Corso di Laurea in Informatica – Università di Ferrara
Istituzioni di Matematica, secondo modulo
Prova parziale A.A. 2014–2015 – 03/06/2015

1) Studiare la funzione
$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$$
e disegnarne il grafico.

2) Calcolare i seguenti integrali, esplicitando tutti i passaggi:
$$\text{(a)} \quad \int_0^2 x^2 \ln\bigl(x^2+4\bigr)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^2 x\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x$$

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = (x+1)\mathrm{e}^x \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

4) Trovare una soluzione dell'equazione differenziale
$$y'(x) = 1 + 4y^2(x)$$

5) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin(x)}{\tan(x)\ln(1+3x)}$$

Soluzioni e commenti

Per quanto possibile, nelle soluzioni seguenti vengono evidenziati tutti gli aspetti rilevanti e le possibili alternative (se esistono) per raggiungere il risultato. Osservazioni e commenti sono inseriti per chiarire ogni dettaglio delle scelte e dei passaggi. Nello svolgimento del compito, naturalmente, gran parte delle osservazioni qui riportate possono essere omesse, così come alcuni passaggi.

Esercizio 1

La funzione è definita ovunque tranne in zero, quindi $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dato che l'esponenziale è strettamente positiva, il segno e gli zeri di $f(x)$ dipendono solo dal segno e dagli zeri di $(x+1)$ e quindi:
$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{per } x < -1\,, \\ f(x_0) = 0 & \text{per } x_0 = -1\,, \\ f(x) > 0 & \text{per } x \in \left]-1,+\infty\right[\,\setminus\{0\}\,. \end{cases}$$

I limiti agli estremi del dominio di definizione sono:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$
e dunque l'asse delle ordinate è asintoto verticale per $f(x)$. Per cercare eventuali asintoti obliqui osserviamo che
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x} = 1^-\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x} = 1^+$$
ed inoltre
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} (\mathrm{e}^{1/x}-1)x + \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x}-1}{1/x} + \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{t\to0^\pm} \frac{\mathrm{e}^t-1}{t} + \mathrm{e}^t = 2\,.$$

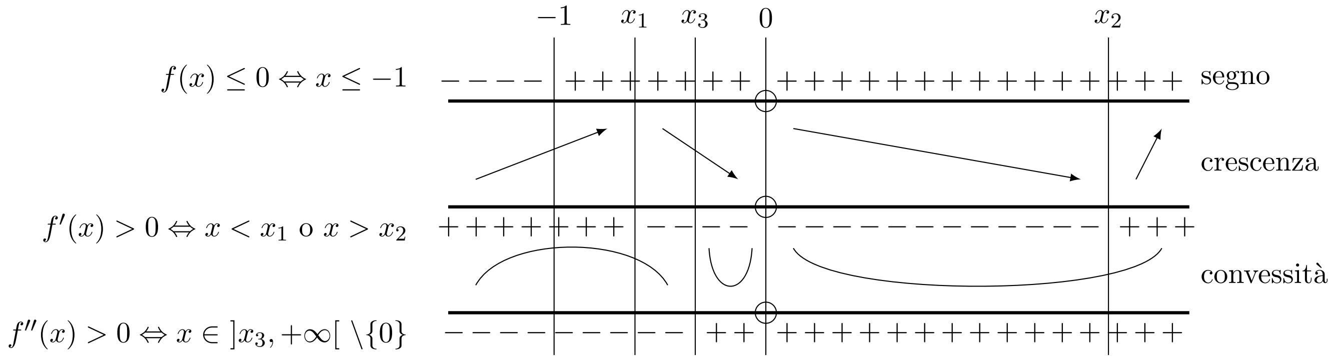

Figura 1: riepilogo delle proprietà qualitative della funzione.

Dunque la retta di equazione $y(x) = x + 2$ è asintoto obliquo di $f(x)$ sia per $x \to -\infty$, che per $x \to +\infty$.

La derivata prima della funzione (già calcolata per determinare l'asintoto obliquo) è:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

che è definita nello stesso dominio di $f(x)$, cioè $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Come per la funzione $f(x)$, il segno e gli zeri di $f'(x)$ non dipendono dal termine esponenziale. Riducendo quindi il secondo fattore ad un'unica frazione, poichè il denominatore è x^2, si ha immediatamente che $f'(x)$ si comporta come il polinomio di secondo grado $p_2(x) = x^2 - x - 1$. Il discriminante di $p_2(x)$ è $\Delta = 1 + 4 = 5$, dunque esso ammette le due radici reali e distinte $x_1 = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2 \approx -0.618 < 0$, $x_2 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618 > 0$ ed è positivo all'esterno dell'intervallo $[x_1, x_2]$. Si conclude perciò che

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{per } x \in \,]-\infty, x_1] \,\cup\, [x_2, +\infty[\\ f'(x) = 0 & \text{per } x = x_1 \text{ e } x = x_2 \\ f'(x) < 0 & \text{per } x \in \,]x_1, 0[\, \cup\, [0, x_2[\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ è crescente per } x \in \,]-\infty, x_1] \,\cup\, [x_2, +\infty[\\ f(x) \text{ è decrescente per } x \in \, [x_1, 0[\, \cup\,]0, x_2] \\ x_1 \text{ è punto di massimo relativo (non assoluto)} \\ x_2 \text{ è punto di minimo relativo (non assoluto)} \end{array}\right.$$

con $f(x_1) \approx 0.076 > 0$ e $f(x_2) \approx 4.857 > 0$. Infine, per studiare la convessità di $f(x)$ studiamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{e}^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \\ &= \mathrm{e}^{1/x}\,\frac{-x^2 + x + 1 + x^2 + 2x}{x^4} = \mathrm{e}^{1/x}\,\frac{3x + 1}{x^4}\,. \end{aligned}$$

Dunque, zeri e segno della derivata seconda dipendono solo la termine lineare $3x + 1$, da cui si ha

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) < 0 & \text{per } x \in \,]-\infty, -1/3[\\ f''(x_3) = 0 & \text{per } x_3 = -1/3 \\ f''(x) > 0 & \text{per } x \in \,]-1/3, 0[\, \cup\,]0, +\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ è concava per } x \in \,]-\infty, -1/3[\\ f(x) \text{ è covessa per } x \in \,]-1/3, 0[\, \cup\,]0, +\infty[\\ x_3 = -1/3 \text{ è punto di flesso} \end{array}\right.$$

con $x_1 < x_3 < 0$, $f(x_3) \approx 0.033$ e $f'(x_3) \approx -0.250$. Possiamo notare che $f''(x_1) < 0$ ed $f''(x_2) > 0$, le quali confermano che x_1 è punto di massimo relativo e x_2 è punto di minimo relativo. Il carattere della funzione è riassunto in figura 1. Il grafico qualitativo di $f(x)$ è mostrato in figura 2.

Esercizio 2a

Procediamo integrando per parti:

$$\int_0^2 x^2 \ln\left(x^2 + 4\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 4\right)\right]_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 x^3\,\frac{2x}{x^2 + 4}\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln(8) - \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{x^4}{x^2 + 4}\mathrm{d}x\,.$$

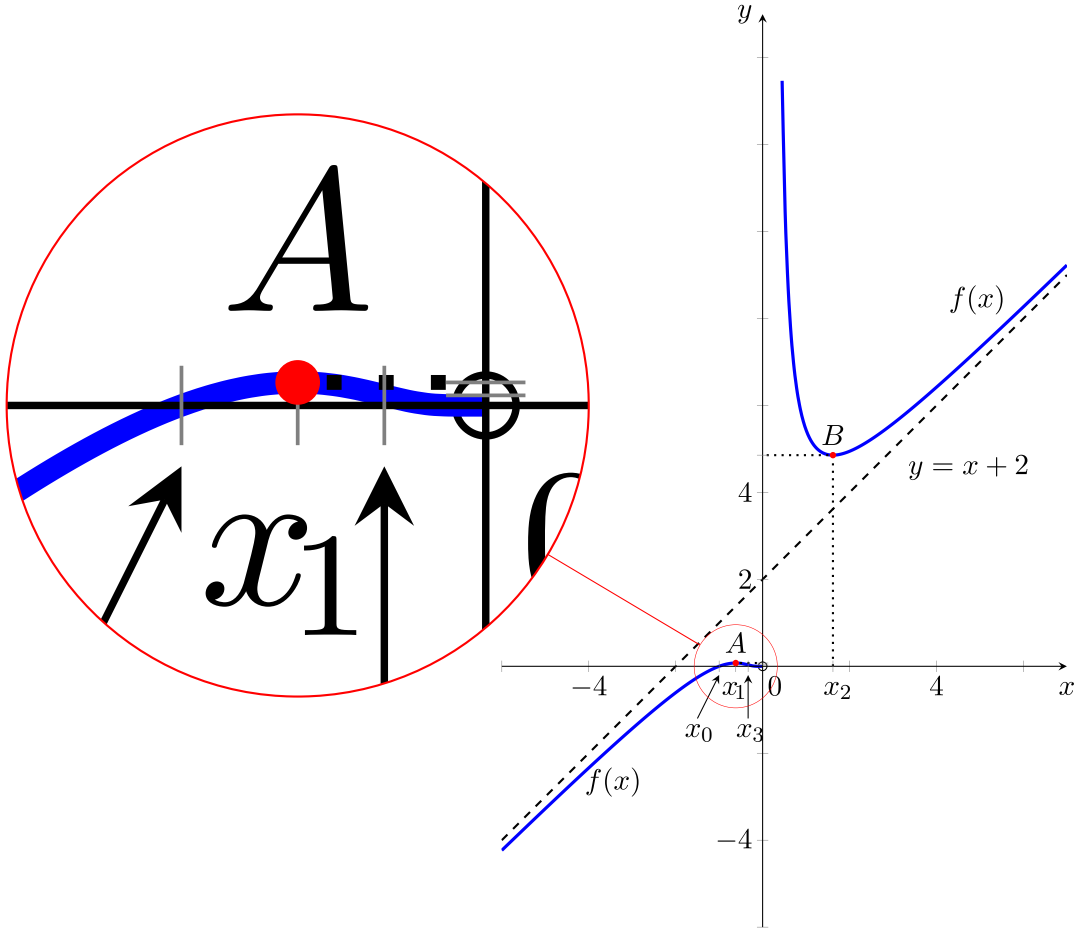

Figura 2: grafico della funzione dell'esercizio 1. Sono evidenziati il massimo relativo A, il minimo relativo B, l'asintoto obliquo $y = x + 2$ (l'altro è l'asse delle ordinate), l'unico zero $x_0 = -1$ di $f(x)$ e il punto di flesso x_3.

È immediato verificare che $x^4 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) + 16$ (eventualmente operando la divisione di polinomi fra x^4 e $x^2 + 4$), dunque

$$\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4} \mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - 4)\mathrm{d}x + 16 \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2 + 16 \int_0^2 \frac{1}{4(1 + (x/2)^2)} \mathrm{d}x$$

$$\overset{x/2=t}{=} -\frac{16}{3} + 4 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} 2\mathrm{d}t = -\frac{16}{3} + 8\Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = -\frac{16}{3} + 8\frac{\pi}{4} = -\frac{16}{3} + 2\pi\,.$$

Tornando quindi all'integrale di partenza si ottiene:

$$\int_0^2 x^2 \ln\big(x^2 + 4\big)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ln(8) - \frac{2}{3}\left(-\frac{16}{3} + 2\pi\right) = \frac{4}{3}\left(2\ln(8) + \frac{8}{3} - \pi\right)\,.$$

Esercizio 2b

Procediamo osservando che il radicando dell'integranda è $2x - x^2$ e completiamo questo polinomio di secondo grado in un quadrato: $2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$. Ora operiamo la sostituzione $t = x - 1$, da cui $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $x = t + 1$, $t = -1$ per $x = 0$ e $t = 1$ per $x = 2$. Dunque

$$\int_0^2 x\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\sqrt{1 - (x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora, con la sostituzione $t = \sin(z)$, $z \in [-\pi/2, \pi/2]$, da cui $\mathrm{d}t = \cos(z)\mathrm{d}z$, $z = -\pi/2$ per $t = -1$, $z = \pi/2$ per $t = 1$, si ha immediatamente che

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(z)}\,\cos(z)\mathrm{d}z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(z)\mathrm{d}z\,.$$

Dalla formula di duplicazione per il coseno si ha $\cos^2(z) = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$, da cui discende che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(1+\cos(2z)\big)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{2}\sin(2z)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\,.$$

Inoltre, con la stessa sostituzione $t = \sin(z)$ si ha anche

$$\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(z)\cos^2(z)\mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(z)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0\,.$$

Si conclude allora che

$$\int_0^2 x\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Osservazione 1. Si può anche notare che la funzione integranda $\cos^2(z)\sin(z)$ è una funzione antisimmetrica (cioè è tale che $f(-z) = -f(z)$) integrata su un intervallo simmetrico rispetto all'origine: allora l'integrale su tale intervallo vale zero.

Osservazione 2. Alternativamente, notando che

$$t\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2}\Big((1-t^2)^{1/2}(-2t)\Big) = -\frac{1}{2}\,g^{\alpha}(t)g'(t) \qquad \text{con} \quad g(t) = 1-t^2 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{1}{2}\,,$$

poichè una primitiva di $g^{\alpha}(t)g'(t)$ è $\dfrac{1}{\alpha+1}g^{\alpha+1}(t)$, si ha immediatamente che

$$\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\Big(1-t^2\Big)^{3/2}\right]_{-1}^{1} = 0\,.$$

Esercizio 3

Si tratta di una EDO del second'ordine, lineare, a coefficienti costanti, in forma normale, non omogenea, in cui il termine $f(x)$ a secondo membro è della forma $Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ con $Q(x) = x+1$, $\deg\big(Q(x)\big) = 1$ e $\alpha = 1$.

Il polinomio quadratico associato all'equazione differenziale è $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$. Possiamo certamente studiare $P(\lambda)$ attraverso il suo discriminante, ma in questo caso possiamo determinare molto facilmente le sue radici trovando due numeri reali tali che il loro prodotto valga 3 (l'opposto del coefficiente costante di $P(\lambda)$) e la loro somma valga -2 (l'opposto del coefficiente del termine lineare di $P(\lambda)$): essi sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$. Pertanto $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = (\lambda-1)(\lambda+3)$.

Osserviamo che l'esistenza delle due radici reali e distinte λ_1 e λ_2 implica che il discriminante di $P(\lambda)$ è positivo.

Le due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono quindi

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{-3x}\,.$$

Dato che $P(\alpha) = P(1) = 0$ (perchè $\alpha = \lambda_1$), cerchiamo per l'equazione non omogenea una soluzione particolare della forma $\widetilde{y}(x) = xR_1(x)\mathrm{e}^x$ con $R_1(x) = Ax + B$ un polinomio di primo grado. Calcoliamo le derivate di $\widetilde{y}(x)$:

$$\widetilde{y}\,'(x) = x(Ax+B)\mathrm{e}^x + (2Ax+B)\mathrm{e}^x = \big(Ax^2 + (2A+B)x + B\big)\mathrm{e}^x$$
$$\widetilde{y}\,''(x) = \big(Ax^2 + (2A+B)x + B\big)\mathrm{e}^x + (2Ax+2A+B)\mathrm{e}^x = \big(Ax^2 + (4A+B)x + 2(A+B)\big)\mathrm{e}^x$$

Sostituendo ora $\widetilde{y}(x)$ e le sue derivate nel mebro sinistro dell'EDO si ottiene:

$$\begin{aligned}\widetilde{y}''(x) &+ 2\widetilde{y}'(x) - 3\widetilde{y}(x) = \\ &= \big(Ax^2 + (4A+B)x + 2(A+B)\big)e^x + 2\big(Ax^2 + (2A+B)x + B\big)e^x - 3x(Ax+B)e^x \\ &= \big(8Ax + (2A+4B)\big)e^x\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\widetilde{y}''(x) + 2\widetilde{y}'(x) - 3\widetilde{y}(x) = (x+1)e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \big(8Ax + (2A+4B)\big)e^x = (x+1)e^x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 1 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/8 \\ B = 3/16 \end{cases}\end{aligned}$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \frac{x}{8}\left(x + \frac{3}{2}\right)e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-3x} \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \dfrac{3}{16} + c_1 - 3c_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 1 - 4c_2 = 1 - \dfrac{3}{16} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 61/64 \\ c_2 = 3/64 \end{cases}$$

Se ne conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y^*(x) = \frac{x}{8}\left(x + \frac{3}{2} + \frac{61}{64}\right)e^x + \frac{3}{64}e^{-3x} = \frac{x}{8}\left(x + \frac{157}{64}\right)e^x + \frac{3}{64}e^{-3x}\,.$$

Esercizio 4

L'equazione è una EDO del prim'ordine non lineare a variabili separabili, in cui le due funzioni $a(x)$, funzione della sola x, e $b(y)$, funzione della sola y, sono $a(x) = 1$ e $b(y) = 1 + 4y^2$, rispettivamente. Poich'e $1 + 4y^2(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, possiamo applicare il metodo standard e riscrivere l'equazione differenziale nella forma

$$\frac{y'(x)}{1 + 4y^2(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{1 + 4y^2(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} dt\,.$$

Applicando ora l'usuale cambiamento di variabile $s = y(x)$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{1 + (2s)^2}\,ds = \Big[t\Big]_{x_0}^{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\arctan(2s)\right]_{y(x_0)}^{y(x)} = x - x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\arctan\big(2y(x)\big) = x - x_0 + \frac{1}{2}\arctan\big(2y(x_0)\big)\end{aligned}$$

da cui, posto $d = x_0 - (1/2)\arctan\big(2y(x_0)\big)$, si ottiene

$$\arctan\big(2y(x)\big) = 2(x - d) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}\tan\big(2(x-d)\big) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 5

Il limite è nella forma indeterminata 0/0. Numeratore e denominatore sono entrambi funzioni derivabili in un introno di zero (come composte di funzioni derivabili in zero), quindi possiamo applicare il teorema di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin(x)}{\tan(x)\ln(1+3x)} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1/\sqrt{1-x^2}}{\dfrac{1}{\cos^2(x)}\ln(1+3x) + \tan(x)\dfrac{3}{1+3x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\big(\sqrt{1-x^2} - 1\big)\cos^2(x)(1+3x)}{\Big((1+3x)\ln(1+3x) + 3\sin(x)\cos(x)\Big)\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

che è ancora nella forma indeterminata 0/0. Applichiamo nuovamente la regola e, per comodità di scrittura, calcoliamo separatamente la derivata del numeratore e quella del denominatore:

$$\begin{aligned}\Big(\big(\sqrt{1-x^2}-1\big)\cos^2(x)(1+3x)\Big)' &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2(x)(1+3x) \\ &\quad - \big(\sqrt{1-x^2}-1\big)2\cos(x)\sin(x)(1+3x) \\ &\quad + 3\big(\sqrt{1-x^2}-1\big)\cos^2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big(\Big((1+3x)\ln(1+3x)+3\sin(x)\cos(x)\Big)\sqrt{1-x^2}\Big)' &= \Big(3\ln(1+3x)+3+3\cos^2(x)-3\sin^2(x)\Big)\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + \Big((1+3x)\ln(1+3x)+3\sin(x)\cos(x)\Big)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2(x)(1+3x)=0\,,\\ &\lim_{x\to 0}\big(\sqrt{1-x^2}-1\big)2\cos(x)\sin(x)(1+3x)=0\,,\\ &\lim_{x\to 0}3\big(\sqrt{1-x^2}-1\big)\cos^2(x)=0\,,\end{aligned}$$

dunque per $x\to 0$ il numeratore tende a 0. Inoltre

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\Big(3\ln(1+3x)+3+3\cos^2(x)-3\sin^2(x)\Big)\sqrt{1-x^2}=6\,,\\ &\lim_{x\to 0}\Big((1+3x)\ln(1+3x)+3\sin(x)\cos(x)\Big)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0\,,\end{aligned}$$

quindi per $x\to 0$ il denominatore tende a 6. Se ne conclude che

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin(x)}{\tan(x)\ln(1+3x)}=0\,.$$