Rotazioni:
Momento angolare
Momento di inerzia

Se il *momento* è l'analogo rotazionale della *forza*, qual è l'analogo rotazionale della quantità di moto?

è il momento angolare, o momento della quantità di moto, che, per un punto materiale è definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

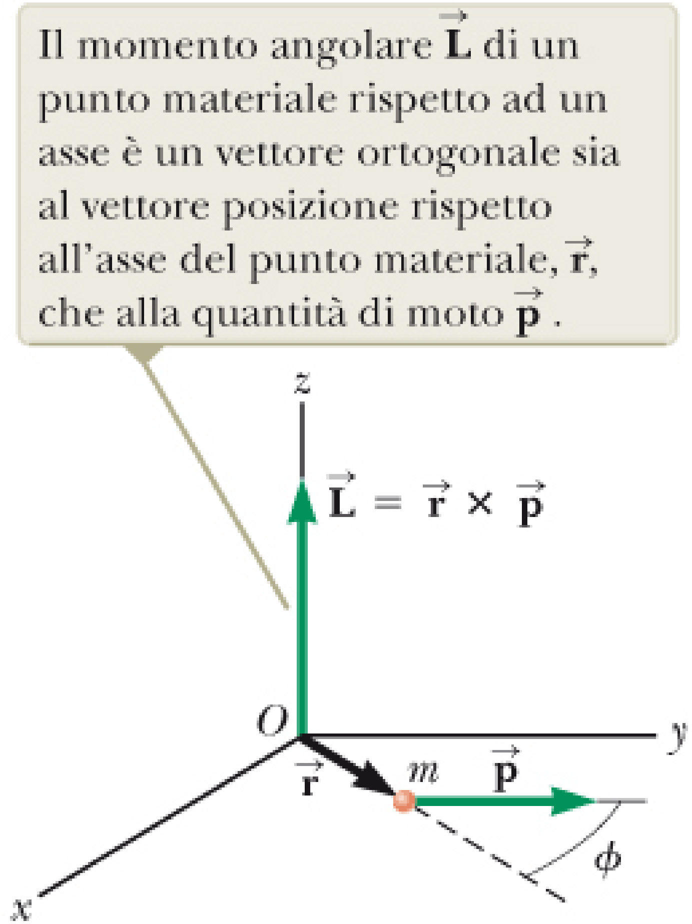


Figura 11.4 Il momento angolare $\vec{\mathbf{L}}$ di un punto materiale è il vettore $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$.

$$L = m\,v\,r$$

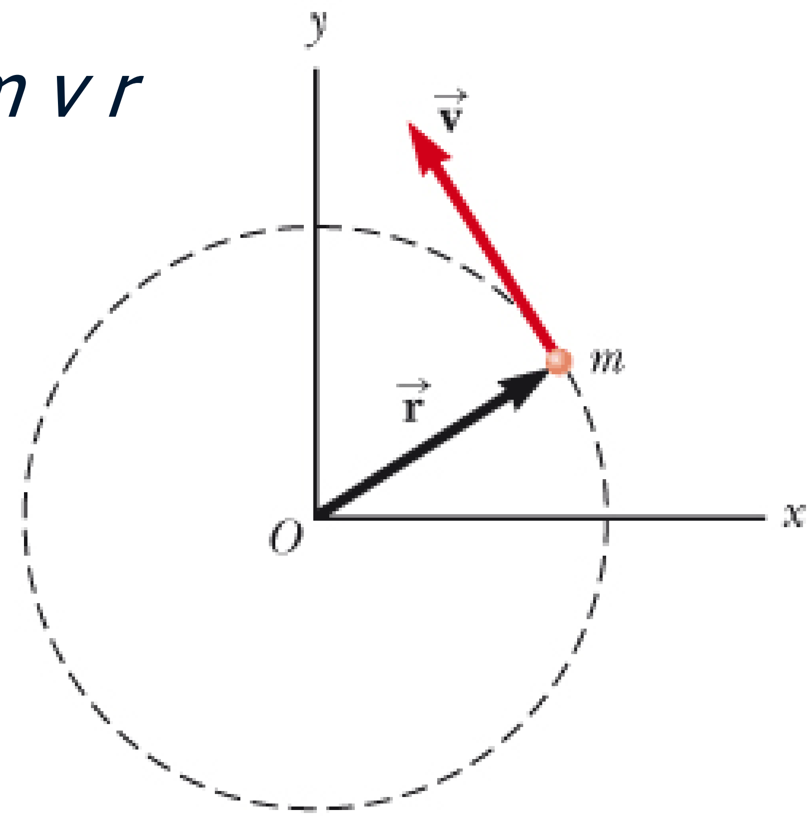


Figura 11.5 (Esempio 11.3) Il momento angolare rispetto ad un asse passante per *O* di una particella che si muove lungo una circonferenza di raggio *r* ha modulo *mvr*. Il vettore $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ è *uscente* dal foglio.

EdiSES

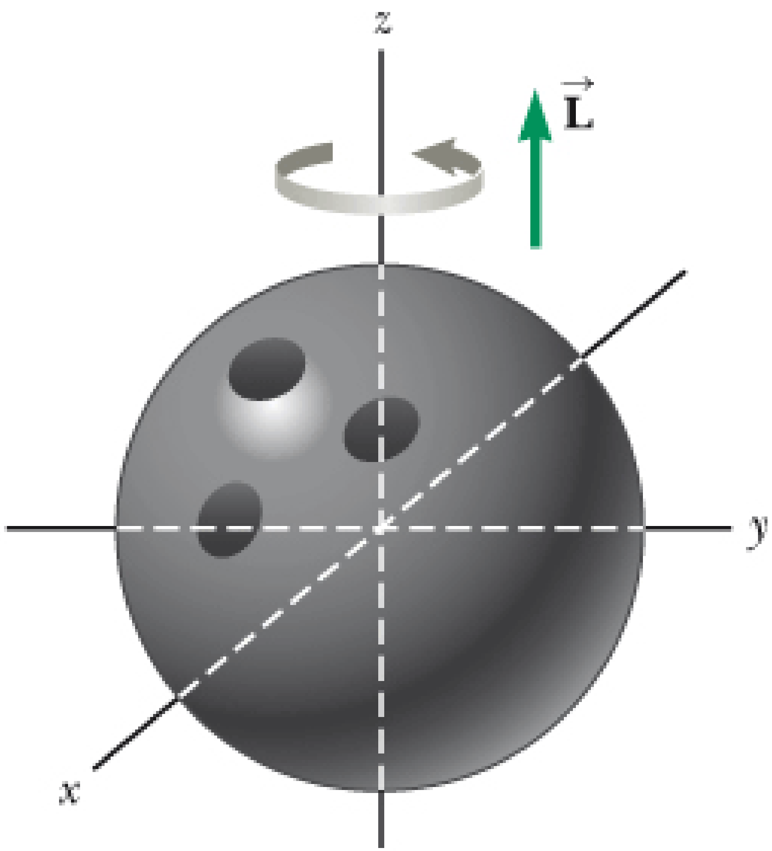


Figura 11.8 (Esempio 11.5) Una palla da bowling che sta ruotando intorno all'asse z: il momento angolare $\vec{\mathbf{L}}$ è parallelo e concorde all'asse. Se il senso di rotazione si inverte, $\vec{\mathbf{L}}$ punterà nel verso delle z negative.

Equazione del moto rotazionale

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\,(r \times p)}{dt} =$$

rispetto ad un polo O

derivata di un prodotto

$$= \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} =$$

$$= \frac{1}{m}\, p \times p + r \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

= 0

$$\frac{dL}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad\qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

L e $\boldsymbol{\tau}$ sono calcolati rispetto allo stesso polo

NON si tratta di una nuova equazione:
è la 2ª Legge di Newton, specializzata per le rotazioni

Vale in sistemi di riferimento INERZIALI

Momento angolare di un sistema di particelle

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_N = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

$$\frac{dL_{TOT}}{dt} = \sum \tau_{INT} + \sum \tau_{EXT} = \sum \tau_{EXT}$$

= 0 (coppie azione-reazione)

$$\boldsymbol{\frac{dL_{TOT}}{dt} = \sum \tau_{EXT}}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

da:
Quantità di moto
e conservazione della quantità di moto

$$\mathbf{F}^E = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

Prima equazione cardinale della dinamica

ad ogni istante la <u>risultante di tutte le forze esterne</u> agenti su un sistema materiale è uguale alla derivata rispetto al tempo della <u>quantità di moto totale</u> del sistema

Momento angolare di un sistema di particelle

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

$$\frac{dL_{TOT}}{dt} = \sum \tau_{EXT}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

ad ogni istante la risultante di tutti i momenti esterni agenti su un sistema materiale è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare totale del sistema

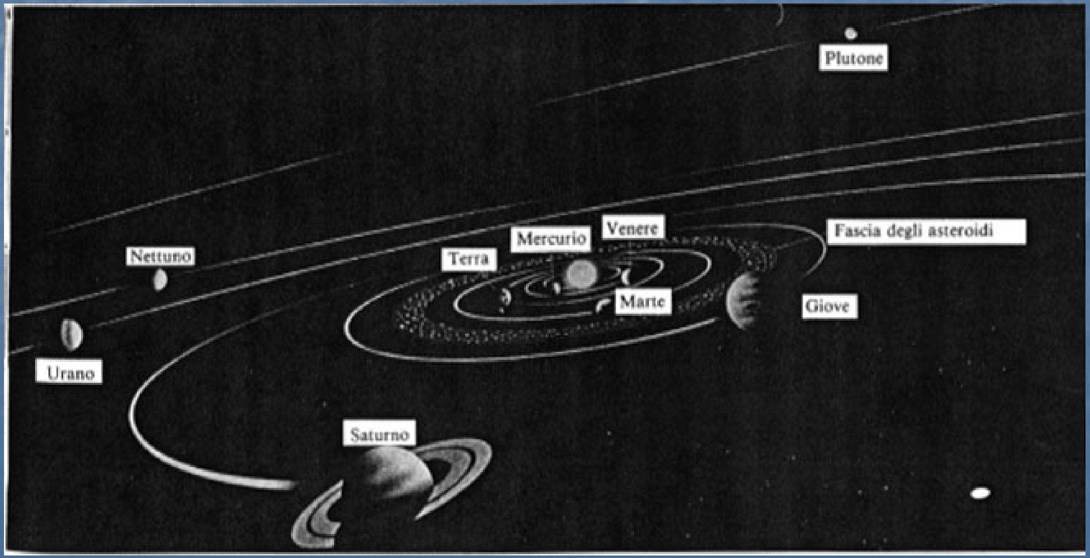
Conservazione del momento angolare

Se le forze esterne esercitano un momento nullo sul sistema

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{EXT} = 0$$

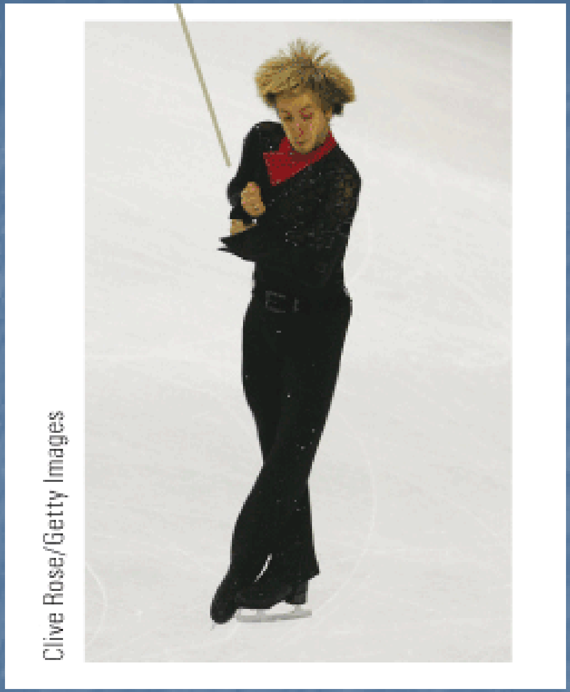
il momento angolare del sistema si conserva: $$\frac{d\boldsymbol{L}_{TOT}}{dt} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{L}_{TOT} = \text{costante}$$

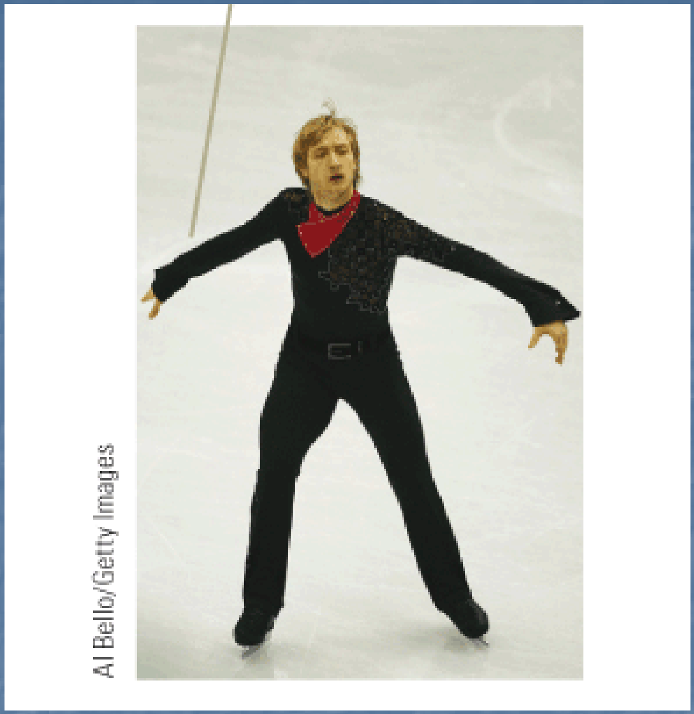


conseguenza:

le orbite dei pianeti, ortogonali al vettore L, sono piane



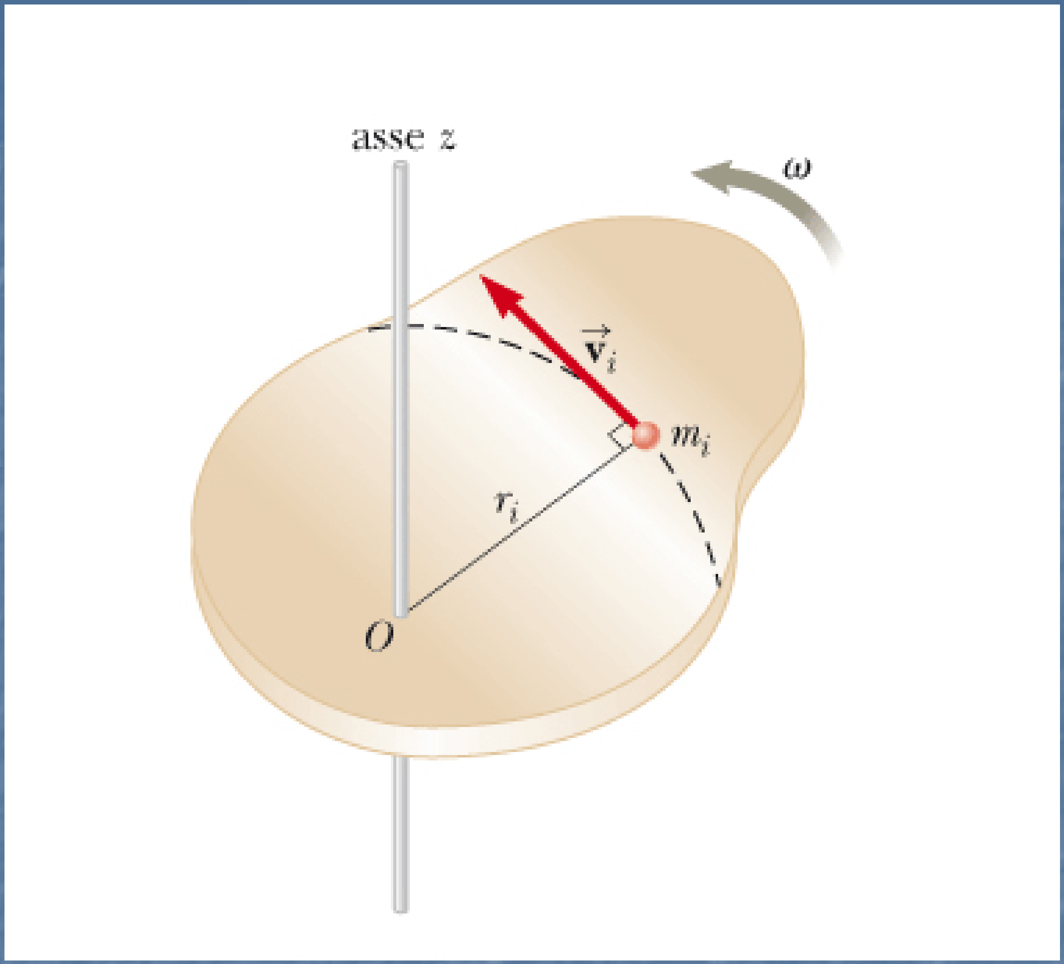
velocità angolare elevata



velocità angolare bassa

Cosa è cambiato nelle due foto?

la distribuzione delle masse intorno all’asse di rotazione



$$L = \sum_i m_i \, v_i r_i$$

$$= \sum_i m_i \, r^2{}_i \; \omega$$

$$= \left(\sum_i m_i \, r^2{}_i \right) \omega$$

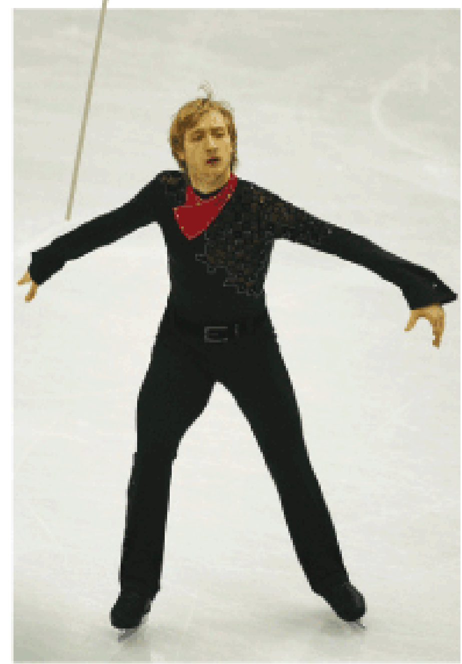
$$= \quad I \quad \omega$$

Momento d'inerzia del sistema rotante

Quando le sue braccia e le sue gambe sono vicine al suo corpo, il suo momento di inerzia è piccolo e la sua velocità angolare grande.

Clive Rose/Getty Images

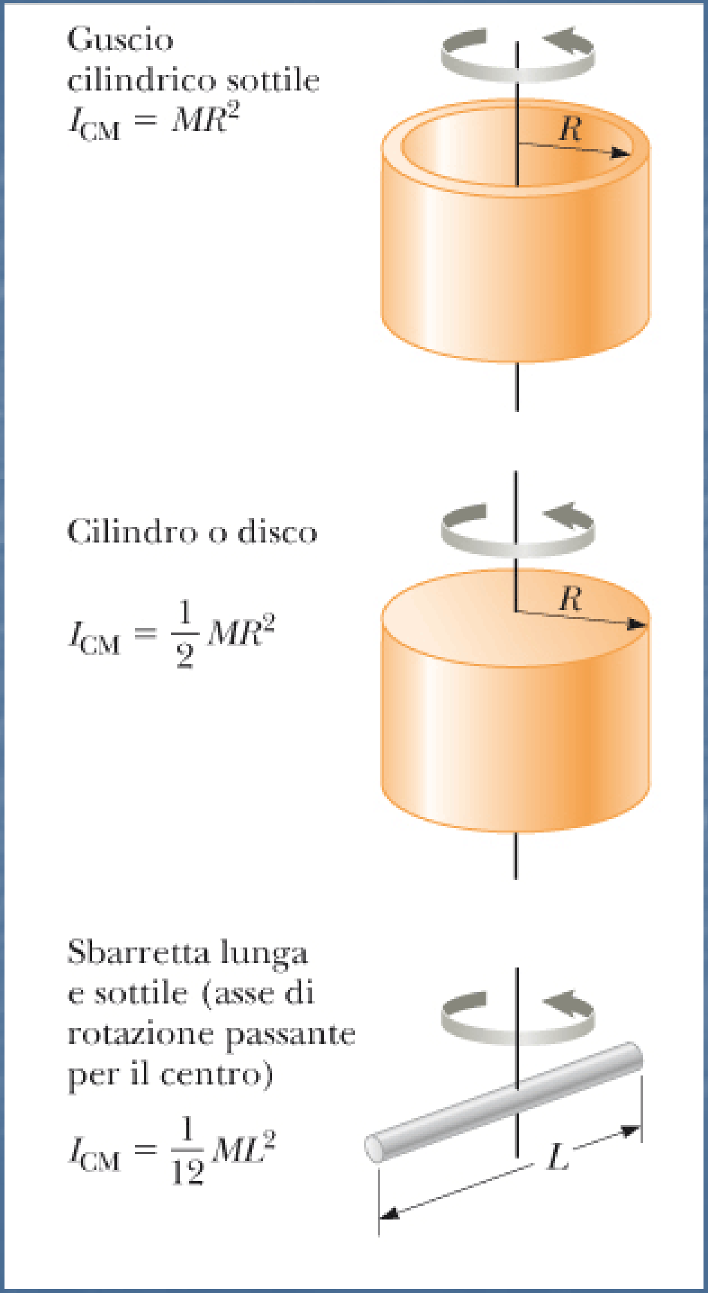
Per fare in modo, verso la fine della rotazione, di rallentare, egli allontana le braccia dal proprio corpo aumentando il proprio momento di inerzia.

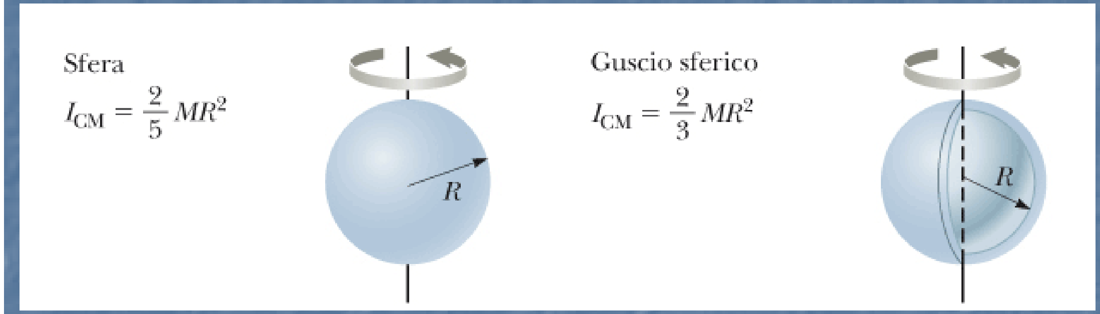


Al Bello/Getty Images

Figura 11.10 Il momento angolare si conserva quando il pattinatore russo Evgeni Plushenko esegue le sue figure nel corso delle Olimpiadi Invernali Torino 2006.

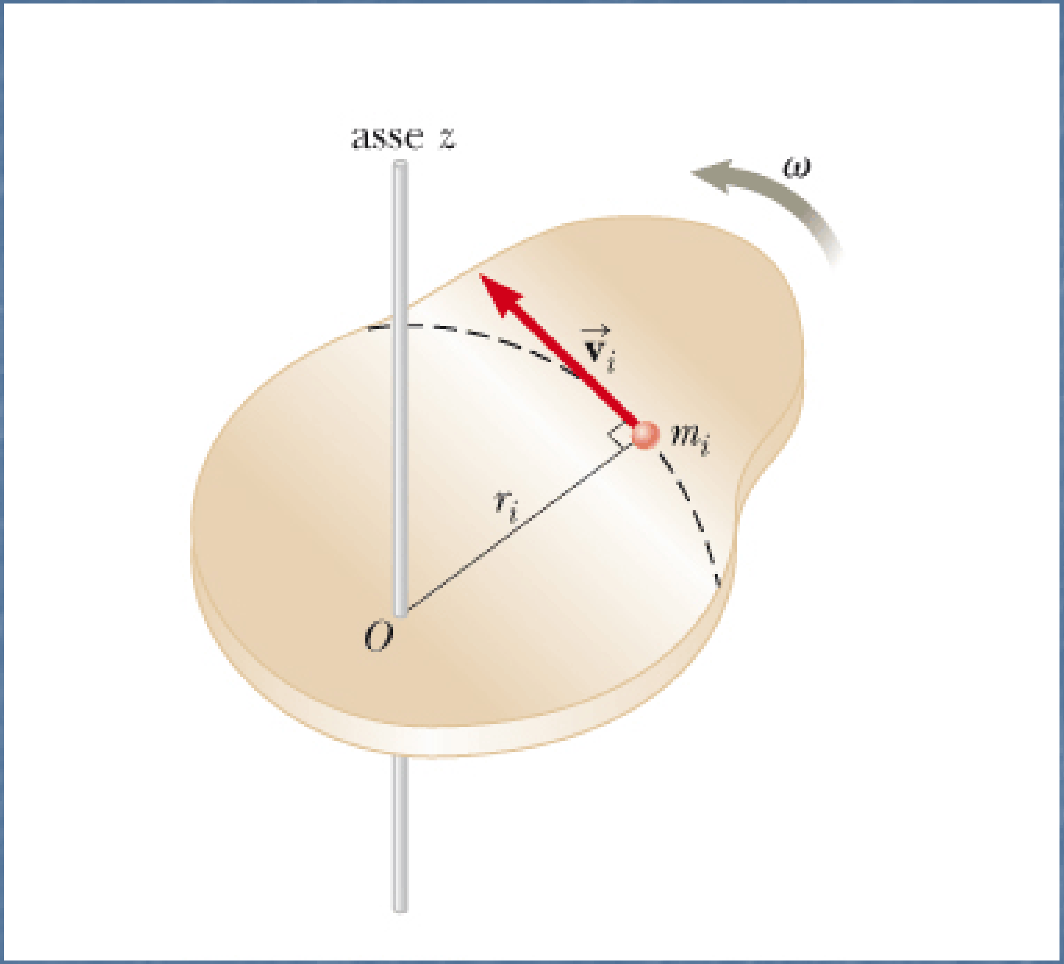
Momenti d'inerzia di varie forme geometriche





EdiSES

Energia cinetica rotazionale



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v^2{}_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i\, r^2{}_i\, \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i\, r^2{}_i \right) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\ I\, \omega^2$$

Moto traslatorio
lungo un asse

Moto rotatorio
attorno ad un asse fisso

velocità $\mathrm{v} = \dfrac{dx}{dt}$

$\mathrm{v} = \omega\, r$

velocità angolare $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

quantità di moto $\mathrm{p} = m\, v$

momento angolare $\mathrm{L} = \mathrm{I}\ \omega$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

equazione del moto

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

energia cinetica $\mathrm{K} = \dfrac{1}{2} m\, v^2$

energia cinetica $\mathrm{K} = \dfrac{1}{2} I\ \omega^2$