiamo che sommando le due formule trigonometriche
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha$$
si ottiene :
$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$
Ne deriva quindi che:
$$\int_0^{\pi/2} \sin(3\,x)\,\cos(5\,x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\sin(8\,x) - \sin(2\,x))\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(8\,x)}{8} + \frac{\cos(2\,x)}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$
12. Calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$$
Usando la sostituzione $e^x = t$, ossia $x = \log t$, ottengo:
$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx = \int_1^2 \frac{1-t}{1+t}\,\frac{1}{t}\,dt$$

D'altra parte

$$\frac{1-t}{1+t}\,\frac{1}{t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+B\,t}{t(1+t)}$$

e si ricava che deve essere $A = 1$ e da $A + B = -1$ si ottiene $B = 2$. Ne deriva quindi che

$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right)\,dt = \left(\log|t| - 2, \log|1+t|\right)\Big|_1^e$$

13. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} x\,\sin^2 x\,dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int_0^{\pi/2} x\,\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,(x\,\sin x)\,dx = -\cos x\,x\,\sin x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+\int_0^{\pi/2} \cos x\,(\sin x + x\,\cos x)\,dx = -\cos x\,(x\,\sin x)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,\sin x\,dx + \int_0^{\pi/2} x\,\cos^2 x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,\sin x\,dx + \int_0^{\pi/2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$

Se ne ricava che

$$\int_0^{\pi/2} x\,\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + x^2\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

8.9 Alcuni esercizi di ripasso

1. Studiare il grafico della funzione :

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

Il dominio della funzione é $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. La funzione é dispari e risulta $f(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, mentre $f(x) < 0$ se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Risultano pure immediati i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

Calcoliamo ora la derivata prima, si ha :

$$f'(x) = \frac{3\,x^2(1-x^2) + x^3\,2\,x}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $3 - x^2 > 0$ ossia $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $x \neq 0$. Allora $x = \sqrt{3}$ é un punto di massimo relativo, mentre $x = -\sqrt{3}$ é un punto di minimo relativo. Calcoliamo infine la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{(6\,x - 4\,x^3)(1-x^2)^2 + (3\,x^2 - x^4)\,2\,(1-x^2)\,2\,x}{(1-x^2)^4} = \frac{x\,(6+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

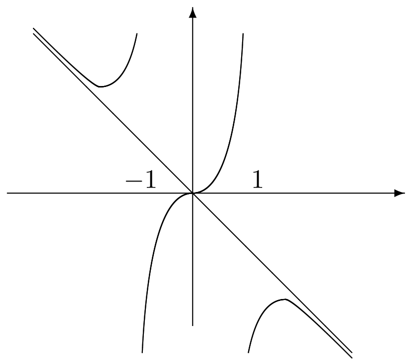
Pertanto la funzione é convessa negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$ ed é concava negli intervalli $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$. Osserviamo infine che :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

e che

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) + x) = 0$$

Pertanto la retta di equazione $y = -x$ é asintoto di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Il grafico quindi é del tipo:



2. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} \cos x - 1 - x}{x^3}$$

Applicando le regole di De l'Hospital, ottengo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}\, \cos x - 1 - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) - 1}{3\,x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}(\cos^3 x - 3\, \sin x\, \cos x - \cos x)}{6\,x} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} e^{\sin x} \left[\cos x \, \frac{\cos^2 x - 1}{x} - 3\, \cos x \, \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{1}{6} \cdot 1[1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1] = -\frac{1}{2}$$

3. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^x e^t\, \sin t\, dt$$

Integrando per parti, ottengo:

$$\int_0^x e^t \sin t\, dt = e^t \sin t\Big|_0^x - \int_0^x e^t \cos t\, dt =$$

$$= e^x \sin x - \left[e^t \cos t\Big|_0^x + \int_0^x e^t \sin t\, dt \right] = e^x \sin x - e^x \cos x + 1 - \int_0^x e^t \sin t\, dt$$

Se ne ricava che
$$\int_0^x e^t \sin t\, dt = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

4. Calcolare l'integrale:
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx$$
Usando la sostituzione $\tan(x/2) = t$, ottengo:
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx = \int_{\tan(\pi/8)}^{1} \frac{1+t^2}{2\,t} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_{\tan(\pi/8)}^{1} \frac{1}{t}\, dt = -\log(\tan(\pi/8))$$

5. Calcolare l'integrale:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1-\sin x}\, dx$$
Sempre usando la sostituzione $\tan(x/2) = t$, ottengo:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1-\sin x}\, dx = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2\,t}{(1+t^2)(1-\frac{2\,t}{1+t^2})} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{4\,t}{(1+t^2)(t-1)^2}\, dt$$
Per proseguire devo trovare una decomposizione del tipo:
$$\frac{4\,t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{A\,t+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$
Deve quindi essere :
$$(A\,t+B)(t^2-2\,t+1) + c\,(1+t^2)(t-1) + D(11+t^2) = 4\,t$$
Ottengo quindi il sistema :
$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2\,A+B-C+D=0 \\ A-2\,B+C=0 \\ B-C+D=0 \end{cases}$$
che ha come soluzioni $A = C = 0\,, B = -2\,, D = 2$. Pertanto :
$$\frac{4\,t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{-2}{1+t^2} + \frac{2}{(t-1)^2}$$
Posso quindi concludere che
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1-\sin x}\, dx = -2\,\arctan t - \frac{2}{t-1}\Bigg|_0^{\tan(\pi/8)}$$

6. Studiare il grafico della funzione :
$$f(x) = \arctan(x + \frac{1}{x})$$

Il dominio della funzione é $D = \{x \in R \; ; \; x \neq 0\}$, la funzione é dispari e quindi basta studiarla per $x > 0$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Derivando , si ha :

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + (x + 1/x)^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + (x^2 + 1)^2}$$

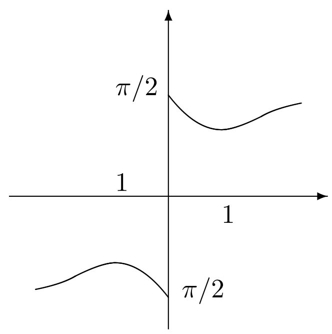
Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Pertanto il punto $x = 1$ é un punto di minimo relativo per f .Calcoliamo anche la derivata seconda :

$$f''(x) = \frac{2\,x\left[x^2 + (x^2+1)^2\right] - (x^2-1)\,(2\,x + 4\,x(x^2+1))}{\left(x^2 + (x^2+1)^2\right)^2}$$

Prendendo in esame solo il numeratore $n(x)$, si ottiene :

$$n(x) = -2\,x^5 + 4\,x^3 + 8\,x = -2\,x(x^4 - 2\,x^2 - 4)$$

Ne deriva che $f''(x) > 0$ solo se $0 < x < \sqrt{1+\sqrt{5}}$. Pertanto il punto $x = \sqrt{1+\sqrt{5}}$ é un flesso per f. Il grafico risulta quindi essere del tipo :



7. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x\,\log(1+x)}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x\,\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + \frac{2\,x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2}} = 0$$

8. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx$$

Integrando per parti ottengo:

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = x\,\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\arcsin x + (1-x^2)^{1/2}\Big|_0^1$$

8.10 Esercizi proposti

1. Studiare il grafico delle funzioni:

$$a)\ \ f(x) = 2\cos x - \cos(2\,x)$$

$$b)\ \ f(x) = \frac{\log|x|}{x}$$

$$c)\ \ f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$$

2. Calcolare i limiti:

$$a)\ \ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{1-x^3}}{x\,\tan x\,\log(1+x)}$$

$$b)\ \ \lim_{x\to 0} \left[\frac{2(e^x - 1 - x)}{x^3} - \frac{1}{x}\right]$$

$$c)\ \ \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - \sin x}{x\,\tan x}$$

3. Calcolare gli integrali:

$$a)\ \ \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$$

$$b)\ \int_2^3 x\,\log\left(x^2 + x - 2\right)dx$$

8.11 Soluzioni degli esercizi proposti nel paragrafo 8.10

Esercizio 1-a) Tracciare il grafico della funzione :$f(x) = 2\cos x - \cos 2\,x$. La funzione é definita su tutto R , é periodica di periodo $2\,\pi$ ed é pari ossia $f(-x) = f(x)$. Possiamo quidi studiarla solo nell'intervallo $[0, \pi]$. Osserviamo inoltre che :

$$f(x) = 2\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos x - 2\cos^2 x + 1\ .$$

Risulta quindi che $f(x) = 0$ se e solo se $\cos x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Ricordando che la soluzione $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ va scartata essendo > 1 , si ottiene :

$$f(x) = 0\ \Leftrightarrow\ \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\ \ \Leftrightarrow\ x = \alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

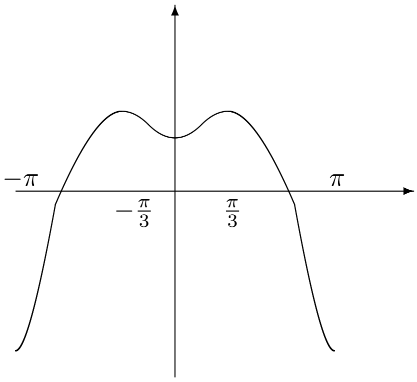
Osserviamo infine che :$f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 1$ *e* $f(\pi) = -3$. Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = 4\cos x\,\sin x - 2\sin x = 2\sin x(2\cos x - 1)\ .$$

Quindi , se $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = 0\ \Leftrightarrow\ x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ e $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \pi/3)$. $x = \pi/3$ é quindi un punto di massimo relativo e $f(\pi/3) = 3/2$ .Passando infine alla derivata seconda si ha :

$$f''(x) = 2\cos x\,(2\cos x - 1) - 4\sin^2 x = 8\cos x - 2\cos x - 4$$

Ne deriva quindi che :$f''(x) = 0$ se e solo se $\cos x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$, ossia se e solo se $x = \beta = \arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ e $x = \gamma = \arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}$. Per di piú : $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \beta) \cup (\gamma, \pi)$. Il grafico dunque risulta del tipo :



Esercizio 1-b) Il dominio della funzione é $D = \{x \in R \; ; \; x \neq 0\}$, la funzione é dispari e quindi basta studiarla per $x > 0$. Risulta

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

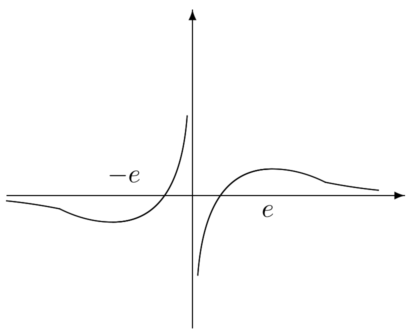
Derivando, si ha :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

Allora $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - \log x > 0$ ossia $0 < x < e$. Pertanto il punto $x = e$ é un punto di massimo relativo e risulta $f(e) = \frac{1}{e}$. La derivata seconda é :

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\,x^2 - (1 - \log x)\,2\,x}{x^4} = \frac{2\,\log x - 3}{x^3}$$

Ne deriva che la funzione é convessa per $x > e^{3/2}$. Il grafico dunque é del tipo :



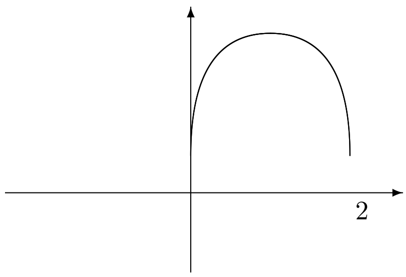
Esercizio 1-c) Il dominio della funzione é $D = [0, 2]$ e $f(0) = \sqrt{2} = f(2)$. La derivata prima risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{2-x}}$$

Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $\sqrt{2-x} > \sqrt{x}$ ossia se e solo se $2-x > x$ e quindi se e solo se $x < 1$. $x = 1$ 1'e quindi punto di massimo relativo e $f(1) = 2$. Infine la derivata seconda é :

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2})\left(x^{-3/2} + (2-x)^{-3/2}\right)$$

Pertanto é sempre negativa e quindi la funzione é concava. Il grafico risulta quindi del tipo:



Esercizio 2-a) Razionalizzando, risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{1-x^3}}{x\,\tan x\,\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}\,\frac{2\,x^2}{\tan x\,\log(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}}\,\frac{x}{\tan x}\,\frac{x}{\log(1+x)} = 1$$

Esercizio 2-b) Risulta :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(e^x-1-x)}{x^3} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1-x)-x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)-2\,x}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)}{6\,x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2-c) Risulta :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x - \cos x}{x\,\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + x\,e^x - \cos x}{\tan x + x(1+\tan^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\,e^x + x\,e^x + \sin x}{2(1+\tan^2 x) + x\,2\,\tan x(1+\tan^2 x)} = 1$$

Esercizio 3-a) Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,\sin^3 x\,dx = -\cos x\,\sin^3 x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,3\,\sin^2 x\,\cos x\,dx =$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,dx = 3\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx - 3\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$$

Pertanto, possiamo scrivere:

$$4\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx = 3\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = 3\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\,x)}{2}\,dx = 3\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\,x)}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

Esercizio 3-b) Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_2^3 x \log\left(x^2+x-2\right) dx = \frac{x^2}{2} \log\left(x^2+x-2\right)\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2(2\,x+1)}{x^2+x-2}\,dx$$

Dividendo ora i due polinimo si ottiene:

$$\frac{x^2(2\,x+1)}{x^2+x-2} = 2\,x-1+\frac{5\,x-2}{x^2+x-2}$$

Osservando infine che x^2+x-2 si annulla per $x=-2$ e $x=1$, ricerchiamo una decomposizione del tipo:

$$\frac{5\,x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

Essendo

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2}$$

deve essere $A+B=5$ e $2\,A-B=-2$, ossia $A=1$ e $B=4$. Possiamo quindi concludere che un primitiva della funzione integranda é data dalla funzione:

$$\frac{x^2}{2}\log\left(x^2+x-2\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-x+\log|x-1|+4\,\log|x+2|\right)$$

8.12 Integrali generalizzati

L'integrale di una funzione si puó definire, con un passaggio al limite, anche se

- i) la funzione non é limitata nell'intervallo di definizione,
- ii) l'intervallo su cui si integra non é limitato.

Consideriamo ad esempio una funzione $f\,:\,(a,b]\to\mathcal{R}$ che sia continua in $(a,b]$ ma non limitata (ad esempio $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ($0\;\;-\infty$)). Fissato $c\in(a,b]$, possiamo considerare l'integrale:

$$\int_c^b f(x)\,dx$$

Diremo che f é **integrabile in senso generalizzato** nell'intervallo $(a,b]$ se esiste finito il

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

e in tal caso porremo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

Analogamente se $f\,:\,[a,b)\to R$ é una funzione continua in $[a,b)$ ma non limitata (ad esempio $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$ ($0\;\;-\infty$)), possiamo definire:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

Infine se $f\,:[a,+\infty)\to\mathcal{R}$ é una funzione continua, diremo che f é **integrabile in senso generalizzato** sull'intervallo $[a,+\infty)$ se esiste finito il limite:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

e in tal caso porremo :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

In modo analogo si potrá definire

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Consideriamo ora due esempi.

- Sia $f(x)=x^{-\alpha}$; $\alpha\in\mathcal{R}$, $\alpha>0$, $x\in(0,1]$. Risulta, se $c\in(0,1]$:

  $$\int_c^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{-\alpha+1}\left(1-c^{-\alpha+1}\right) & \text{se } -\alpha+1\neq 0\\ \log c & \text{se } -\alpha+1=0\end{cases}$$

  Pertanto:

  $$\lim_{c\to0^+}\int_c^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{-\alpha+1} & \text{se } -\alpha+1>0\\ +\infty & \text{se } -\alpha+1\leq 0\end{cases}$$

  Pertanto la funzione $f(x)=x^{-\alpha}$ é integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $(0,1]$ se e solo se $\alpha<1$ e in tal caso risulta :

  $$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\frac{1}{1-\alpha}$$

- Sia $f(x)=\frac{1}{x\,(x+2)}$, $x\in[1,+\infty)$ Si ha :

  $$\frac{1}{x\,(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B\,x}{x\,(x+2)}$$

  e quindi deve essere :

  $$\begin{cases}A+B=0\\ 2\,A=1\end{cases}$$

  Allora $A=1/2$ e $B=-1/2$. Pertanto :

  $$\int_1^b\frac{1}{x\,(x+2)}\,dx=\frac{1}{2}\left(\log b-\log\left(b+2\right)+\log 3\right)$$

  Allora :

  $$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x\,(x+2)}\,dx=\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to+\infty}\log\left(\frac{b}{b+2}\right)+\log 3\right]=\frac{\log 3}{2}$$

9 I NUMERI COMPLESSI

In questo capitolo introdurremo i numeri complessi. Anche se l'argomento è un po' a parte rispetto agli altri argomenti del corso, è consuetudine inserire i numeri complessi nel corso di Istituzioni di Matematica e ci sará molto utile nello studio delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti che faremo nell'ultimo capitolo di questo corso.

9.1 I numeri complessi in forma algebrica

Come abbiamo visto l'insieme $\mathcal{R}$ dei numeri reali, con le sue due operazioni (più $+$ e per $\cdot$), ha ottime proprietà algebriche. Infatti è un campo, ossia le operazioni sono associative, commutative, vale la proprietà distributiva, esistono gli elementi neutri rispetto alle operazioni piú e per (0 e 1), esiste l'opposto ed esiste l'inverso di ogni elemento non zero.
Inoltre $\mathcal{R}$ è un campo ordinato in quanto è definita in $\mathcal{R}$ una relazione di ordine totale ($a \leq b$).
Infine $\mathcal{R}$ ha la proprietà di essere completo.
Perchè dunque la necessità di introdurre un ulteriore insieme numerico?
La ragione principale è la seguente. Per le proprietà che l'insieme $\mathcal{R}$ ha, risulta che

$$\forall\ a \in \mathcal{R}\ ,\ a \neq 0\ \ a^2 > 0$$

e quindi l'equazione di secondo grado $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathcal{R}$.
Si tratta quindi di introdurre un insieme numerico $\mathcal{C}$ che contenga $\mathcal{R}$ come suo sottocampo e, in più, contenga anche una soluzione dell'equazione considerata ($x^2 + 1 = 0$).

La costruzione di $\mathcal{C}$ quì presentata è quella analitica, comunemente usata in letteratura. Consiste nel considerare l'insieme $\mathcal{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali (in simboli

$$\mathcal{R}^2 = \{(a,b)\ ; a\,, b \in \mathcal{R}\}\quad)\ ,$$

definire in $\mathcal{R}^2$ due operazioni binarie (più e per) che per ora indicheremo con i simboli $\oplus$ e $\odot$ (per distinguerle dalle operazioni $+$ e $\cdot$ fra i numeri reali), verificare che $\mathcal{C} = \left(\mathcal{R}^2\,, \oplus\,, \odot\right)$ è un campo che continene $\mathcal{R}$ (o un campo isomorfo a $\mathcal{R}$) e che contiene inoltre un elemento che verrà alla fine indicato con il simbolo i tale che $i \odot i = i^2 = -1$.

Cominciamo dunque col definire le operazioni, ponendo, se $(a,b)\,,\,(c,d) \in \mathcal{R}^2$:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \odot (c,d) = (a\,c - b\,d, a\,d + b\,c)$$

Le operazioni ora definite, godono delle stesse proprietà delle operazioni tra i numeri reali, in particolare valgono le proprietà associativa, commutativa e distributiva. $(0,0)$ è l'elemento neutro rispetto alla somma e $(1,0)$ è l'elemento neutro rispetto al prodotto: ossia $(a,b) \oplus (0,0) = (a,b)\ ,\ \ (a,b) \odot (1,0) = (a,b)\ \ \forall (a,b) \in \mathcal{R}^2$. Esiste l'opposto di ogni numero ed esiste l'inverso di ogni numero diverso da $(0,0)$ (l'elemento neutro rispetto alla somma).

Verifichiamo quì, come esempio, che esiste l'inverso di ogni numero complesso non nullo. Ossia verifichiamo che se $(a,b) \in \mathcal{R}^2$ $(a,b) \neq (0,0)$, allora esiste $(x,y) \in \mathcal{R}^2$ con $(x,y) \odot (a,b) = (1,0)$. Deve essere

$$\begin{cases} a\,x - b\,y = 1 \\ \\ b\,x + a\,y = 0 \end{cases}$$

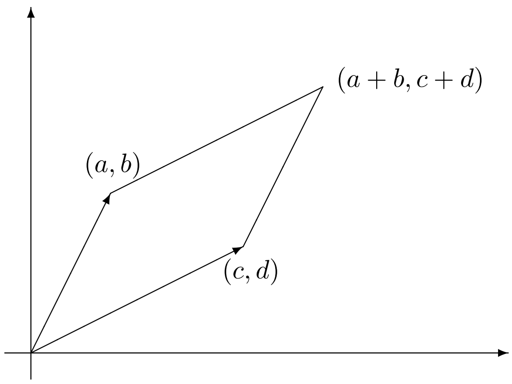
Pertanto supponendo $b \neq 0$:

$$\begin{cases} x = -\frac{a\,y}{b} \\ \\ -\frac{a^2\,y}{b} - b\,y = 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \\ x = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Pertanto il numero complesso

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2} \, , \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

è l'inverso del numero complesso (a,b).
Da notare che, fissando nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, il numero complesso (a,b) può essere rappresentato come il punto di coordinate (a,b).
In tal caso la somma di due numeri complessi si ottiene con la regola del parallelogramma (vedi figura).



Consideriamo ora la funzione $f\ : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ definita dalla legge: $f(a) = (a,0)$ $\ a \in \mathcal{R}$. La funzione f è iniettiva ed ha le seguenti proprietá:

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$$
$$f(a\,b) = f(a) \odot f(b)$$

Se indichiamo quindi con

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}} = \{(a,0)\ , a \in \mathcal{R}\} = f(\mathcal{R})$$

otteniamo un sottocampo di $\mathcal{C}$ che è isomorfo ad $\mathcal{R}$ (tramite l'isomorfismo f considerato). In vista di questo fatto, noi identificheremo $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ con $\mathcal{R}$ e useremo la notazione a per indicare $f(a) = (a,0)$.
Osservando infine che

$$(0,b) = (b,0) \odot (0,1)$$

e quindi, se indichiamo con $i = (0,1)$ (**l'unità immaginaria**), possiamo scrivere:

$$(a,b) = (a,0) \oplus (0,b) = (a,0) \oplus (0,1) \odot (b,0) = a \oplus [i \odot b]$$

e ritornando alla notazione usuale per somma e prodotto

$$(a, b) = a + i\, b$$

La forma $a + i\, b$ viene detta la **forma algebrica** del numero complesso (a, b).
Se $z = a+i\, b$ è un numero complesso in forma algebrica, il numero reale a viene chiamato **la parte reale** di z ed indicato col simbolo

$$a = Re(z)$$

mentre b viene chiamato **il coefficiente dell'immaginario** ed indicato col simbolo

$$b = Im(z)$$

La forma algebrica di un numero complesso è particolarmente utile per fare calcoli con i numeri complessi, infatti basta usare le regole del calcolo letterale e il fatto che

$$i^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Ad esempio :

- $$(a + i\, b)(c + i\, d) = a\, c + a\, i\, d + i\, b\, c + i^2 b\, d = a\, c - b\, d + i(a\, d + b\, c)$$

- $$\frac{1}{a + i\, b} = \frac{a - i\, b}{(a + i\, b)(a - i\, b)} = \frac{a - i\, b}{a^2 - (i\, b)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\, \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

- $$(1 + i)^6 = \left[(1 + i)^2\right]^3 = \left[1 + 2\, i + i^2\right]^3 = 8\, i^3 = -8\, i$$

Se $z = a + i\, b$ è un numero complesso, viene chiamato numero **complesso coniugato** di z ed indicato col simbolo $\overline{z}$ il numero complesso

$$\overline{z} = a - i\, b$$

Sono facili da verificare le seguenti proprietà. Se $z = a+i\, b$ e $w = c+i\, d$ sono due numeri complessi, allora:

- i)
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

- ii)
$$\overline{z\, w} = \overline{z}\, \overline{w}$$

- iii)
$$\overline{\overline{z}} = z$$

- iv)
$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

- v)
$$Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\, i}$$

- vi)

$$z \in \mathcal{R} \;\text{ ossia }\; b = Im(z) = 0 \;\text{ se e solo se }\; z = \overline{z}$$

- vii)

$$z\,\overline{z} = a^2 + b^2$$

Osservazione 1
Nell'estendere l'insieme dei numeri reali all'insieme dei numeri complessi si ottiene, come abbiamo visto, un numero complesso il cui quadrato è uguale a -1, però si perde una importante proprietà di $\mathcal{R}$ che è quella di essere un campo totalmente ordinato. Infatti non è possibile definire in $\mathcal{C}$ una relazione di $\leq$ che abbia le stesse proprietà ricordate all'inizio per la stessa relazione definita in $\mathcal{R}$. Infatti se fosse possibile definire una tale relazione di ordine in $\mathcal{C}$, si avrebbe, essendo $i \neq 0$, o $0 < i$ oppure $i < 0$. Vediamo ora con un semplice ragionamento come ognuna delle due possibilità porta ad una contraddizione.
Supponiamo infatti che sia $0 < i$. Allora risulta che $0 < i^2 = -1$ e quindi, sommando 1, $1 < 0$. Infine, moltiplicando per i (che sto supponendo positivo) ottengo $i < 0$. Conclusione che contrasta con l'ipotesi da cui siamo partiti.
Una contraddizione simile si ottiene partendo dall'ipotesi che sia $i < 0$.

Osservazione 2
Consideriamo un'equazione di secondo grado

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0$$

con coefficienti $a\,,b\,,c \in \mathcal{R}$ e $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$ e verifichiamo che tale equazione ha due radici complesse.
Infatti se poniamo $z = x + i\,y$, l'equazione diventa

$$a(x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2) + b(x + i\,y) + c = 0$$

Pertanto i numeri reali $x\,,y$ devono risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a\,x^2 - a\,y^2 + b\,x + c = 0 \\ 2\,a\,x\,y + b\,y = 0 \end{cases}$$

Raccogliendo y nella seconda equazione, si ottengono i due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \\ a\,x^2 + b\,x + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{b}{2\,a} \\ \\ a\,y^2 = a\,\frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{b^2}{2\,a} + c = \frac{a(4\,a\,c - b^2)}{4\,a^2} \end{cases}$$

Essendo $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$, il primo sistema non ha soluzioni reali, mentre il secondo sistema ammette le due soluzioni:

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2\,a} \\ \\ y = \frac{\sqrt{4\,a\,c - b^2}}{2\,a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{b}{2\,a} \\ \\ y = -\frac{\sqrt{4\,a\,c - b^2}}{2\,a} \end{cases}$$

Pertanto le due soluzioni complesse sono date da

$$z_1 = \frac{-b - i\,\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \quad e \quad z_2 = \frac{-b + i\,\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$$

9.2 Esercizi proposti

1. Scrivere $Re(z)$ e $Im(z)$ dei seguenti numeri complessi:

$$z = \frac{3 + 2\,i}{2 - i} \quad ; \; z = (2 - 3\,i)^3 \quad ; \; z = \frac{1}{i}$$

2. Verificare che le potenze naturali di i, ossia i^n al variare di $n \in \mathcal{N}$, possono assumere solo i seguenti quattro valori $i\,,-1\,,-i\,,1$ ossia in simboli

$$\{i^n \;;\; n \in \mathcal{N}\} = \{i\,,-1\,,-i\,,1\}$$

Qunto vale i^{387} ?

3. Trovare i due numeri complessi che verificano l'equazione $z^2 = i$.

4. Dire se le seguenti uguaglianze sono vere :

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \quad , \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$$

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

9.3 I numeri complessi in forma trigonometrica

Se $z = a + i\,b \in \mathcal{C}$, indichiamo con $|z|$ e lo chiamiamo **modulo** di z, il numero reale :

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Alcune importanti proprietà del modulo sono le seguenti. Se $z = a + i\,b$ e $w = c + i\,d$ sono due numeri complessi, allora:

- i)
$$-|z| \leq Re(z) \leq |z|$$
- ii)
$$-|z| \leq Im(z) \leq |z|$$
- iii) $|z| \geq 0 \;\; \forall\, z \in \mathcal{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
- iv)
$$|z\,w| = |z|\,|w|$$
- v) (Diseguaglianza triangolare)
$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Verifichiamo la proprietà v), facendo un conto diretto. Scritta in modo esplicito, tale diseguaglianza diventa

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Essendo entrambi i membri di questa diseguaglianza numeri reali non negativi, la diseguaglianza precedente è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato i due membri, ossia

$$a^2 + 2\,a\,c + c^2 + b^2 + 2\,b\,d + d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

e, dopo le semplificazioni, si ha:

$$a\,c + b\,d \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Osserviamo ora che se $a\,c + b\,d < 0$ la diseguaglianza precedente vale (in effetti vale col minore stretto). D'altra parte, se $a\,c + b\,d \geq 0$, allora la diseguaglianza precedente è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato: ossia

$$a^2c^2 + b^2d^2 + 2\,a\,c\,b\,d \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

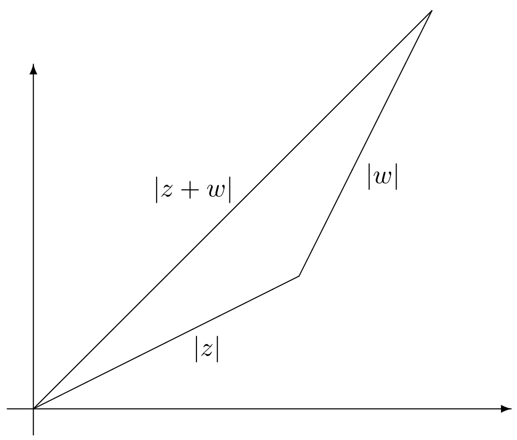
e quindi, portando tutto a secondo membro

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2\,a\,b\,c\,d \geq 0$$

e questa diseguaglianza è verificata essendo

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2\,a\,b\,c\,d = (a\,d - b\,c)^2$$

La diseguaglianza triangolare ha un importante significato geometrico, come si può vedere dalla figura.



Geometricamente tale diseguaglianza afferma che, in un triangolo, la lunghezza di un lato è minore o uguale della somma delle lunghezze degli altri due.

Dato ora un numero complesso $z = a + i\,b$, indichiamo con

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e con θ un numero reale tale che:

$$(*) \begin{cases} a = \rho\,\cos\theta \\ b = \rho\,\sin\theta \end{cases}$$

(θ può essere, per esempio, la misura in radianti dell'angolo che il semiasse positivo delle x forma con la semiretta uscente dall'origine e passante per (a,b) f)
Usando i numeri ρ e θ possiamo scrivere il numero complesso z come

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

Questo modo di scrivere il numero z viene chiamata la **forma trigonometrica** di z. Il numero ρ è il modulo del numero complesso z. Indicheremo infine con

$$arg(z) = \{\theta \in \mathcal{R}\ ;\ valgono\ le\ (*)\ \}$$

Risulta semplice da verificara che se $\theta_1\,,\,\theta_2 \in \arg(z)$, allora $\theta_1 - \theta_2 = 2\,h\,\pi$ con $h \in \mathcal{Z}$.
Molto utile è la seguente proprietà.
Se $z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ e $w = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ sono due numeri complessi in forma trigonometrica, allora:

-
$$z\,w = \rho\,r(\cos(\theta+\varphi) + i\,\sin(\theta+\varphi))$$

- e se $w \neq 0$
$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta-\varphi) + i\,\sin(\theta-\varphi))$$

Ossia

$$\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w)$$
$$\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$$

(Da notare che se $A\,,B \subset \mathcal{R}$ indichiamo con

$$A + B = \{a + b\ ;\ a \in A\ ,\ b \in B\}$$

e analogamente con

$$A - B = \{a - b\ ;\ a \in A\ ,\ b \in B\}\quad)$$

Infatti risulta

$$z\,w = \rho\,r(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) =$$
$$= \rho\,r\,[\cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\cos\theta\,\sin\varphi + \cos\varphi\,\sin\theta)] =$$
$$= \rho\,r(\cos(\theta+\varphi) + i\,\sin(\theta+\varphi))$$

Analogamente si procede per il quoziente.
Applicando ripetutamente la formula precedente con $w = z$ si ottiene la seguente:

Formula di De Moivre Sia $z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ un numero complesso in forma trigonometrica e sia $n \in \mathcal{N}$ un numero naturale, allora

$$z^n = \rho^n(\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta))$$

Concludiamo infine queste considerazioni, applicando la formula di De Moivre per risolvere il seguente esercizio.

Trovare le radici n-esime di un numero complesso Fissato un numero complesso w ed un numero naturale n, vorremmo trovare le suluzioni dell'equazione (nell'incognita $z \in \mathcal{C}$)

$$z^n = w$$

Se scriviamo i numeri complessi in forma trigonometrica, ossia se

$$w = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

e

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

allora l'equazione diventa

$$\rho^n(\cos(n\,\theta) + i\,\sin(n\,\theta)) = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

Pertanto devono valere le relazioni

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ \cos(n\,\theta) = \cos\varphi \\ \sin(n\,\theta) = \sin\varphi \end{cases}$$

Ne consegue che deve essere

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta = \theta_k = \frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n} \quad , \; k \in \mathcal{Z}$$

Le soluzioni dell'equazione iniziale si ottengono quindi dalla formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n}\right)\right]$$

al variare di $k \in \mathcal{Z}$.
Osserviamo infine che le soluzioni $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ che si ottengono dalla formula precedente, dando a k i valori $0, 1, \ldots, n-1$ sono soluzioni tutte diverse dell'equazione $z^n = w$, mentre se diamo a k altri valori, le soluzioni che otteniamo coincidono con una di quelle ottenute in precedenza. Infatti supponiamo di dare a k un valore $\geq n$. Allora dividendo k per n ottengo $k = q\,n + r$ dove il quoziente q è un numero naturale e il resto r è un numero naturale compreso tre 0 e $n-1$. Dalle relazione

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n} = \frac{\varphi + 2\,q\,n\,\pi + 2\,r\,\pi}{n} = \theta_r + 2\,q\,\pi$$

si ricava che $z_k = z_r$. In conclusione le soluzioni dell'equazione sono n.
Concludiamo il paragrafo con due esempi.

1. Risolvere l'equazione $z^4 + 1 = 0$.
   Scrivendo il numero -1 in forma trigonometrica, ottengo:

   $$-1 = 1\,(\cos\pi + i\,\sin\pi)$$

   Applicando dunque la formula ottenuta

   $$z_k = \left(\cos\left(\frac{\pi + 2\,k\,\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi + 2\,k\,\pi}{4}\right)\right)$$

con $k = 0, 1, 2, 3$, ottengo le seguenti quattro soluzioni:

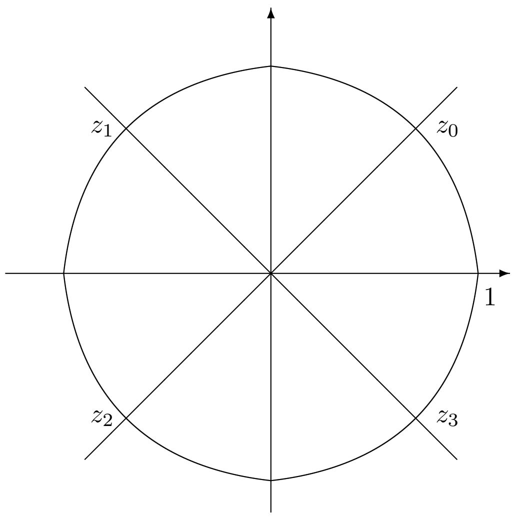
$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{3\,\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\,\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{5\,\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{5\,\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

$$z_3 = \left(\cos\left(\frac{7\,\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{7\,\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

che sono rappresentate nella seguente figura.



2. Risolvere l'equazione $z^3 = i$. Essendo:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}$$

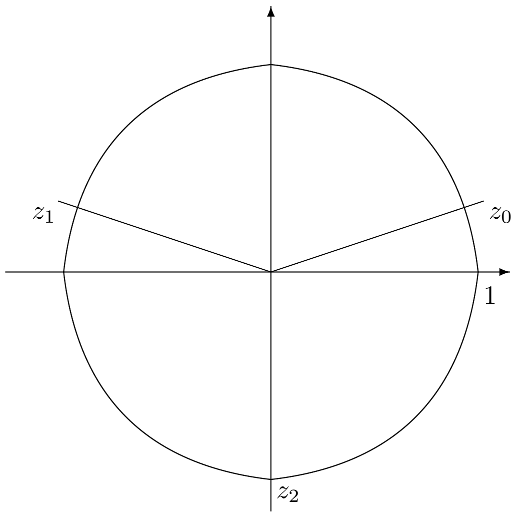
ottengo, applicando la formula, le tre soluzioni:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

$$z_1 = cos\frac{5\,\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\,\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$$

$$z_2 = \cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2} = -i$$

che sono rappresentate nella figura:



9.4 Esercizi proposti

1. Sia $P(z) = a\,z^3 + b\,z^2 + c\,z + d$ un polinomio di grado tre con coefficienti $a\,,b\,,c\,,d \in \mathcal{R}$. :

   - i) Verificare che $\forall\ z \in \mathcal{C}$ si ha
   $$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$$
   - ii) Supponiamo che l'equazione $P(z) = 0$ abbia tre radici complesse distinte $z_1\,, z_2\,, z_3$. Verificare che almeno una di esse è reale.

2. Siano $z\,, w \in \mathcal{C}$ due numeri complessi tali che
$$|z + w| = |z| + |w|$$
Verificare allora che $\exists\ \lambda \in \mathcal{R}\ ,\ \lambda > 0$, tale che $z = \lambda\, w$.

3. Siano $z\,, w \in \mathcal{C}$ due numeri complessi. Verificare che :

   - i)
   $$|z| - |w| \leq |z - w|$$
   - ii)
   $$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

4. Risolvere l'equazione
$$z^3 = 1 + i$$

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

9.5 Risoluzione esercizi sui numeri complessi

- 2-1 Scrivere $Re(z)$ e $Im(z)$ dei seguenti numeri complessi:

$$z = \frac{3+2\,i}{2-i} \quad ; \; z = (2-3\,i)^3 \quad ; \; z = \frac{1}{i}$$

a.
$$z = \frac{3+2\,i}{2-i} = \frac{(3+2\,i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6-2+3\,i+4\,i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\,i$$

Pertanto $Re(z) = \frac{4}{5}$ e $Im(z) = \frac{7}{5}$.

b. Sviluppando il cubo ottengo:

$$z = 8 + 3\,(4)\,(-3\,i) + 3\,2\,(-3\,i)^2 + (-3\,i)^3 = 8 - 36\,i - 54 + 27\,i = -46 - 9\,i$$

c. Risulta:
$$z = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

- 2-2. Verificare che le potenze naturali di i, ossia i^n al variare di $n \in \mathcal{N}$, possono assumere solo i seguenti quattro valori $i\,, -1\,, -i\,, 1$ ossia in simboli

$$\{i^n \;;\; n \in \mathcal{N}\} = \{i\,, -1\,, -i\,, 1\}$$

Qunto vale i^{387} ? Dividendo 387 per 4 ottengo che $387 = 4 \cdot 96 + 3$ e quindi

$$i^{387} = \left(i^4\right)^{96}\, i^3 = i^3 = -i$$

- 2-3. Trovare i due numeri complessi che verificano l'equazione $z^2 = i$.
Posto $z = x + i\,y$, deve essere $x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i = i$ e quindi x e y devono verificare il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2\,x\,y = 1 \end{cases}$$

Ottengo quindi i due sistemi:

$$\begin{cases} x = y \\ 2\,x^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ -2\,x^2 = 1 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni, mentre dal primo ottengo le due soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $z^2 = i$, sono dunque date da:

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i) \quad e \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)$$

- 2-4. Dire se le seguenti uguaglianze sono vere :

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \quad , \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$$

a. Risulta:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(-1+3\sqrt{3}\,i+9-3\sqrt{3}i\right) = 1$$

b. Risulta:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \left(\frac{1+3\sqrt{3}\,i-9-3\sqrt{3}\,i}{8}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

- 4-1. Sia $P(z) = a\,z^3 + b\,z^2 + c\,z + d$ un polinomio di grado tre con coefficienti $a\,,b\,,c\,,d \in \mathcal{R}$.
  - i) Verificare che $\forall\ z \in \mathcal{C}$ si ha
  $$P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$$
  - ii) Supponiamo che l'equazione $P(z) = 0$ abbia tre radici complesse distinte $z_1\,,z_2\,,z_3$. Verificare che almeno una di esse è reale.

Dalle proprietà della coniugazione, si ottiene:

$$\overline{P(z)} = \overline{a}\,\overline{z}^3 + \overline{b}\,\overline{z}^2 + \overline{c}\,\overline{z} + \overline{d} = a\,\overline{z}^3 + b\,\overline{z}^2 + c\,\overline{z} + d = P(\overline{z})$$

Ne deriva quindi che, se z_1 è una soluzione dell'equazione $P(z) = 0$ anche $\overline{z}_1$ lo è. Pertanto il numero delle soluzioni complesse è pari. Se le soluzioni sono tre, una almeno di essa deve essere reale dovendo essere uguale alla sua coniugata.

- 4-2. Siano $z\,,w \in \mathcal{C}$ due numeri complessi tali che

$$|z+w| = |z| + |w|$$

Verificare allora che $\exists\ \lambda \in \mathcal{R}\ ,\ \lambda > 0$, tale che $z = \lambda\,w$.
Ricordando la dimostrazione della diseguaglianza triangolare, si ottiene che se $|z+w| = |z| + |w|$, allora deve essere: $a\,c + b\,d \geq 0$ e $a\,d - b\,c = 0$. Risulta allora

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

e se pongo

$$\lambda = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

risulta $a = \lambda\,c$ e $b = \lambda\,d$ e quindi $z = a + i\,b = \lambda(c + i\,d) = \lambda\,w$. Infine, dalla disuguaglianza

$$a\,c + b\,d = \lambda\left(d^2 + c^2\right) \geq 0$$

risulta $\lambda \geq 0$.

- 4-3. Siano $z\,,w \in \mathcal{C}$ due numeri complessi. Verificare che :
  - i)
  $$|z| - |w| \leq |z - w|$$
  - ii)
  $$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

i) Dalla disuguaglianza triangolare, ottengo:

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$$

da cui si ricava che $|z| - |w| \leq |z - w|$.

ii) Usando la relazione $|z|^2 = z\,\overline{z}$, si ottiene

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) =$$

$$= z\,\overline{z} + z\,\overline{w} + w\,\overline{z} + w\,\overline{w} + z\,\overline{z} - z\,\overline{w} - w\,\overline{z} + w\,\overline{w} = 2\,(z\,\overline{z} + w\,\overline{w}) = 2\,\left(|z|^2 + |w|^2\right)$$

- 4-4. Risolvere l'equazione

$$z^3 = 1 + i$$

Scriviamo il numero complesso $1 + i$ in forma trigonometrica. Si ha

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Usando infine la formula, ottengo le tre soluzioni:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\,\pi}{12} + i\,\sin\frac{9\,\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\,\pi}{12} + i\,\sin\frac{17\,\pi}{12}\right)$$

10 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Daremo in questo capitolo un rapido cenno a come si possono risolvere alcune equazioni differenziali.
In generale, per equazione differenziale, si intende un legame o una relazione (sempre espressa nei casi che consideremo noi da una formula matematica) tra una variabile (indipendente) x, una funzione (incognita) della x $y(x)$ ed alcune derivate dalla funzione incognita: $y'\,, y''\,, y'''\,, \ldots$. L'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione differenziale si chiama **l'ordine dell'equazione differenziale**.
Per esempio un'equazione del primo ordine in forma normale (ossia esplicitata rispetto a y') é un'equazione del tipo :

$$y' = f(x, y)$$

dove $f\ : A \subset \mathcal{R}^2 \to R$ é una funzione assegnata (il secondo membro dell'equazione). Per soluzione di un'equazione differenziale del tipo considerato si intende una funzione $y(x)$ definita e derivabile in un intervallo $[a, b]$ tale che $\forall\ x \in [a, b]$ la coppia $(x, y(x)) \in A$ e valga l'identitá :

$$y'(x) = f(x, y(x)) \ \ \forall\ x \in [a, b]$$

Da notare che l'incognita in un'equazione differenziale non é un numero come si verifica per esempio nell'equazione algebrica di secondo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, ma é una funzione.
Alcuni esempi specifici possono essere:

$$\begin{array}{ll} y' = y & y' = x\,y + \sin x \\ y' = e^y & y' = \frac{y}{1+x\,y^2} \end{array}$$

Come vedremo in seguito in generale un'equazione differenziale del primo ordine ha infinite soluzioni.
Per individuarne una particolare in generale é necessario assegnare qualche ulteriore condizione. Ad esempio, fissati x_0 ed y_0 (due numeri scelti con la sola condizione che $(x_0, y_0) \in A$ dove A ricordiamo é l'insieme di definizione di f il secondo membro dell'equazione) possiamo cercare, se esiste, una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ che verifichi l'ulteriore condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Questo problema viene chiamato **problema di Cauchy** per l'equazione differenziale considerata e viene indicato nel seguente modo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Consideriamo ora alcuni semplici esempi.
1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Supponendo $y(x) > 0$, l'equazione puó essere scritta come

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

o anche come $(\log y(x))' = 1$. Risulta pertanto $\log y(x) = x + c$ con c costante in $\mathcal{R}$. Ne deriva quindi che

$$y(x) = e^c\, e^x$$

Infine la condizione $y(0) = 3$ implica $e^c = 3$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy é la funzione $y(x) = 3\,e^x$.
2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Supponendo $y(x) > 0$ e ragionando come prima, si ottiene:

$$1 = \frac{y'(x)}{y^2(x)} = \left(-\frac{1}{y(x)}\right)'$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(x)} = x + c$$

(c costante in $\mathcal{R}$). Risolvendo in y, si ha infine:

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

La condizione iniziale $y(0) = 1$ implica ora che $c = -1$. Pertanto la soluzione cercata é

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

10.1 Equazioni differenziali del primo ordine lineari

Un'equazione differenziale del primo ordine lineare é del tipo:

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

dove $a(x)\,, b(x)$ sono due funzioni continue definite in un intervallo $[a, b]$.
Fissato $x_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in R$, vale il seguente importante
Teorema Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una unica soluzione che é data dalla seguente formula risolutiva:

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0\, e^{-A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt \right)$$

dove $A : [a, b] \to \mathcal{R}$ é una primitiva di $a(x)$ (ossia $A'(x) = a(x) \;\; \forall\, x \in [a, b]$).
Dimostrazione Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $e^{-A(x)}$ si ottiene:

$$b(x)\, e^{-A(x)} = (y'(x) - a(x)\, y(x))\, e^{-A(x)} = \left(y(x)\, e^{-A(x)}\right)'$$

Integrando infine questa identitá nell'intervallo $[x_0, x]$ *con* $x \in [a, b]$, si ottiene, ricordando la formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt = y(x)\, e^{-A(x)} - y(x_0)\, e^{-A(x_0)}$$

e quindi, risolvendo in y, si ottiene la formula desiderata.
Consideriamo ora alcuni esempi.

- Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + \cos x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Essendo $a(x) = 1$, risulta $A(x) = x$. Applicando la formula risolutiva, ottengo:

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} \cos t \, dt$$

Integrando per parti si ottiene :

$$\int_0^x e^{-t} \cos t \, dt = -e^{-t} \cos t\Big|_0^x - \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt = 1 - e^{-x} \cos x - \left[-e^{-t} \sin t\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t} \cos t \, dt \right]$$

ossia

$$\int_0^x e^{-t} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x\right)$$

Possiamo concludere che

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - \cos x + \sin x\right)$$

- Risolvere l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{y}{x} + x^2$$

In questo caso $a(x) = \frac{1}{x}$ e quindi $A(x) = \log|x|$. Moltiplicando per $e^{-A(x)}$, ottengo:

$$x^2 \, e^{-\log|x|} = e^{-\log|x|} \left(y' - \frac{y}{x} \right) = \left(y(x) \, e^{-\log|x|} \right)'$$

Supponendo ora $x > 0$, otteniamo:

$$\left(\frac{y}{x} \right)' = \frac{x^2}{x} = x = \left(\frac{x^2}{2} \right)'$$

e quindi:

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + c \quad \textit{ossia} \quad y(x) = \frac{1}{2} \, x^3 + c \, x$$

dove c é una costante arbitraria.

10.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **a variabili separabili** se é del tipo:

$$y' = a(x) \, b(y)$$

dove $a(x) \, , b(y)$ sono due funzione continue nei loro insiemi di definizione. Il secondo membro dell'equazione in questo caso é il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y.
Da notare che, se per qualche valore di y (per esempio $y = y_0$) risulta $b(y_0) = 0$, allora la funzione

costante $y(x) = y_0 \; \forall \; x$ é una soluzione dell'equazione differenziale. Supposto invece $b(y) \neq 0$, possiamo dividere per $b(y)$, e scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

Integrando infine su di un intervallo del tipo $[x_0, x]$, otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{b(y(t))}\, dt$$

Facendo ora la sostituzione $s = y(t)$ nel secondo integrale ottengo:

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{b(s)}$$

Riusciró infine a risolvere in maniera esplicita l'equazione differenziale se, dalla relazione precedente riesco a ricavare $y(x)$.
Vediamo per concludere alcuni esempi.

- Risolvere l'equazione differenziale: $y' = y^2$. Risulta, supposto $y \neq 0$

  $$\frac{y'}{y^2} = 1$$

  e quindi, procedendo come nel caso generale

  $$x - x_0 = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{s}\bigg|_{y(x_0)}^{y(x)}$$

  Ne deriva che

  $$-\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y(x_0)} = x - x_0$$

  ossia

  $$y(x) = -\frac{1}{x + c}$$

  dove abbiamo posto per semplicitá $c = -x_0 - \frac{1}{y(x_0)}$. In conclusione, qualunque sia $c \in R$, la funzione

  $$y(x) = -\frac{1}{x + c}$$

  definita per $x \neq -c$ é soluzione dell'equazione considerata. Da notare che l'equazione ammette anche la soluzion costante $y(x) = 0 \; \forall \; x$.

- Risolvere il problema di Cauchy:

  $$\begin{cases} y' = y\,(y-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

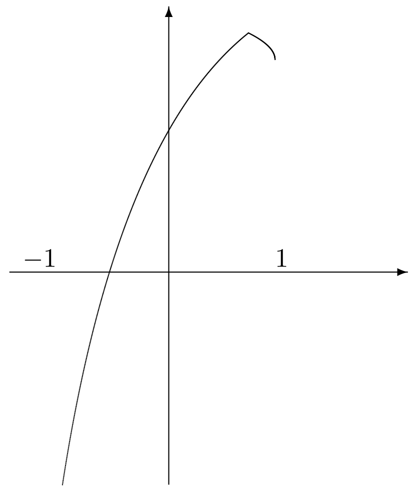
  Procedendo come prima ottengo :

  $$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)(y(t)-1)}\, dt = \int_2^{y(x)} \frac{ds}{s(s-1)}$$

Ora
$$\frac{1}{s\,(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$
ottengo quindi:
$$x = \log\left|\frac{s-1}{s}\right|\Bigg|_2^{y(x)} = \log\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| - \log\frac{1}{2}$$
Ne deriva che
$$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = \frac{1}{2}e^x$$
ossia, essendo $y(x) > 1$
$$y(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,e^x} = \frac{2}{2-e^x}$$

10.3 Esercizi di ripasso in vista della prima prova parziale

1. Studiare il grafico della funzione
$$f(x) = 2\,x + \sqrt{1-x^2}$$
Il dominio della funzione é dato dall'intervallo $[-1,1]$ e risulta $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ e $f(0) = 1$. Osserviamo infine che
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} < -2\,x \Leftrightarrow x < 0 \;\; e \;\; 1-x^2 < 4\,x^2 \Leftrightarrow x < 0 \;\; e \;\; 5\,x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
D'altra parte, se $x \in (-1,1)$:
$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$
Pertanto
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} < x \Leftrightarrow x > 0 \;\; e \;\; 4(1-x^2) < x^2 \Leftrightarrow x > 0 \;\; e \;\; 5\,x^2 > 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$$
Pertanto il punto $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ é un punto di massimo relativo con $f(\frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$.
Calcoliamo infine la derivata seconda. Si ha:
$$f''(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2} + x\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1}{(1-x^2)\,\sqrt{1-x^2}}$$
e quindi la derivata seconda é sempre negativa e la funzione é concava. Il grafico pertanto é del tipo:



2. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \lim_{x\to 1}\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Applicando le regole di De L'Hospital, ottengo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Scrivendo infine il numeratore come

$$\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$$

e dividendo numeratore e denominatore per x, ottengo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1+x}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

Per calcolare il secondo limite, usiamo in primo luogo la formula

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\,\log(f(x))}$$

valida per ogni funzione $f(x)$ positiva e calcoliamo solo il limite dell'esponente. Si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)}\left[3^{1/x}\,\log 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2^{1/x}\,\log 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] =$$

$$= -3\,\log 3 + 2\,\log 2 = \log\left(\frac{4}{27}\right)$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x\to 1}\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{4}{27}$$

3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 x^2\,\log(1+4\,x^2)\,dx \quad , \quad \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Nel primo integrale, integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^1 x^2\,\log(1+4\,x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\,\log(1+4\,x^2)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3\,8\,x}{1+4\,x^2}\,dx$$

Facendo infine la divisione tra i due polinomi che compaiono a numeratore e denominatore della funzione integrando nell'ultimo integrale, si ottiene

$$\frac{8\,x^4}{1+4\,x^2} = 2\,x^2 - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+4\,x^2}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int_0^1 x^2\,\log(1+4\,x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\,\log(1+4\,x^2) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,\arctan(2\,x)\right)\right]\Bigg|_0^1$$

Per calcolare il secondo integrale, useremo la sostituzione $\sqrt{1+x^2} = t + x$ e quindi

$$x = \frac{1-t^2}{2\,t} \quad e \quad dx = \frac{1}{2}\,\frac{-2\,t^2-1+t^2}{t^2} = \frac{t^2+1}{2\,t^2}$$

Sostituendo nella funzione si ha

$$x\sqrt{1+x^2} = \frac{1-t^2}{2\,t}\left(t + \frac{1-t^2}{2\,t}\right) = \frac{(1-t^2)(1-t^2)}{4\,t^2}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} \frac{4\,t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\frac{t^2+1}{2\,t^2}\,dt = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

Usando infine la decomposizione

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

ottengo

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \left(\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2}$$

10.4 Prima prova scritta in classe

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x(2-x)} - x$$

e tracciarne il grafico.

2. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - \sin x}{x\,\arctan x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt[3]{1+x^3} - x\right)$$

3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 x^2\,\arctan x\,dx \quad , \quad \int_0^2 e^x\,\sin^2 x\,dx$$

Correzione

1. Il dominio della funzione é l'intervallo $[0,2]$. Risulta inoltre

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x\,(2-x)} > x \Leftrightarrow 2\,x - x^2 > x^2 \Leftrightarrow x\,(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

Notiamo inoltre che $f(0) = 0$ e $f(2) = -2$. La derivate prima di f é data da

$$f'(x) = \frac{2-2\,x}{2\,\sqrt{x\,(2-x)}} - 1 = \frac{1 - x - \sqrt{x\,(2-x)}}{\sqrt{x\,(2-x)}}$$

Pertanto

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > \sqrt{x\,(2-x)} \Leftrightarrow x<1 \quad e \quad 1+x^2-2\,x > 2\,x - x^2 \Leftrightarrow x < 1 \quad e \quad 2\,x^2 - 4\,x + 1 > 0$$

Siccome l'equzione $2\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$ ha come soluzioni $x = \frac{2\mp\sqrt{2}}{2}$, risulta che

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$$

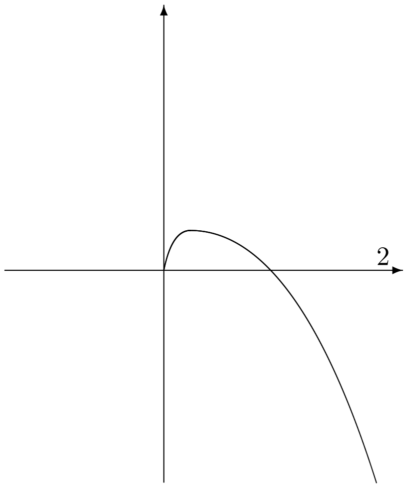
Pertanto $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ é un punto di massimo relativo e risulta

$$f(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

Infine

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{x\,(2-x)} - \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x\,(2-x)}}}{x\,(2-x)} = -\frac{2\,x - x^2 + 1 - 2\,x + x^2}{x\,(2-x)\,\sqrt{x\,(2-x)}} = -\frac{1}{x\,(2-x)\,\sqrt{x\,(2-x)}}$$

Pertanto la funzione é concava. Il grafico é del tipo:



2. Usando le regole di De L'Hospital, ottengo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - \sin x}{x\,\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x\,e^x - \cos x}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^x + x\,e^x + \sin x}{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

Nel secondo limite, ponendo $y = \frac{1}{x}$, ottengo:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\sqrt[3]{1+x^3} - x\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}} - \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+y^3} - 1}{y^3} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{3} \left(1+y^3\right)^{-2/3} \frac{3\,y^2}{3\,y^2} = \frac{1}{3}$$

3. Nel primo integrale, integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^1 x^2 \arctan x\,dx = \frac{x^3}{3} \arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

Ricordando infine che risulta

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

si puó concludere che

$$\int_0^1 x^2 \arctan x\,dx = \frac{x^3}{3} \arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)\Big|_0^1$$

Nel secondo integrale, integrando per parti due volte, si ottiene

$$\int_0^2 e^x \sin^2 x\,dx = e^x \sin^2 x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x\,2\,\sin x\,\cos x\,dx =$$

$$= e^x \sin^2 x\Big|_0^2 - \left[2\, e^x \sin x \cos x\Big|_0^2 - 2 \int_0^2 e^x \, \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\, dx \right] =$$

$$= \left(e^x \sin^2 x - 2\, e^x \sin x \cos x\right)\Big|_0^2 + 2 \int_0^2 e^x \, \left(1 - 2 \sin^2 x\right)\, dx$$

Possiamo concludere quindi che

$$\int_0^2 e^x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{5} \left(e^x \sin^2 x - 2\, e^x \sin x \cos x + 2\, e^x\right)\Big|_0^2$$

10.5 Equazioni differenziali del secondo ordine lineari

In questo paragrafo considereremo solo equazioni differenziali del secondo ordine lineari e **a coefficienti costanti**, cioé equazioni differenziali del tipo:

$$y'' + a\, y' + b\, y = f(x)$$

dove $a\,, b \in \mathcal{R}$ sono due numeri fissati e f é una funzione continua definita in un intervallo $[\alpha, \beta]$.
Nel caso che $f(x) = 0 \;\forall\; x \in [\alpha, \beta]$, l'equazione viene chiamata **omogenea**.
Un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di questo tipo é il seguente problema:

$$\begin{cases} y'' + a\, y' + b\, y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Qui $x_0\,, y_0\,, z_0$ sono numeri scelti ad arbitrio con $x_0 \in [\alpha, \beta]$ il dominio di f.
Noi cominceremo col far vedere come si possono ottenere due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale considerata nel caso che sia omogenea, ossia quando l'equazione é

$$y'' + a\, y' + b\, y = 0$$

Il polinomio di secondo grado

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\,\lambda + b$$

viene chiamato il **polinomio associato** all'equazione differenziale. Considereremo separatamente i tre casi in cui $\Delta = a^2 - 4\,b$ sia positivo, nullo o negativo.
Primo caso: $\Delta = a^2 - 4\,b > 0$ In questo caso l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette due soluzioni reali distinte:

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Le due funzioni:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \;\;,\;\; y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale. Infatti ragionando su y_1, risulta:

$$y_1'(x) = \lambda_1\, e^{\lambda_1 x} \;\;,\;\; y_1''(x) = \lambda_1^2\, e^{\lambda_1 x}$$

Pertanto:

$$y_1'' + a\, y_1' + b\, y_1 = e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + a\,\lambda_1 + b) = e^{\lambda_1 x} P(\lambda_1) = 0 \;\;\forall\; x$$

Secondo caso: $\Delta = a^2 - 4\,b = 0$ In questo caso l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette una unica soluzione $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ (contata due volte essendo in questo caso $P(\lambda)$ un quadrato). Allora due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziali sono date da:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1\,x} \;\; , \; y_2(x) = x\,e^{\lambda_1\,x}$$

Infatti ragionando sulla seconda, otteniamo:

$$y_2'(x) = e^{\lambda_1\,x}(1 + \lambda_1\,x) \;\; , \; y_2''(x) = e^{\lambda_1\,x}(2\,\lambda_1 + \lambda_1^2\,x)$$

Pertanto:

$$y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2 = e^{\lambda_1\,x}(2\,\lambda_1 + \lambda_1^2\,x + a + a\,\lambda_1\,x + b\,x) = e^{\lambda_1\,x}(P(\lambda_1)\,x - a + a) = 0 \;\; \forall\; x$$

Terzo caso: $\Delta = a^2 - 4\,b < 0$ In questo caso l'equazione $P(\lambda) = 0$ ha radici complesse (e coniugate) date da:

$$\lambda_1 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta$$

dove abbiamo posto:

$$\alpha = -\frac{a}{2} \;\; , \; \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Allora due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale son date dalle due funzioni:

$$y_1(x) = e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x) \;\; e \;\; y_2(x) = e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x)$$

Verifichiamolo per esempio per y_1. Si ha:

$$y_1'(x) = e^{\alpha\,x}(\alpha\,\sin(\beta\,x) + \beta\,\cos(\beta\,x))$$

$$y_1''(x) = e^{\alpha\,x}(\alpha^2\,\sin(\beta\,x) + 2\,\alpha\,\beta\,\cos(\beta\,x) - \beta^2\,\sin(\beta\,x))$$

Pertanto:

$$y_1''(x) + a\,y_1'(x) + b\,y_1(x) = e^{\alpha\,x}\left[\sin(\beta\,x)\left(\alpha^2 - \beta^2 + a\,\alpha + b\right) + \cos(\beta\,x)\,(2\,\alpha\,\beta + a\,\beta)\right]$$

Ricordando che

$$\alpha = -\frac{a}{2} \;\; e \;\; \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{4\,b - a^2}}{2}$$

si ricava che:

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\,\alpha + b = \frac{a^2}{4} - \frac{4\,b - a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0$$

$$2\,\alpha\,\beta + a\,\beta = \beta(2\,\alpha + a) = 0$$

Usando le due soluzioni $y_1\,, y_2$ trovate nelle considerazioni precedenti a seconda dei tre casi, possiamo ora scrivere la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione considerata. Infatti vale il seguente:

Teorema Tutte e sole le soluzioni dell'equazione $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ sono le funzioni della famiglia:

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$

dove $A\,,B \in \mathcal{R}$ son numeri arbitrari e $y_1\,,y_2$ sono le due soluzioni linearmente indipendenti trovate in precedenza.
Questo significa che per ogni valore assegnato ad A e a B la funzione:

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$

é una soluzione dell'equazione differenziale e, viceversa, se y é una soluzione dell'equazione allora si possono trovare due numeri $A\,,B \in R$ tali che

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$

10.6 Equazioni lineari a coefficienti costanti non omogenee

Consideriamo in questo paragrafo il caso di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, ossia un'equazione del tipo:

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$$

e mostriamo alcuni metodi che ci permette di trovare una soluzione di tale equazione non omogenea. Trovare una soluzione particolare dell'equazione completa é importante per il seguente fatto.

Se $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione non omogenea e $y_1\,,y_2$ sono le due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (coié $y'' + a\,y' + b\,y = 0$) che abbiamo trovato, allora l'insieme di tutte e sole le soluzioni dell'equazione non omogenea é data dalla famiglia di funzioni :

$$y(x) = \overline{y}(x) + A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$

al variare di $A\,,B \in \mathcal{R}$.

Cominciamo col considerare il seguente:

CASO 1. Supponiamo di dover trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$$

dove la funzione f é del tipo

$$f(x) = Q(x)\,e^{\alpha\,x}$$

dove Q é un polinomio in x di grado $n \geq 0$ ed $\alpha \in \mathcal{R}$ é un numero fissato.
Indicando, come al solito, con $P(\lambda)$ il polinimio associato all'equazione differenziale, ossia

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\,\lambda + b$$

vale la seguente regola:

- i) se $P(\alpha) \neq 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea si puó ricercare tra le funzioni dei tipo:

  $$\overline{y}(x) = R(x)\,e^{\alpha\,x}$$

  dove R é un polinomio in x di grado n;

- ii) se $P(\alpha) = 0$ e α é una soluzione dell'equazione $P(\lambda) = 0$ con molteplicitá uno (ossia l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette anche un'altra soluzione diversa da α), allora una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea si puó ricercare tra le funzioni dei tipo:

  $$\overline{y}(x) = x\, R(x)\, e^{\alpha\, x}$$

  dove R é un polinomio in x di grado n;

- iii) se $P(\alpha) = 0$ e α é una soluzione dell'equazione $P(\lambda) = 0$ con molteplicitá due (ossia l'equazione $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$), allora una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea si puó ricercare tra le funzioni dei tipo:

  $$\overline{y}(x) = x^2\, R(x)\, e^{\alpha\, x}$$

  dove R é un polinomio in x di grado n.

Consideriamo ora alcuni esempi.
1. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - 4\, y' + 3\, y = x^2 + 2\, x$$

Il secondo membro é del tipo considerato con $\alpha = 0$ e $Q(x) = x^2 + 2\, x$. Siccome $P(0) = 3 \neq 0$, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = A\, x^2 + B\, x + C$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = 2\, A\, x + B \quad , \quad \overline{y}''(x) = 2\, A$$

e quindi

$$\begin{aligned} \overline{y}'' - 4\, \overline{y}' + 3\, \overline{y} &= 2\, A - 8\, A\, x - 4\, B + 3\, A\, x^2 + 3\, B\, x + 3\, C = \\ &= 3\, A\, x^2 + (3\, B - 8\, A)\, x + 2\, A - 4\, B + 3\, C \end{aligned}$$

Ottengo quindi che $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $A\, , B\, , C$ verificano il sistema

$$\begin{cases} 3\, A = 1 \\ 3\, B - 8\, A = 2 \\ 2\, A - 4\, B + 3\, C = 0 \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$A = \frac{1}{3} \quad , \quad B = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{14}{9} \quad , \quad C = \frac{1}{3}\left(\frac{56}{9} - \frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}$$

Allora una soluzione é data da:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{3}\, x^2 + \frac{14}{9}\, x + \frac{50}{27}$$

2. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - 4\, y' + 3\, y = x\, e^x$$

Il secondo membro é del tipo considerato con $\alpha = 1$ e $Q(x) = x$. Siccome $P(1) = 0$ e 1 é una soluzione con molteplicitá uno, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = x\ (A\, x + B)\ e^x = e^x\ \left(A\, x^2 + B\, x\right)$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = e^x \, \big(A\,x^2 + B\,x + 2\,A\,x + B\big)$$

$$\overline{y}''(x) = e^x \, \big(A\,x^2 + B\,x + 2\,A\,x + B + 2\,A\,x + B + 2\,A\big)$$

e quindi

$$\overline{y}'' - 4\,\overline{y}' + 3\,\overline{y} = e^x \left[x^2\,(A - 4\,A + 3\,A) + x\,(B + 4\,A - 4\,B - 8\,A + 3\,B) + 2\,B + 2\,A - 4\,B\right] =$$

$$= e^x\,(-4\,A\,x + 2\,A + 2\,B)$$

Ottengo quindi che $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $A\,, B$ verificano il sistema

$$\begin{cases} -4\,A = 1 \\ 2\,A + 2\,B = 0 \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$A = -\frac{1}{4} \quad , \quad B = \frac{1}{4}$$

Allora una soluzione é data da:

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{4}\,x\,(x-1)\,e^x$$

3. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - 2\,y' + y = x\,e^x$$

Il secondo membro é del tipo considerato con $\alpha = 1$ e $Q(x) = x$. Siccome $P(1) = 0$ e 1 é una soluzione con molteplicitá due, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = x^2\,(A\,x + B)\,e^x = e^x\,\big(A\,x^3 + B\,x^2\big)$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = e^x\,\big(A\,x^3 + B\,x^2 + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x\big)$$

$$\overline{y}''(x) = e^x\,\big(A\,x^3 + B\,x^2 + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x + 6\,A\,x + 2\,B\big)$$

e quindi

$$\overline{y}'' - 2\,\overline{y}' + \overline{y} = e^x \left[x^3\,(A - 2\,A + A) + x^2\,(B + 6\,A - 6\,A - 2\,B + B) + x\,(4\,B + 6\,A - 4\,B) + 2\,B +\right] =$$

$$= e^x\,(6\,A\,x + 2\,B)$$

Ottengo quindi che $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $A\,, B$ verificano il sistema

$$\begin{cases} 6\,A = 1 \\ 2\,B = 0 \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$A = \frac{1}{6} \quad , \quad B = 0$$

Allora una soluzione é data da:

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{6}\,x^3\,e^x$$

Osserviamo che se per errore si fosse cercata una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = x\ (A\,x + B)\ e^x = e^x\ \left(A\,x^2 + B\,x\right)$$

il calcolo non avrebbe dato alcun risultato. Infatti risulterebbe

$$\overline{y}'(x) = e^x\ \left(2\,A\,x + B + A\,x^2 + B\,x\right)$$

$$\overline{y}''(x) = e^x\ \left(2\,A\,x + B + A\,x^2 + B\,x + 2\,A + 2\,A\,x + B\right)$$

e quindi

$$\overline{y}''-2\,\overline{y}'+\overline{y} = e^x\left[x^2\,(A - 2\,A + A) + x\ (4\,A + B - 4\,A - 2\,B + B) + +2\,A + B - 2\,B\right] = e^x\,(2\,A - B)$$

Si dovrebbe avere quindi, affinché $\overline{y}$ fosse soluzione dell'equazione completa che $2\,A - B = x$. Relazione che contrasta col fatto che $A\,,B$ sono costanti.

CASO 2. Supponiamo ora di dover trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$$

quando la funzione f é del tipo

$$f(x) = Q(x)\,e^{\alpha\,x}\ \cos{(\beta\,x)}\quad (\ \textit{oppure}\ \ Q(x)\,e^{\alpha\,x}\ \sin{(\beta\,x)}$$

dove Q é un polinomio in x di grado $n \geq 0$ ed $\alpha\,,\beta \in \mathcal{R}$ sono due numeri fissati.
Vale, in questo secondo caso, la seguente regola:

- i) se $P(\alpha{+}i\,\beta) \neq 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea si puó ricercare tra le funzioni dei tipo:

  $$\overline{y}(x) = R_1(x)\,e^{\alpha\,x}\ \cos{(\beta\,x)} + R_2(x)\,e^{\alpha\,x}\ \sin{(\beta\,x)}$$

  dove $R_1\,,R_2$ sono due polinomi in x di grado n;

- ii) se $P(\alpha{+}i\,\beta) = 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea si puó ricercare tra le funzioni dei tipo:

  $$\overline{y}(x) = x\ (R_1(x)\,e^{\alpha\,x}\ \cos{(\beta\,x)} + R_2(x)\,e^{\alpha\,x}\ \sin{(\beta\,x)})$$

  dove $R_1\,,R_2$ sono ancora due polinomi in x di grado n.

Vediamo anche in questo caso alcuni esempi.
1. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' + y = \sin x$$

Il secondo membro é del tipo considerato nel caso 2 con $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $Q(x) = 1$. Siccome $P(\alpha + i\,\beta) = P(i) = 0$, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = x\ (A\ \cos x + B\ \sin x)$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = A\ \cos x + B\ \sin x + x\,(-A\ \sin x + B\ \cos x)$$

$$\overline{y}''(x) = -A\,\sin x + B\,\cos x - A\,\sin x + B\,\cos x + x\,(-A\,\cos x - B\,\sin x)$$

e quindi

$$\overline{y}'' + \overline{y} = \cos x\,(-A\,x + 2\,B + A\,x) + \sin x(-B\,x - 2\,A + B\,x) = 2\,B\,\cos x - 2\,A\,\sin x$$

Ottengo quindi che $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $B = 0$ e $-2\,A = 1$. Allora una soluzione é data da:

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\,x\,\cos x$$

2. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' + y' = x\,\sin x$$

Il secondo membro é del tipo considerato con $\alpha = 0\,\beta = 1$ e $Q(x) = x$. Siccome $P(i) = i - 1 \neq 0$, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = (A\,x + B)\,\sin x + (C\,x + D)\,\cos x$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = A\,\sin x + (A\,x + B)\,\cos x + C\,\cos x - (C\,x + D)\,\sin x$$
$$\overline{y}''(x) = 2\,A\,\cos x - (A\,x + B)\,\sin x - 2\,C\,\sin x - (C\,x + D)\,\cos x$$

e quindi

$$\overline{y}'' + \overline{y}' = \cos x\,[2\,A - c\,x - D + A\,x + B + C] + \sin x\,[-A\,x - B - 2\,C + A - C\,x - D]$$

Ottengo quindi che $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $A\,,B\,,C\,,D$ verificano il sistema

$$\begin{cases} A - C = 0 \\ 2\,A - D + B + C = 0 \\ -A - C = 1 \\ B - 2\,C - D = 0 \end{cases}$$

Ora, sommando la prima e la terza equazione si ottiene $-2\,C = 1$ e quindi $C = -\frac{1}{2}$ e $A = C = -\frac{1}{2}$. Infine dalla seconda e quarta equazione, ottengo:

$$\begin{cases} -1 - D + B - \frac{1}{2} = 0 \\ -B + 1 - \frac{1}{2} - D = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B - D = \frac{3}{2} \\ B + D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ottiene dunque $B = 1$ e $D = -\frac{1}{2}$ Allora una soluzione é data da:

$$\overline{y}(x) = \left(-\frac{1}{2}\,x + 1\right)\,\sin x + \left(-\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\right)\,\cos x$$

3. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2\,y' + 2\,y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Il polinomio associato all'equazione differenziale é $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 2 = 0$ che ammette le due soluzioni complesse $1 \mp i$. Una soluzione particolare é dunque del tipo

$$\overline{y}(x) = A\,\sin x + B\,\cos x$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = A\,\cos x - B\,\sin x$$

$$\overline{y}''(x) = -A\,\sin x - B\,\cos x$$

e quindi

$$\overline{y}'' - 2\,\overline{y}' + 2\,\overline{y} = \sin x\,[-A + 2\,B + 2\,A] + \cos x\,[-B - 2\,A + 2\,B]$$

Ottengo quindi che $\overline{y}$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $A\,,B$ verificano il sistema

$$\begin{cases} 2\,B + A = 1 \\ B - 2\,A = 0 \end{cases}$$

Ne deriva che $A = 1 - 2\,B$ e quindi $B - 2 + 4\,B = 0$. Ossia $B = \frac{2}{5}$ e quindi $A = \frac{1}{5}$. Allora una soluzione particolare é data da:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{5}\,\sin x + \frac{2}{5}\,\cos x$$

Possiamo quindi concludere che l'integrale generale dell'equazione considerata é dato dalla famiglia di funzioni

$$y(x) = \frac{1}{5}\,\sin x + \frac{2}{5}\,\cos x + A\,e^x\,\sin x + B\,e^x\,\cos x$$

Osservando infine che

$$y'(x) = \frac{1}{5}\,\cos x - \frac{2}{5}\,\sin x + e^x\,\left(A\,\sin x + B\,\cos x + A, \cos x - B\,\sin x\right)$$

e quindi le condizioni iniziali sono verificate se

$$y(0) = \frac{2}{5} + B = 0 \qquad y'(0) = \frac{1}{5} + B + A = 1$$

Ossia $B = -\frac{2}{5}$ e $A = 1 + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy cercata é data dalla funzione:

$$y(x) = \frac{1}{5}\,\sin x + \frac{2}{5}\,\cos x + \frac{6}{5}\,e^x\,\sin x - \frac{2}{5}\,e^x\,\cos x$$

4. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' + 4\,y = \sin^2 x$$

Osserviamo che risulta

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos{(2\,x)}}{2}$$

e quindi se $\overline{y}_1$ é soluzione dell'equazione

$$y'' + 4\,y = \frac{1}{2}$$

e $\overline{y}_2$ é soluzione della seconda equazione

$$y'' + 4\,y = -\frac{1}{2}\,\cos{(2\,x)}$$

allora la funzione somma

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x)$$

é soluzione dell'equazione differenziale iniziale.
Consideriamo dunque la prima equazione. Una soluzione particolare é del tipo $\overline{y}_1(x) = A$, se la costante A verifica la condizione $4\,A = \frac{1}{2}$, ossia se $A = \frac{1}{8}$.
D'altra parte una soluzione particolare della seconda equazione, essendo $P(2\,i) = 0$, é del tipo

$$\overline{y}_2(x) = x\ (A\ \cos(2\,x) + B\ \sin(2\,x))$$

Risulta

$$\overline{y}_2'(x) = A\ \cos(2\,x) + B\ \sin(2\,x) + x\ (-2\,A\ \sin(2\,x) + 2\,B\ \cos(2\,x))$$

$$\overline{y}_2''(x) = -2\,A\ \sin(2\,x) + 2\,B\ \cos(2\,x) - 2\,A\ \sin(2\,x) + 2\,B\ \cos(2\,x) + x\ \ (-4\,A\ \cos(2\,x) - 4\,B\ \sin(2\,x))$$

e quindi

$$\overline{y}_2'' + 4\overline{y}_2 = \sin(2\,x)\,[x\ (-4\,B + 4\,B) - 4\,A + 4\,B] + \cos(2\,x)\,[x\ (-4\,A + 4\,A) + 4\,B + 4\,A]$$

Ottengo quindi che $\overline{y}_2$ é una soluzione dell'equazione completa se e solo se $A\,,B$ verificano il sistema

$$\begin{cases} -4\,A + 4\,B = 0 \\ 4\,A + 4\,B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ne deriva quindi che

$$A = -\frac{1}{16}\quad,\quad B = A = -\frac{1}{16}$$

Allora una soluzione particolare dell'equazione iniziale é data da:

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\,(\cos(2\,x) + \sin(2\,x))$$

CASO 3 Consideriamo in questo paragrafo il caso di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, ossia un'equazione del tipo :

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$$

qundo il secondo membro f ha una espressione analitica diversa da quella considerata nei precedenti due casi (CASO 1 e CASO 2). Proviamo ora il seguente :

Teorema : Metodo della variazione delle costanti Data un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea del tipo :

$$y'' + a\,y' + b = f(x)$$

siano $y_1\,,y_2$ le due soluzioni dell'omogenea associata che abbiamo trovato in precedenza. Allora se $A(x)\,,B(x)$ sono due funzioni derivabili le cui derivate prime A' e B' verificano il sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\,y_1(x) + B'(x)\,y_2(x) = 0 \\ A'(x)\,y_1'(x) + B'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

allora la funzione:

$$\overline{y}(x) = A(x)\,y_1(x) + B(x)\,y_2(x)$$

é una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea.
Dimostrazione Si ha:

$$\overline{y}'(x) = A'(x)\,y_1(x) + B'(x)\,y_2(x) + A(x)\,y_1'(x) + B(x)\,y_2'(x) = A(x)\,y_1'(x) + B(x)\,y_2'(x)$$

(Abbiamo usato la prima equazione del sistema per semplificare la derivata prima)
La derivata seconda risulta ora:

$$\overline{y}''(x) = A'(x)\, y_1'(x) + B'(x)\, y_2'(x) + A(x)\, y_1''(x) + B(x)\, y_2''(x)$$

Pertanto

$$\overline{y}''(x) + a\,\overline{y}'(x) + b\,\overline{y}(x) = A(x)(y_1''(x) + a\, y_1'(x) + b\, y_1(x)) + B(x)(y_2''(x) + a\, y_2'(x) + b\, y_2(x)) +$$

$$+ A'(x)\, y_1'(x) + B'(x)\, y_2'(x) = A'(x)\, y_1'(x) + B'(x)\, y_2'(x) = f(x)$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'' + y' - 2\,y = \frac{1}{1+e^x}$$

Il polinomio associato all'equazione é $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ che ha le due soluzioni

$$\lambda_{1\,,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Allora la funzione

$$\overline{y}(x) = A(x)\, e^{-2\,x} + B(x)\, e^x$$

é soluzione dell'equazione se A' e B' sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\, e^{-2\,x} + B'(x)\, e^x = 0 \\ \\ -2\, A'(x)\, e^{-2\,x} + B'(x)\, e^x = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Dalla prima equazione, si ricava $A' = -B'\, e^{3\,x}$ e quindi

$$2\, B'\, e^x + B'\, e^x = \frac{1}{1+e^x}$$

e quindi

$$B'(x) = \frac{1}{3}\ \frac{e^{-x}}{1+e^x} \quad , \quad A'(x) = -\frac{1}{3}\ \frac{e^{2\,x}}{1+e^x}$$

Usando ora la sostituzione $e^t = s$ ossia $t = \log s$, ottengo

$$\int_0^x \frac{e^{2\,t}}{1+e^t}\, dt = \int_1^{e^x} \frac{s^2}{1+s}\, \frac{1}{s}\, ds = \int_1^{e^x} \frac{s}{1+s}\, ds =$$

$$= \int_1^{e^x} \left(1 - \frac{1}{1+s}\right) ds = (s - \log(1+s))\Big|_1^{e^x}$$

Ne deriva quindi che possiamo prendere

$$A(x) = -\frac{1}{3}\, [e^x - \log(1+e^x)]$$

Analogamente usando la sostituzione $e^{-t} = s$ ossia $t = -\log s$, ottengo

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^t}\, dt = \int_1^{e^{-x}} \frac{s}{1+1/s} \left(-\frac{1}{s}\right) ds = -\int_1^{e^{-x}} \frac{s}{1+s}\, ds =$$

$$= \int_1^{e^{-x}} \left(1 - \frac{1}{1+s}\right) ds = \left(s - \log(1+s)\right)\Big|_1^{e^{-x}}$$

Ne deriva quindi che possiamo prendere

$$B(x) = -\frac{1}{3}\left[e^{-x} - \log\left(1+e^{-x}\right)\right]$$

Pertanto otengo la soluzione

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{3}\left[e^x - \log(1+e^x)\right] e^{-2\,x} - \frac{1}{3}\left[e^{-x} - \log\left(1+e^{-x}\right)\right] e^x$$

2. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'' + y = \tan x$$

Il polinomio associato all'equazione é $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ che ha le due soluzioni $\lambda_{1\,,2} = \pm\, i$. Allora la funzione

$$\overline{y}(x) = A(x)\, \sin x + B(x)\, \cos x$$

é soluzione dell'equazione se A' e B' sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\, \sin x + B'(x)\, \cos x = 0 \\[2ex] A'(x)\, \cos x - B'(x)\, \sin x = \tan x \end{cases}$$

Dalla prima equazione, si ricava $A' = -B'\, \frac{\cos x}{\sin x}$ e quindi

$$-B'\, \frac{\cos^2 x}{\sin x} - B'\, \sin x = \tan x$$

e quindi

$$B'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad , \quad A'(x) = \sin x$$

Pertanto $A(x) = -\cos x$. Per ottenere B, osserviamo in primo luogo che

$$B'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x} + \cos x$$

D'altra parte, usando la sostituzione $\tan(t/2) = s$ ossia $t = 2\, \arctan s$, ottengo

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t}\, dt = \int_0^{\tan(t/2)} \frac{1+s^2}{1-s^2}\, \frac{2}{1+s^2}\, dt = -2\int_0^{\tan(t/2)} \frac{1}{s^2-1}\, dt$$

Usando infine la decomposizione

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$

posso concludere che

$$B(x) = \sin x + \log \left| \frac{\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 1} \right|$$

Otteniamo quindi che

$$\overline{y}(x) = -\sin x \, \cos x + \sin x \, \cos x + \log \left| \frac{\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 1} \right| \cos x = \log \left| \frac{\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 1} \right| \cos x$$

3. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'' - y' - 2\,y = x^2$$

Il polinomio associato é $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Allora $\Delta = 1 + 8 = 9$ e quindi l'equazione $P(\lambda) = 0$ ammette le due radici distinte :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \mp 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Pertanto due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono :

$$y_1(x) = e^{-x} \quad , \quad y_2(x) = e^{2x}$$

Volendo applicare il metodo della variazione delle costanti considero il sistema :

$$\begin{cases} A'(x)\, e^{-x} + B'(x)\, e^{2\,x} = 0 \\ -A'(x)\, e^{-x} + 2\, B'(x)\, e^{2\,x} = x^2 \end{cases}$$

Si ricava quindi

$$B'(x) = \frac{1}{3}\, x^2\, e^{-2\,x} \qquad A'(x) = -\frac{1}{3}\, x^2\, e^x$$

Integrando per parti si ottiene infine :

$$A(x) = -\frac{1}{3} \int_0^x t^2\, e^t\, dt = -\frac{1}{3} \left[x^2\, e^x - 2 \int_0^x t\, e^t\, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} \left[x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2 \int_0^x e^t\, dt \right] = -\frac{1}{3} \left[x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2(e^x - 1) \right]$$

Analogamente si ottiene

$$B(x) = \frac{1}{3} \int_0^x t^2 e^{-2\,t}\, dt = \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2\, e^{-2\,x}}{2} - \frac{x\, e^{-2\,x}}{2} + \frac{1}{2}\, \frac{1 - e^{-2\,x}}{2} \right)$$

Una soluzione particolare dell'equazione differenziale é data dunque dalla funzione :

$$\overline{y}(x) = A(x)\, e^{-x} + B(x)\, e^{2\,x} = -\frac{1}{3} \left(x^2 - 2\,x + 2 - e^{-x} \right) + \frac{1}{6} \left(-x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{2\,x} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2}\, x - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}\, e^{-x} + \frac{1}{12}\, e^{2\,x}$$

Da notare che si poteva anche usare il metodo considerato nel CASO 1 e ottenere una soluzione particolare con un calcolo piú semplice. Infatti se ricerchiamo una soluzione del tipo

$$\overline{y}(x) = A\, x^2 + B\, x + C$$

otteniamo

$$\overline{y}'(x) = 2\,A\,x + B \quad e \quad \overline{y}''(x) = 2\,A$$

Pertanto

$$\overline{y}''(x) - \overline{y}'(x) - 2\,\overline{y}(x) = 2\,A - 2\,A\,x - B - 2\,A\,x^2 - 2\,B\,x - 2\,C$$

e quindi devono essere verificate le condizioni

$$A = -\frac{1}{2} \;\;,\;\; -2\,A - 2\,B = 0 \;\;,\;\; 2\,A - B - 2\,C = 0$$

e quindi

$$A = -\frac{1}{2} \;\;,\;\; B = \frac{1}{2} \;\;,\;\; C = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

Otteniamo quindi la soluzione

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{4}$$

10.7 Alcuni esercizi di ripasso

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2}{2\,y+1} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione considerata é a variabili separabili. Ottengo:

$$(2\,y + 1)\;y' = x^2 \;\; e \;\; quindi \;\; \left(y^2 + y\right)' = x^2$$

Ne deriva quindi che

$$y^2(x) + y(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

Ora, dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ otteniamo che la costante deve essere zero. Risolvendo infine rispetto a y e considerando solo la soluzione che verifica la condizione $y(0) = 0$, otteniamo:

$$y(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{3}\,x^3} - 1}{2}$$

2. Trovare una soluzione dell'equazione:

$$y' - 2\,y = \sin x$$

L'equazione considerata é del primo ordine lineare. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $e^{-2\,x}$, si ottiene:

$$e^{-2\,x}\,(y'(x) - 2\,y(x)) = \left(e^{-2\,x}\,y(x)\right)' = e^{-2\,x}\sin x$$

e quindi

$$e^{-2\,x}\,y(x) = c + \int_0^x e^{-2\,t}\sin t\,dt$$

D'altra partner, integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^x e^{-2\,t}\sin t\,dt = -\frac{e^{-2\,t}}{2}\,\sin t\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2\,t}\cos t\,dt =$$

$$= -\frac{e^{-2\,x}}{2}\,\sin x + \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2\,t}}{2}\,\cos t\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2\,t}\,\sin t\,dt\right)$$

Se ne conclude che

$$\int_0^x e^{-2\,t}\,\sin t\,dt = \frac{4}{5}\left(-\frac{e^{-2\,x}}{2}\,\sin x - \frac{e^{-2\,x}}{4}\,\cos x + \frac{1}{4}\right)$$

Otteniamo quindi che

$$y(x) = c\,e^{2\,x} - \frac{4}{5}\left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\cos x}{4}\right)$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4\,y = \cos(2\,x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che una soluzione particolare dell'equazione considerata la possiamo ricercare tra le funzioni del tipo:

$$\overline{y}(x) = x\,\left(A\,\cos(2\,x) + B\,\sin(2\,x)\right)$$

Infatti risulta

$$\overline{y}'(x) = (A\,\cos(2\,x) + B\,\sin(2\,x)) + x\,(-2\,A\,\sin(2\,x) + 2\,B\,\cos(2\,x))$$

$$\overline{y}''(x) = (-4\,A\,\sin(2\,x) + 4\,B\,\cos(2\,x)) + x\,(-4\,A\,\cos(2\,x) - 4\,B\,\sin(2\,x))$$

Otteniamo infine

$$\overline{y}''(x) + 4\,\overline{y}(x) = \sin(2\,x)\,[x\,(-4\,B + 4\,B) - 4\,A + 4\,B] + \cos(2\,x)\,[x\,(-4\,A + 4\,A) + 4\,B + 4\,A]$$

Pertanto l'equazione sará verificata se e solo se A, B verificano il sistema:

$$\begin{cases} -4\,A + 4\,B = 0 \\ 4\,B + 4\,A = 1 \end{cases}$$

ossia $A = B = \frac{1}{2}$. Allora l'itegrale generale é dato dalla famiglia di funzioni

$$y(x) = A\,\sin(2\,x) + B\,\cos(2\,x) + \frac{1}{2}\,x\,(\sin(2\,x) + \cos(2\,x))$$

Essendo infine

$$y'(x) = 2\,A\,\cos(2\,x) - 2\,B\,\sin(2\,x) + \frac{1}{2}\,(\sin(2\,x) + \cos(2\,x) + \frac{1}{2}\,x\,(2\,\cos(2\,x) - 2\,\sin(2\,x))$$

le condizioni iniziali portano alle condizioni $y(0) = B = 1\,, 2\,A + \frac{1}{2} = 2$ ossia $A = \frac{3}{4}$. Pertanto la soluzione del Problema di Cauchy cercata é:

$$y(x) = \frac{3}{4}\,\sin(2\,x) + \cos(2\,x) + \frac{1}{2}\,x\,(\sin(2\,x) + \cos(2\,x))$$

4. Trovare una soluzione dell'equazione:

$$y'' - y = \log\left(1 + e^x\right)$$

Applicando il metodo della variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\overline{y}(x) = A(x)\, e^x + B(x)\, e^{-x}$$

dove $A\,, B$ si ricavano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\, e^x + B'(x)\, e^{-x} = 0 \\ \\ A'(x)\, e^x - B'(x)\, e^{-x} = \log\left(1 + e^x\right) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} B'(x) = -\frac{1}{2}\, e^x\, \log\left(1 + e^x\right) \\ \\ A'(x) = \frac{1}{2}\, e^{-x}\, \log\left(1 + e^x\right) \end{cases}$$

Usando ora la sostituzione $t = \log s$, otteniamo

$$\int_0^x e^{-t} \log\left(1 + e^t\right) dt = \int_1^{e^x} \frac{\log\left(1 + s\right)}{s^2}\, ds =$$

$$= -\frac{\log\left(1+s\right)}{s}\bigg|_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{ds}{s\left(1+s\right)} = -\frac{\log\left(1+s\right)}{s} + \log\left(\frac{s}{1+s}\right)\bigg|_1^{e^x}$$

Possiamo quindi prendere

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - e^{-x}\, \log\left(1 + e^x\right)\right)$$

Analogamente, otteniamo:

$$\int_0^x e^t \log\left(1 + e^t\right) dt = \int_1^{e^x} \log\left(1 + s\right) ds =$$

$$= s\, \log\left(1 + s\right)\big|_1^{e^x} - \int_1^{e^x} \frac{s}{1+s} = s\, \log\left(1+s\right) - \left(s - \log\left(1+s\right)\right)\big|_1^{e^x}$$

Possiamo quindi prendere

$$B(x) = -\frac{1}{2}\left(e^x\, \log\left(1 + e^x\right) - e^x + \log\left(1 + e^x\right)\right)$$

5. Trovare una soluzione dell'equazione

$$y'' - y' - 2\,y = x\, e^{2\,x}$$

Il polinomio associato all'equazione differenziale ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$ e quindi una soluzione dell'equazione considerata si puó trovare tra le funzioni del tipo

$$\overline{y}(x) = x\, \left(A\,x + B\right)\, e^{2\,x} = \left(A\,x^2 + B\,x\right)\, e^{2\,x}$$

Risulta

$$\overline{y}'(x) = \left(2\,A\,x^2 + 2\,B\,x + 2\,A\,x + 2\,B\right)\ e^{2\,x}$$

$$\overline{y}''(x) = \left(4\,A\,x^2 + 4\,B\,x + 4\,A\,x + 2\,B + 4\,A\,x + 2\,B + 2\,A\right)\ e^{2\,x}$$

Pertanto si ottiene

$$\overline{y}''(x) - \overline{y}'(x) - 2\,\overline{y}(x) = e^{2\,x}\ \left[x^2\ (4\,A - 2\,A - 2\,A) + \right.$$

$$\left. + x\ (4\,B + 8\,A - 2\,B - 2\,A - 2\,B) + 2\,B + 2\,A + B\right]$$

Deve dunque essere $6\,A = 1$ e $3\,B + 2\,A = 0$ e quindi $A = \frac{1}{6}$ e $B = -\frac{1}{9}$. Pertanto otteniamo

$$\overline{y}(x) = x\ \left(\frac{1}{6}\,x - \frac{1}{9}\right)\ e^{2\,x}$$

6. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \left(y^2 - 1\right)\ 2\,x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione é a variabili separabili e quindi, con la sostituzione $y(t) = s$, ottengo

$$x^2 = \int_0^x \frac{y'(t)}{y^2(t) - 1}\,dt = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{ds}{s^2 - 1}$$

Ricordando infine che

$$\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1}\right)$$

ottengo, usando anche la condizione iniziale $y(0) = 0$:

$$x^2 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y(x) - 1}{y(x) - 1}\right|$$

e quindi, esplicitando rispetto a y:

$$y(x) = \frac{1 - e^{2\,x^2}}{1 + e^{2\,x^2}}$$

7. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - (\sin x)\,y = \sin(2\,x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Moltiplicando per $e^{\cos x}$, ottengo:

$$e^{\cos x}\,(y'(x) - (\sin x)\,y(x)) = e^{\cos x}\ \sin(2\,x) = 2\,e^{\cos x}\ \sin x\ \cos x$$

Usando infine la sostituzione $\sin t = s$, ottengo:

$$e^{\cos x}\,y(x) + e = 2\int_0^x e^{\cos t}\ \sin t\ \cos t\,dt = -2\int_1^{\cos x} e^s\,s\,ds =$$

$$= -2\ \left(e^s\,s - e^s\right)\Big|_1^{\cos x} = -2\ \left[e^{\cos x}\ \cos x - e^{\cos x}\right]$$

Possiamo infine concludere che

$$y(x) = -e\, e^{-\cos x} - 2\,\cos x + 2$$

8. Trovare una soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 3\,y' + 2\,y = \sqrt{1+e^x}$$

Il polinomio associato all'equazione ha come soluzioni $\lambda = -2$ e $\lambda = -1$ e quindi, usando il metodo della variazione delle costanti, posso cercare una soluzione particolare del tipo

$$\overline{y}(x) = A(x)\, e^{-2\,x} + B(x)\, e^{-x}$$

Devo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} A'(x)\, e^{-2\,x} + B'(x)e^{-x} = 0 \\ -2\,A'(x)\, e^{-2\,x} - B'(x)e^{-x} = \sqrt{1+e^x} \end{cases}$$

Ottengo allora $A' = -B'\, e^x$ e quindi $B' = e^x\,\sqrt{1+e^x}$ e $A' = -e^{2\,x}\,\sqrt{1+e^x}$. Infine, usando la sostituzione $e^t = s$ ottengo

$$\int_0^x e^{2\,t}\sqrt{1+e^t}\,dt = \int_1^{e^x} s^2\sqrt{1+s}\,ds = \int_2^{1+e^x} (v-1)^2\sqrt{v}\,dv = \int_2^{1+e^x} \left(v^{5/2} - 2\,v^{3/2} + v^{1/2}\right)\,dv$$

Possiamo quindi prendere

$$A(x) = -\frac{2}{7}\,(1+e^x)^{7/2} + \frac{4}{5}\,(1+e^x)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(1+e^x)^{3/2}$$

Analogamente

$$\int_0^x e^t\sqrt{1+e^t}\,dt = \int_1^{e^x} s\,\sqrt{1+s}\,ds = \int_2^{1+e^x} (v-1)\sqrt{v}\,dv = \int_2^{1+e^x} \left(v^{3/2} - v^{1/2}\right)\,dv$$

Possiamo quindi prendere

$$B(x) = \frac{2}{5}\,(1+e^x)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(1+e^x)^{3/2}$$

10.8 PROGRAMMA DEL CORSO

Numeri reali. Proprietá dei numeri reali: proprietá delle operazioni, proprietá dell'ordinamento e proprietá di completezza. I numeri naturali, gli interi relativi e i numeri razionali. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme di numeri reali. Proprietá caratteristiche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore. Principio di induzione. Coefficienti binomiali e binomio di Newton.

Funzioni. Generalitá sulle funzioni. Grafico di una funzione. Funzioni monotone e funzioni invertibili. Richiamo di alcune funzioni elementari: funzioni lineari, valore assoluto, funzione esponenziale e logaritmo, funzione potenza e funzioni trigonometriche.

Successioni. Definizione di limite di una successione e prime proprietá (unicitá del limite e operazioni con i limiti). Successioni convergenti e successioni limitate.Teorema del confronto. Limiti infiniti e forme indeterminate. Successioni monotone. Il numero e. Sottosuccessioni di una data successione e teorema di Bolzano-Weierstrass .

Limiti di funzioni. Definizione di limite per una funzione e prime proprietà. Limite della funzione composta. Limite destro e limite sinistro. Funzioni monotone. Alcuni limiti fondamentali.

Funzioni continue. Funzioni continue in intervalli : teorema degli zeri, teorema dei valori assunti, teorema di Weierstrass. Teorema sulla continuità della funzione inversa.

Derivate. Definizione di derivata. Propriet elementari delle funzioni derivabili e significato geometrico del concetto di derivata. Regole di derivazione della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni. Formula di derivazione della funzione composta e della funzione inversa. I teoremi di Rolle e Lagrange. I teoremi di De l'Hopital. Derivate successive. Funzioni convesse. Applicazione del calcolo differenziale allo studio del grafico di una funzione.

Integrazione. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale definito. Propriet elementari dell'integrale: linearit e propriet additiva dell'integrale. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale e formula fondamentale del calcolo integrale. Formule di integrazione per parti e per sostituzione. Integrali generalizzati.

I numeri complessi I numeri complessi in forma algebrica ed in forma trigonometrica. Radice n–esima di un numero complesso.

Equazioni differenziali. Definizioni generali. Problema di Cauchy per l'equazione $y' = f(x, y)$. Equazioni a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: polinomio associato e metodo per ottenere due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata. Ricerca di una soluzione particolare di un'equazione non omogenea: metodi semplificati nel caso di secondi membri speciali e metodo della variazione delle costanti.

Testo consigliato: Paolo Marcellini - Carlo Sbordone:" Analisi Matematica uno", Liguori Editore, Napoli, 1998.
G. Buttazzo - G. Gambini - E. Santi: " Esercizi di Analisi Matematica I ". Pitagora Editrice. Bologna. 1991.