Nome, Cognome ..........................................................................

Matricola ..........................................................................

**ISTITUZIONI DI MATEMATICA**
**– I PARZIALE 23/11/2018 –**

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A.A. 2018/2019

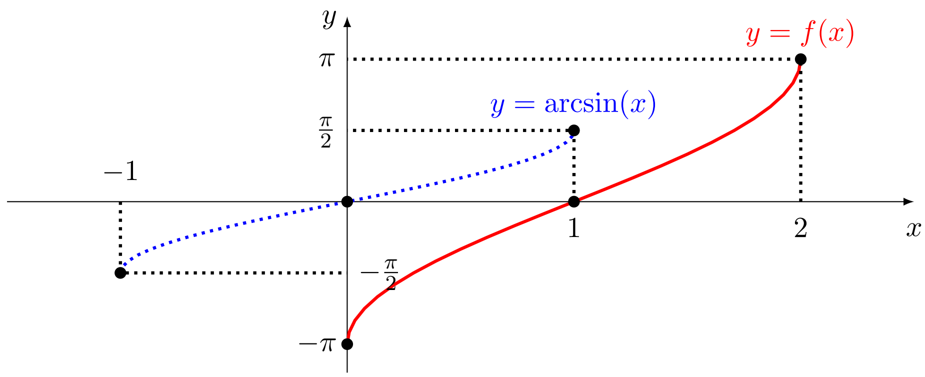
Prima di svolgere gli esercizi **leggere** con attenzione il testo. Scrivere le risposte motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e **leggibile** le cose che si fanno. Scrivere **nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio** che si intende consegnare al termine dell'esame, **compreso questo** (il testo del compito).

**Esercizio 1** (5 punti)**.** *Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni*

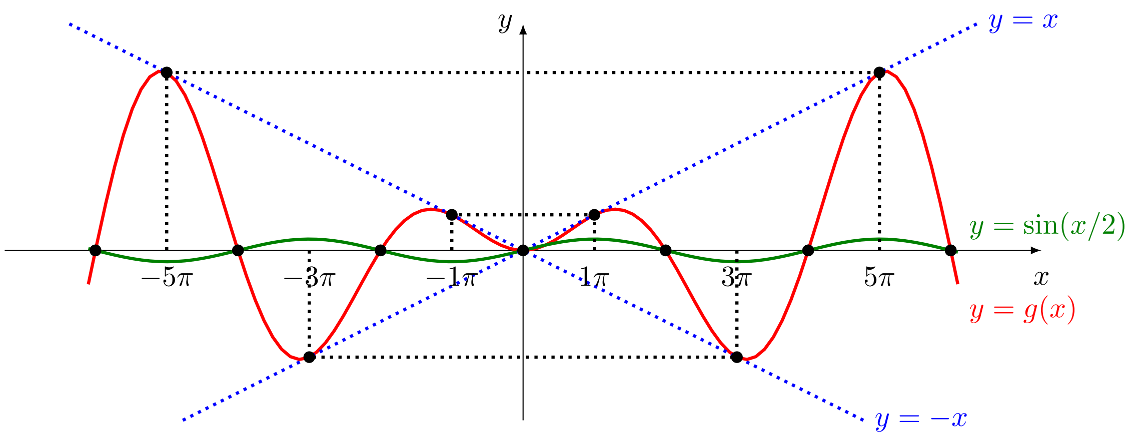
$$f(x) = 2\arcsin(x-1), \qquad g(x) = x \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

*specificandone dominio ed immagine.*

Il dominio di $f$ è $[0,2]$ e la sua immagine è $[-\pi,\pi]$.




Il dominio di $g$ è $\mathbb{R}$ e la sua immagine è $\mathbb{R}$.




**Esercizio 2** (5 punti)**.** *Dimostrare, **<u>usando la definizione di limite</u>**, che*

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty.$$

$(a)$ Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo una $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon \qquad \forall n > N. \tag{$*$}$$

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$1+\frac{1}{n} > 1 \Longrightarrow \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0 \Longrightarrow \left|\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

e quindi

$$(*) \iff \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \varepsilon \iff 1+\frac{1}{n} < e^{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} < \underbrace{e^{\varepsilon}-1}_{>0} \iff n > \frac{1}{e^{\varepsilon}-1}.$$

Possiamo dunque prendere

$$N = \left[\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right].$$

$(b)$ Fissato $M > 0$, cerchiamo una $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^2+1}{n+1} > M \qquad \forall n > N. \tag{$**$}$$

Osserviamo che

$$(**) \iff n^2+1 > M(n+1) \iff n^2 - M\,n + 1 - M > 0.$$

Vediamo quando l'equazione di secondo grado

$$n^2 - M\,n + 1 - M = 0 \tag{$***$}$$

ha il delta che si annulla:

$$\Delta = M^2 + 4M - 4 = 0 \iff M = -2 \pm \sqrt{4+4} = 2\big(-1 \pm \sqrt{2}\big).$$

Non è limitativo assumere che $M > 2\big(-1+\sqrt{2}\big)$. In tal caso $\Delta > 0$ e le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $(***)$ sono

$$n_1 = \frac{M - \sqrt{M^2+4M-4}}{2}, \qquad n_2 = \frac{M + \sqrt{M^2+4M-4}}{2},$$

Possiamo dunque prendere

$$N = \left[\frac{M + \sqrt{M^2+4M-4}}{2}\right].$$

**Esercizio 3** (5 punti)**.** *Calcolare, **motivando i passaggi**, i seguenti limiti:*

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\left(e^{2x}-1\right)}{\sin(3x^2)}, \qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \big(\log(x^2+1) - \log(x^3+1)\big).$$

$(a)$ Basta osservare che $\displaystyle \frac{x\left(e^{2x}-1\right)}{\sin(3x^2)} = \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{3x^2}{\sin(3x^2)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2x}{3x^2}\cdot x}_{\to 2/3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}.$

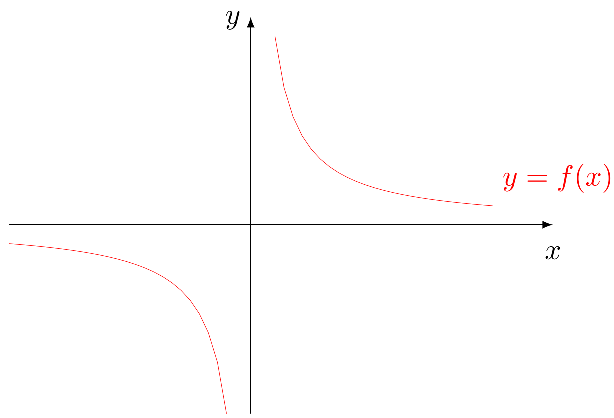
$(b)$ Basta osservare che $\displaystyle \log(x^2+1) - \log(x^3+1) = \log\Bigg(\underbrace{\frac{x^2+1}{x^3+1}}_{\to 0}\Bigg) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$

**Esercizio 4** (5 punti)**.** *Dire, delle seguenti funzioni, quale è continua in* $0$ *(o meno) e perché.*

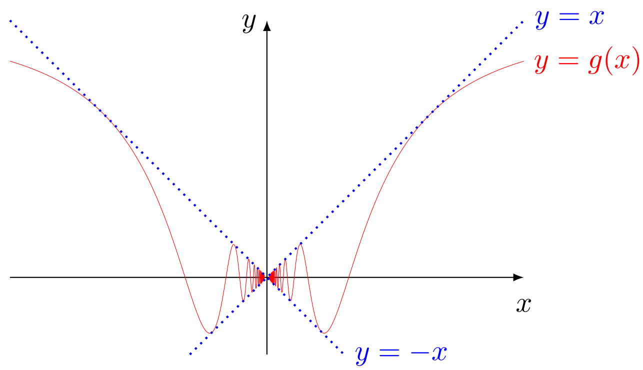
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \begin{cases} x\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x & se\ x < 0 \\ e^x & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

*Di ciascuna disegnare un grafico approssimativo.*

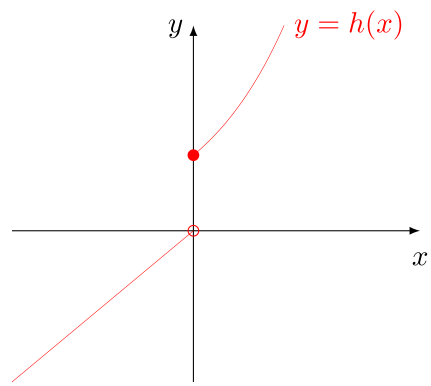
Per $f$ il problema non si pone: $f$ non è definita in $x = 0$.




La $g$ è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^{\pm}} g(x) = 0 = g(0)$.




Infine $h$ non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} h(x)$.




**Esercizio 5** (4 punti)**.** *Si consideri il numero complesso $z \in \mathbb{C}$ dato in forma algebrica da*

$$z = 1 + i\sqrt{3}.$$

*Dopo averne calcolato il modulo, la parte reale e la parte immaginaria, lo si esprima in forma trigonometrica. Fare lo stesso per $z^2$ (lo si esprima in forma trigonometrica e se ne calcoli il modulo, la parte reale e la parte immaginaria). Si rappresenti infine $z$ e $z^2$ nel piano complesso.*

Osserviamo che

$$\begin{aligned} &\Re e(z) = 1, \\ &\Im m(z) = \sqrt{3}, \\ &|z| = \sqrt{1+3} = 2, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = 1/2\\ \sin(\theta) = \sqrt{3}/2\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = \pi/3.$$

Dunque la forma trigonometrica di $z$ è

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Per la formula di De Moivre la forma trigonometrica di $z^2$ è

$$z^2 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
&|z^2| = |z|^2 = 2^2 = 4,\\
&\Re e(z^2) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,\\
&\Im m(z^2) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3},
\end{aligned}$$

e pertanto la forma algebrica di $z^2$ è

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i.$$