Cinematica Rotazionale

Per *accelerazione angolare costante* (in modulo, direzione e verso!) si può descrivere il moto del corpo rigido usando delle equazioni cinematiche: l'analogo rotazionale delle equazioni cinematiche del moto lineare. Matematicamente:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

La relazione fra quantità lineari ed angolari è semplicemente

$$s(t) = \theta r_\perp \quad , \quad v(t) = \omega r_\perp \quad , \quad a_t = \alpha r_\perp$$

dove a_t è l'accelerazione tangenziale e $r_\perp$ la distanza dall'asse di rotazione (attenzione: non dall'origine!)

Notare che tutti i punti del corpo ruotante hanno lo stesso moto angolare, ma hanno moto lineare differente.

Energia Cinetica Rotazionale

Un corpo ruotante con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica *rotazionale*. Ogni particella del corpo ha energia cinetica $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$, dove $v_i = \omega r_{\perp i}$. L'energia cinetica rotazionale è la somma di tali energie:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è noto come *momento d'inerzia*.

Notare l'analogia fra energie cinetiche associate al moto lineare:
$K = \frac{1}{2} m v^2$, e associate al moto rotazionale, $K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$.

L'energia cinetica rotazionale non è un nuovo tipo di energia! E' energia cinetica e si misura nelle stesse unità, joule (J)

Momento d'inerzia

Definizione del momento d'inerzia: $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ (Unità SI: kg·m^2).

- Il momento d'inerzia *dipende dall'asse di rotazione*! (ma può essere calcolato rispetto a qualunque origine, purché sull'asse di rotazione).

- Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i. Nel limite continuo:

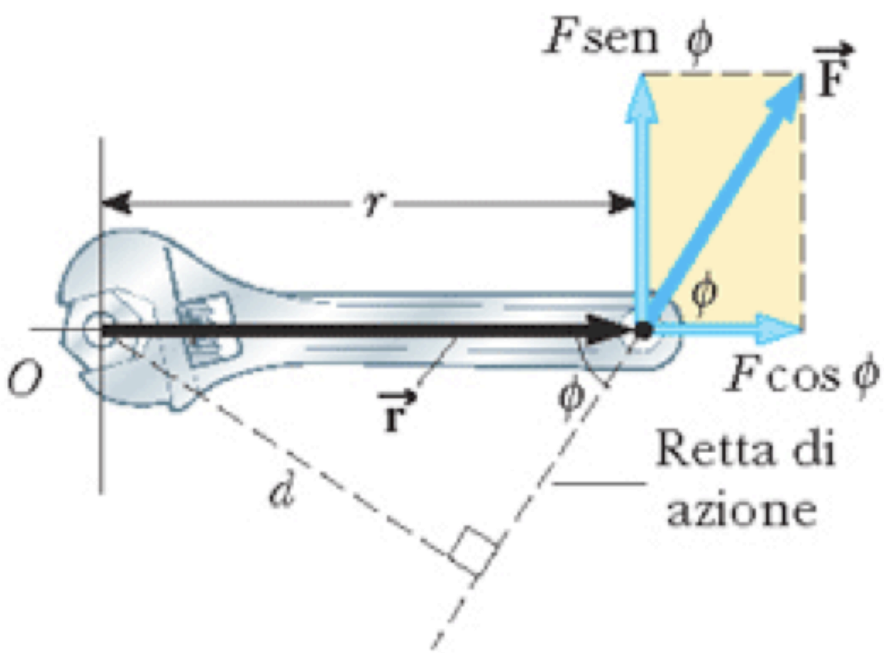
$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_\perp^2 dm.$$

- Come per il centro di massa, tale integrale è in generale complicato, salvo per corpi di densità ρ costante (in tal caso $dm = \rho dV$ e ci si riduce a un integrale di volume), oggetti di forma semplice, asse di rotazione simmetrico.

Momento della forza

Se è la forza che cambia il moto, cos'è che cambia la rotazione?

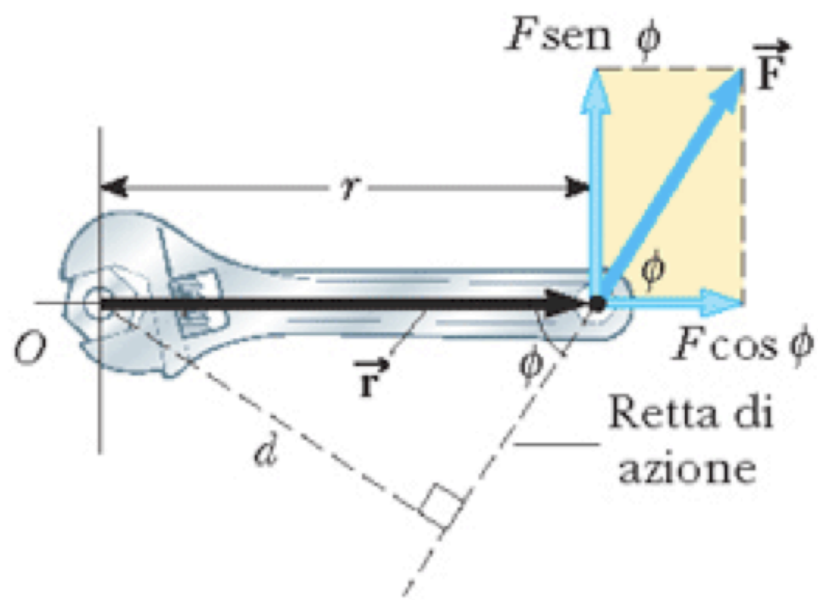
- *Momento, $\vec{\tau}$, di una forza, $\vec{F}$*: è un vettore definito come $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$.
- Il momento di una forza *dipende dall'origine* e *dal punto ove la forza è applicata*! (tipicamente, l'origine è scelta su di una asse di rotazione)



- ϕ è l'angolo fra la forza $\vec{F}$ e il vettore $\vec{r}$ fra l'origine e il punto di applicazione della forza
- $\tau = rF\sin\phi = dF$ dove $d = r\sin\phi$ è il *braccio del momento* o della leva

Momento della forza II

- Il momento della forza ci dà la "tendenza" di una forza a far ruotare un corpo (attorno ad un certo asse).



- Solo la componente della forza ortogonale a $\vec{r}$ *produce momento*, ovvero tende a far ruotare un corpo

- La componente lungo $\vec{r}$ della forza *non produce momento*, ovvero non tende a far ruotare un corpo

- Il momento è *positivo* se la rotazione indotta è *antioraria*

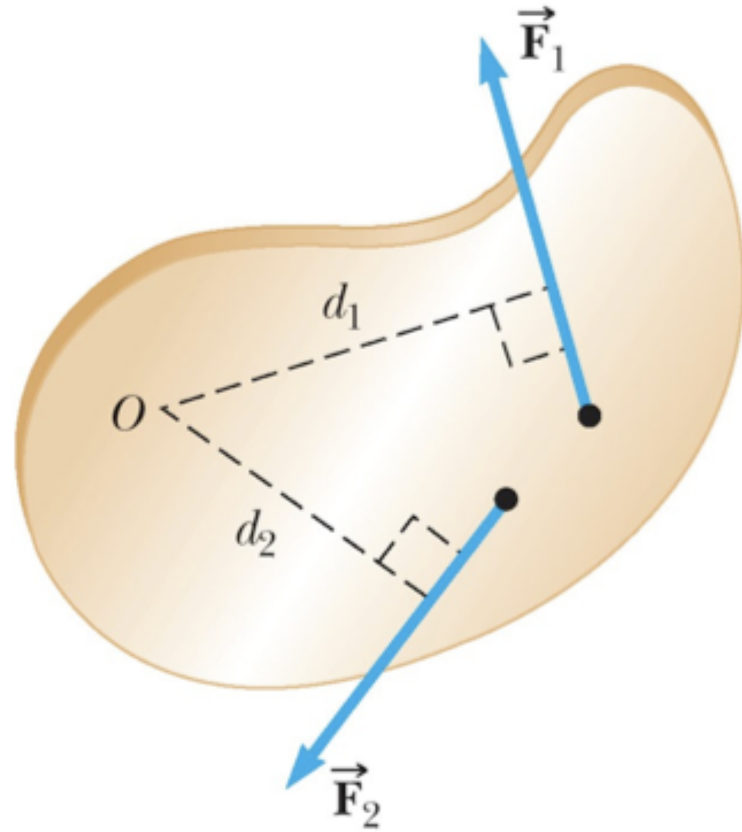
Unità SI del momento: N·m. Attenzione: benché il momento sia una forza moltiplicata per una distanza, è molto diverso da lavoro ed energia! Il momento non si indica *mai* in Joule.

Equilibrio di un corpo rigido

Il momento totale (o risultante) è la *somma vettoriale* dei momenti.

- Nell'esempio accanto, la forza $\vec{F}_1$ tenderà a causare una rotazione antioraria del corpo; la forza $\vec{F}_2$ tenderà a causare una rotazione oraria del corpo.

- $\tau = |\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = (d_1 F_1 - d_2 F_2)$; il vettore $\vec{\tau}$ è ortogonale al piano.



Condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

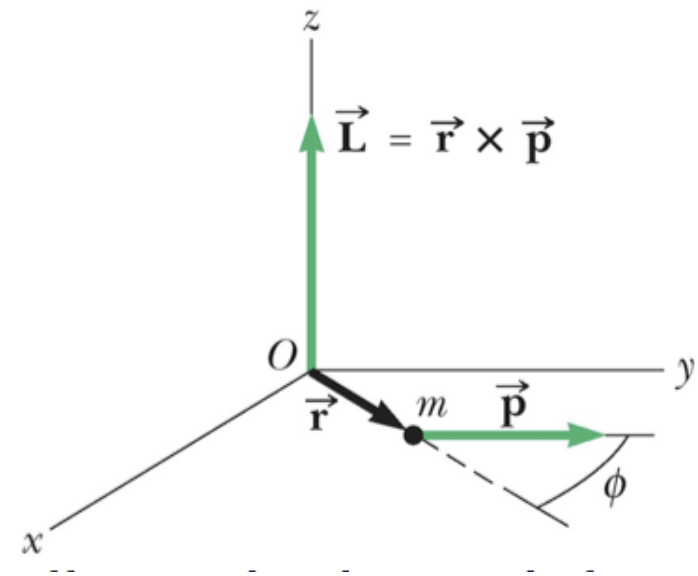
Momento angolare

Se il momento è l'analogo rotazionale della forza, qual è l'analogo rotazionale della quantità di moto?

Momento angolare: è un vettore, di solito indicato con $\vec{L}$, definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

dove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto di una particella.



- E' noto anche come *momento della quantità di moto*
- Il suo valore dipende dalla scelta dell'origine
- E' nullo se $\vec{r} \parallel \vec{p}$, ha modulo $L = rp\sin\phi$, dove ϕ è l'angolo fra $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Equazioni del moto angolari

Dalla II legge di Newton, scelta un'origine, troviamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Equazioni del moto angolari

Dalla II legge di Newton, scelta un'origine, troviamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Quindi, $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$, analogo rotazionale della II Legge di Newton.

- Non è una nuova legge fondamentale della dinamica! E' la II legge di Newton, specializzata al caso del moto rotatorio
- $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$ sono calcolati rispetto agli stessi assi e alla stessa origine fissa; tuttavia la legge vale qualunque siano gli assi e l'origine scelta
- Valido per sistemi di riferimento inerziali.

Momento angolare di un sistema di particelle

Il momento angolare di un sistema di particelle è la somma vettoriale dei momenti angolari di ogni particella:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

Differenziando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{tot}$$

dove $\vec{\tau}_{tot}$ è il momento totale delle forze. Analogamente al caso della quantità di moto, solo il momento delle forze *esterne* è responsabile per la variazione del momento angolare!

Per un corpo rigido, il momento angolare totale diventa un integrale.

Momento angolare di un corpo rigido

Consideriamo un caso semplice: disco ruotante con velocità angolare ω

$$L = \sum L_i = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \omega \equiv I\omega$$

dove I è il momento d'inerzia del disco (attorno all'asse di rotazione). Si può dimostrare che tale relazione ha validità generale e può essere scritta sotto forma vettoriale: $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$. Questa è l'analogo rotazionale della relazione fra velocità e quantità di moto.

La relazione fra momento e accelerazione angolare:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

valida per asse di rotazione fisso, è l'analogo rotazionale di $\vec{F} = m\vec{a}$.

Conservazione del momento angolare

Il momento angolare di un corpo, o di un sistema di particelle, è *conservato* se la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

$$\vec{L} = \text{costante} \Longrightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_i$$

durante un processo in cui non agiscano momenti esterni.

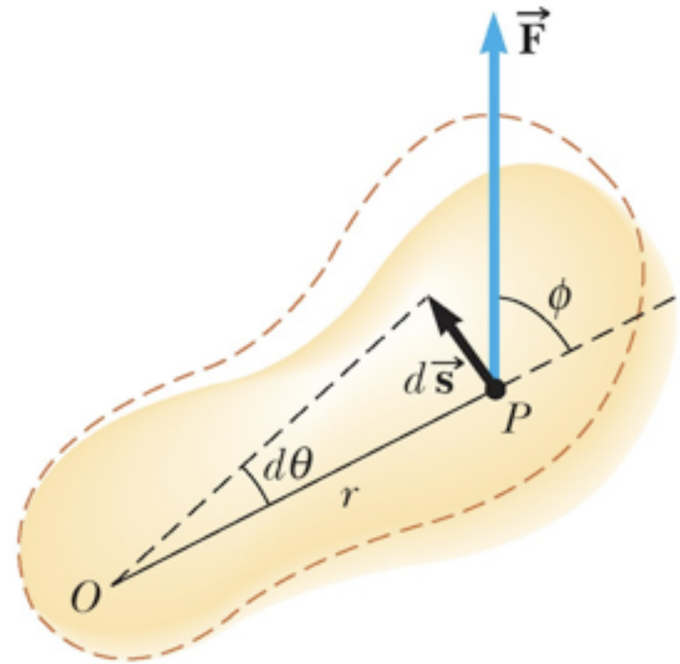
Ciò rimane vero anche se la massa si ridistribuisce e il momento d'inerzia cambia durante il processo. Se l'asse di rotazione rimane fisso, vale la relazione:

$$L = I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

dove $I_{i,f}$ sono i momenti d'inerzia iniziale e finale, $\omega_{i,f}$ le velocità angolari iniziale e finale. Se $I_f > I_I$, allora $\omega_f < \omega_i$ e viceversa.

Lavoro nel moto rotazionale

Qual è il lavoro (W) fatto da una forza su di un corpo che sta ruotando?



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin\phi)(r d\theta) = \tau d\theta$$

La componente radiale della forza, $F\cos\phi$, non fa lavoro perché ortogonale allo spostamento

Teorema dell'energia cinetica, versione "rotazionale":

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \Delta K_R \quad , \quad K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

In presenza di traslazioni e rotazioni: $\boxed{W = \Delta K + \Delta K_R}$.

Potenza nel moto rotazionale

Il lavoro fatto per unità di tempo è detto *potenza*:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega.$$

Questo è l'analogo di $P = Fv$ per il moto rotatorio.

Riassunto: moto rotazionale

	Moto di traslazione	Moto rotatorio (attorno ad un asse fisso)
Massa	m	I
velocità	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
Quantità di moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
Equilibrio	$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$
II Legge di Newton	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
alternativamente	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Legge di conservazione	$\vec{p} =$costante	$\vec{L} =$costante
Potenza	$P = Fv$	$\mathcal{P} = \tau\omega$

Riassunto: leggi di conservazione

Per un sistema isolato (non sottoposto a forze esterne) valgono:

1. Conservazione dell'energia cinetica, $K_f = K_i$
2. Conservazione della quantità di moto, $\vec{p}_f = \vec{p}_i$
3. Conservazione del momento angolare, $\vec{L}_f = \vec{L}_i$

Per sistemi sotto forze conservative: conservazione dell'energia meccanica, $E_f = K_f + U_f = K_i + U_i = E_i$.