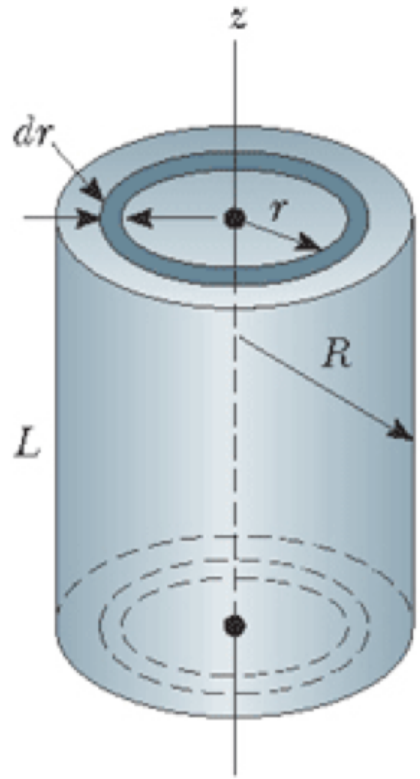
Momento d'inerzia, esempi semplici

- Modello di una molecola biatomica omonucleare: due atomi di massa M a distanza d, rispetto ad un asse passante per il centro:

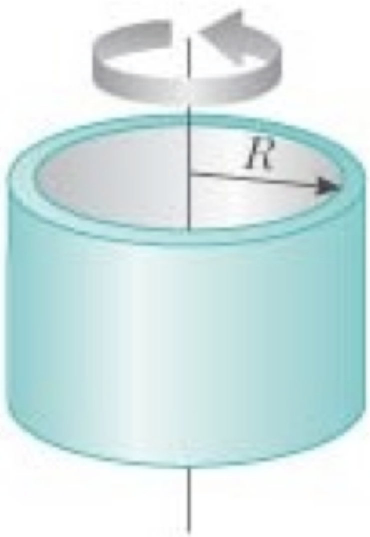
$$I = M\left(\frac{d}{2}\right)^2 + M\left(\frac{-d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}Md^2$$

- Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo attorno al suo asse: poniamo $\rho = M/(\pi R^2 L)$, $dm = \rho(2\pi r L)dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \rho(2\pi r L)dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

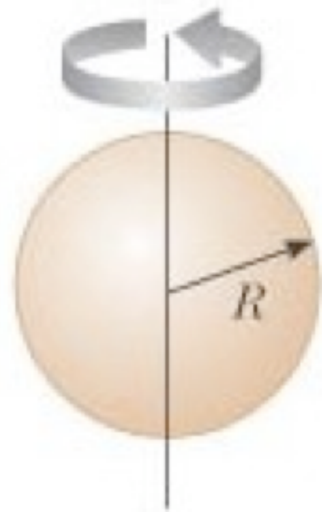


Momento d'inerzia per vari corpi rigidi



Guscio cilindrico sottile:

$$I = MR^2$$

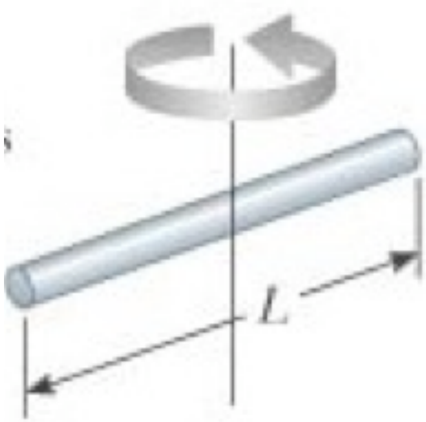


Sfera:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Sbarra sottile, asse passante per il centro:

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

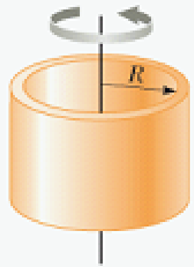


Sbarra sottile, asse passante per un estremo:

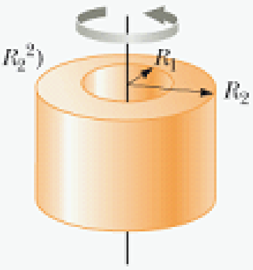
$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Tabella 10.2 **Momenti di inerzia di corpi rigidi omogenei di forme differenti**

Guscio cilindrico sottile
$I_{CM} = MR^2$

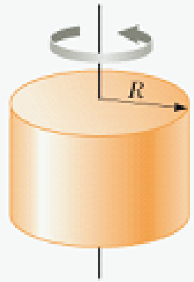


Cilindro cavo
$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^{\,2} + R_2^{\,2})$

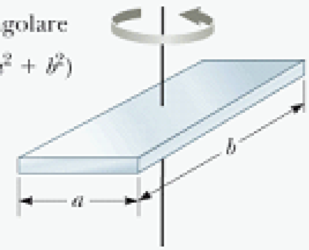


Cilindro o disco

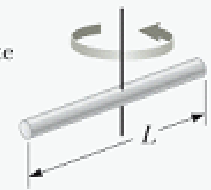
$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



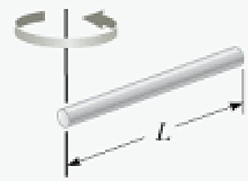
Piastra rettangolare
$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



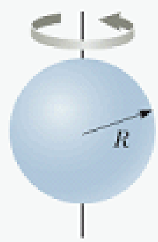
Sbarretta lunga e sottile (asse di rotazione passante per il centro)
$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$



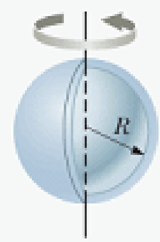
Sbarretta lunga e sottile (asse di rotazione passante per un estremo)
$I = \frac{1}{3} ML^2$



Sfera
$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



Guscio sferico
$I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$



EdiSES
Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr.
Fisica per Scienze ed Ingegneria - Volume 1
EdiSES

Un teorema utile sul momento d'inerzia

- Il momento d'inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un certo asse è dato da
$$I = I_{cm} + Md^2$$
dove I_{cm} è il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello considerato, distante d da questo, e *passante per il centro di massa* del sistema considerato.

Dimostrazione: chiamiamo $\vec{r}_i$ e $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{d}$ le posizioni rispetto al primo asse e rispetto al centro di massa. Vale:

$$I = \sum_i m_i r^2_{\perp i} = \sum_i m_i [(\vec{r}'_i + \vec{d})_\perp]^2 = \sum_i m_i r'^2_{\perp i} + \sum_i m_i d^2_\perp + 2 \sum_i m_i \vec{r}'_i \cdot \vec{d}_\perp$$

(notare che $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})$, dove $\hat{n}$ è il versore dell'asse di rotazione) ma per definizione, $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ (il centro di massa è nell'origine) da cui l'enunciato.