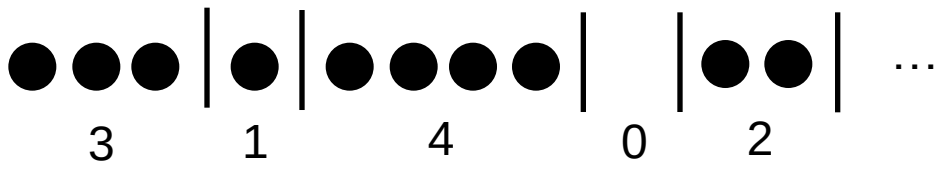
Statistica di Bose-Einstein

Esistono sistemi composti di particelle *identiche* e *indistinguibili* che non sono soggette al principio di esclusione. In questi sistemi non esiste un limite al numero di particelle che possono essere ospitate nello stesso stato quantistico.
Tali particelle sono dette **bosoni** e devono il loro nome al fisico Indiano S.N. Bose (1894-1974), che per primo ha studiato la statistica di questo tipo di particelle. Sperimentalmente si verifica che tutte le particelle con spin intero sono bosoni.

Nella statistica di B-E, come in quella di F-D, i g_i forniscono la degenerazione di ogni livello.
Noi vogliamo calcolare il numero di modi differenti in cui un sistema di bosoni può essere sistemato per produrre una determinata partizione.
Prima di tutto valutiamo il numero di modi possibili per sistemare n_i particelle fra g_i stati corrispondenti all'energia E_i. Questo è uguale al numero di modi in cui n_i oggetti identici possono essere sistemati in g_i scatole, senza limiti al numero di oggetti per scatola.

Procediamo in questo modo: supponiamo di sistemare n_i particelle su una linea e di distribuirle nei g_i stati disponibili semplicemente inserendo g_i **-1** divisioni



Il numero totale di possibili configurazioni di particelle e divisioni è uguale al numero di permutazioni di $n_i + g_i$ **-1** oggetti su una linea, che è $(n_i + g_i - 1)!$.

Tutte le permutazioni che differiscono solo per l'ordine delle particelle sono uguali (particelle identiche e indistinguibili). Devo dividere per $n_i!$.

Inoltre tutte le permutazioni delle divisioni corrispondono allo stesso stato fisico. Devo dividere per $(g_i - 1)!$.
Il numero totale di modi di distribuire n_i particelle nei g_i stati diventa perciò:

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!\,(g_i - 1)!}$$

Possiamo ottenere il numero totale di modi differenti di formare la partizione n_1, n_2, n_3, ... fra i livelli di energia E_1, E_2, E_3 ... moltiplicando fra loro le diverse espressioni corrispondenti a ogni livello di energia disponibile, ottenendo la probabilità di partizione *P*:

$$P = \frac{(n_1 + g_1 - 1)!}{n_1!(g_1 - 1)!} \cdot \frac{(n_2 + g_2 - 1)!}{n_2!(g_2 - 1)!} \cdot \frac{(n_3 + g_3 - 1)!}{n_3!(g_3 - 1)!} \ldots = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!}$$

Per trovare la partizione più probabile dobbiamo calcolare il massimo del ln*P*.
Ne risulta:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

che rappresenta la legge di distribuzione di Bose-Einstein.
Il parametro β gioca il ruolo già visto nelle altre distribuzioni e quindi definiamo la temperatura di un sistema di bosoni in equilibrio termico come:

$$kT = \frac{1}{\beta}$$

Perciò otteniamo:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + E_i / kT} - 1}$$

La costante α non ha un significato speciale nella statistica di Bose-Einstein, come vedremo fra poco discutendo il gas di fotoni.

Il gas di fotoni

L'applicazione più importante della statistica di B-E è l'analisi della radiazione elettromagnetica intrappolata in una cavità e in equilibrio termico con gli atomi delle pareti della cavità (**radiazione di corpo nero**).
Assumiamo che la radiazione di corpo nero all'equilibrio si comporti come un **gas di fotoni** e che i fotoni non interagiscano fra loro, ma solo con gli atomi delle pareti. Dal momento che i fotoni non sono distinguibili e nulla impedisce a fotoni differenti di avere la stessa energia (gli esperimenti ci insegnano che l'intensità della radiazione ad una determinata frequenza può essere aumentata senza limiti) i fotoni possono a tutti gli effetti essere considerati **bosoni**.
Va sottolineato, però, che il numero di fotoni non è costante, dal momento che possono essere assorbiti o emessi dagli atomi delle pareti. Perciò la condizione:

$\sum_i dn_i = 0$ non deve essere considerata e possiamo porre $\alpha = 0$, per cui avremo:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{E_i / kT} - 1}$$

Inoltre lo **spettro** di energia dei fotoni può essere trattato come **continuo se la cavità è grande rispetto alla lunghezza d'onda media della radiazione**, dal momento che in questo caso la differenza di energia fra stati successivi permessi è estremamente piccola.

Possiamo scrivere ***g(E)dE*** al posto di g_i:

$$dn = \frac{g(E)dE}{e^{E/kT} - 1} \qquad (1)$$

Dato che l'energia dei fotoni è legata alla frequenza dalla relazione $E=h\nu$ possiamo introdurre la funzione $g(\nu)$ tale che $g(E)dE = g(\nu)d\nu$, dove $g(\nu)$ fornisce il numero di modi di oscillazione nell'intervallo di frequenze $d\nu$ corrispondente all'intervallo di energia dE. Abbiamo già calcolato per la radiazione di corpo nero che il numero di stati con frequenza compresa fra ν e $\nu+d\nu$ o energia compresa fra E ed $E+dE$ è:

$$g(E)dE = g(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Posso riscrivere la (1) come:

$$dn = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad (2)$$

L'energia corrispondente a dn fotoni nell'intervallo di frequenza $d\nu$ è $h\nu dn$ e l'energia per unità di volume è $h\nu dn/V$. La distribuzione della densità di energia per la radiazione di corpo nero diventa quindi:

$$\rho_T(\nu) = \frac{h\nu}{V}\frac{dn}{d\nu}$$

Inserendo la (2) si ottiene **l'equazione di Planck**:

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

Capacità termica dei solidi

I solidi sono aggregati regolari di un numero molto elevato di atomi (o molecole) mantenuti nelle loro posizioni di equilibrio da forze di coesione. Ogni atomo può vibrare intorno alla propria posizione di equilibrio, ma l'accoppiamento fra gli atomi è così forte che ogni movimento di vibrazione si trasmette agli atomi vicini e in pratica a tutto il solido. Perciò dobbiamo considerare **eccitazioni vibrazionali collettive** nei solidi.

Le vibrazioni collettive generano **onde stazionarie nel solido**. Le loro frequenze dipendono dalla forma e dalle dimensioni del solido, in un modo del tutto analogo a ciò che accade nel caso delle **onde elettromagnetiche nella cavità**.

Sebbene lo **spettro** delle frequenze possibili sia **discreto**, nel caso in cui il solido sia grande rispetto alle dimensioni atomiche la separazione fra le frequenze permesse diventa così piccola da **poter assumere che lo spettro sia continuo**.

Le **onde stazionarie** non sono altro che **onde elastiche** che si propagano nel solido e perciò la loro **velocità** di propagazione è quella **del suono**.

E' noto che esistono due tipi di onde elastiche in un solido: **l**ongitudinali e **t**rasversali, che si propagano con velocità v_l e v_t, rispettivamente.

Per ottenere il numero di modi differenti di vibrazione nell'intervallo di frequenze fra ν e $\nu+d\nu$, espresso come $g(\nu)d\nu$, dobbiamo contare separatamente i modi longitudinali e trasversali. Possiamo utilizzare l'espressione ottenuta nel caso della cavità, sostituendo la velocità del suono a quella della luce.

Per le onde **t**rasversali (2 gradi di libertà) vale quindi:

$$g_t(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{{v_t}^3}\nu^2 d\nu$$

Per le onde **l**ongitudinali (1 solo grado di libertà) vale:

$$g_l(\nu)d\nu = \frac{4\pi V}{{v_l}^3}\nu^2 d\nu$$

Il numero totale di modi vibrazionali è dato dalla somma dei due termini precedenti:

$$g(\nu)d\nu = 4\pi V\left(\frac{1}{{v_l}^3}+\frac{2}{{v_t}^3}\right)\nu^2 d\nu$$

In un mezzo realmente continuo non ci sarebbe limite al numero totale di modi vibrazionali; ma in un solido, che contiene un numero *N* finito (per quanto grande) di atomi, ogni modo vibrazionale deve essere descritto in termini delle 3*N* coordinate di posizione degli atomi stessi. Questo impone un limite al numero totale di modi indipendenti (che deve essere uguale a 3*N*) e di conseguenza alla massima frequenza vibrazionale ν_0, che definiamo di *cutoff*.

$$3N = \int_0^{\nu_0} g(\nu)d\nu = 4\pi V\left(\frac{1}{v_l^3}+\frac{2}{v_t^3}\right)\int_0^{\nu_0}\nu^2 d\nu$$

Integrando otteniamo:

$$3N = 4\pi V\left(\frac{1}{v_l^3}+\frac{2}{v_t^3}\right)\frac{\nu_0^3}{3}$$

ovvero:

$$4\pi V\left(\frac{1}{v_l^3}+\frac{2}{v_t^3}\right) = \frac{9N}{\nu_0^3}$$

che sostituita nell'espressione della densità di modi fornisce:

$$g(\nu)d\nu = 4\pi V\left(\frac{1}{v_l^3}+\frac{2}{v_t^3}\right)\nu^2 d\nu = \frac{9N}{\nu_0^3}\nu^2 d\nu$$

Il problema che abbiamo discusso finora è del tutto analogo a quello delle onde elettromagnetiche stazionarie in una cavità, che ha dato origine al concetto di **gas di FOTONI** per analizzare la radiazione di corpo nero. Potremmo spingere oltre l'analogia associando ai modi vibrazionali di un solido, che sono necessariamente **QUANTIZZATI**, il concetto di **gas di FONONI**, composto da particelle di energia $h\nu$. L'eccitazione o la diseccitazione di un modo vibrazionale, corrisponde all'assorbimento o all'emissione di un'energia $h\nu$.

Dal momento che tutti i fononi sono identici e non c'è limite al numero di fononi nello stesso stato di energia, ci aspettiamo che un gas di fononi all'equilibrio termico obbedisca alla statistica di Bose-Einstein. Inoltre il numero di fononi non è fissato, visto che il loro numero può aumentare o diminuire a seconda che l'energia dei modi cresca o descresca (α=0).

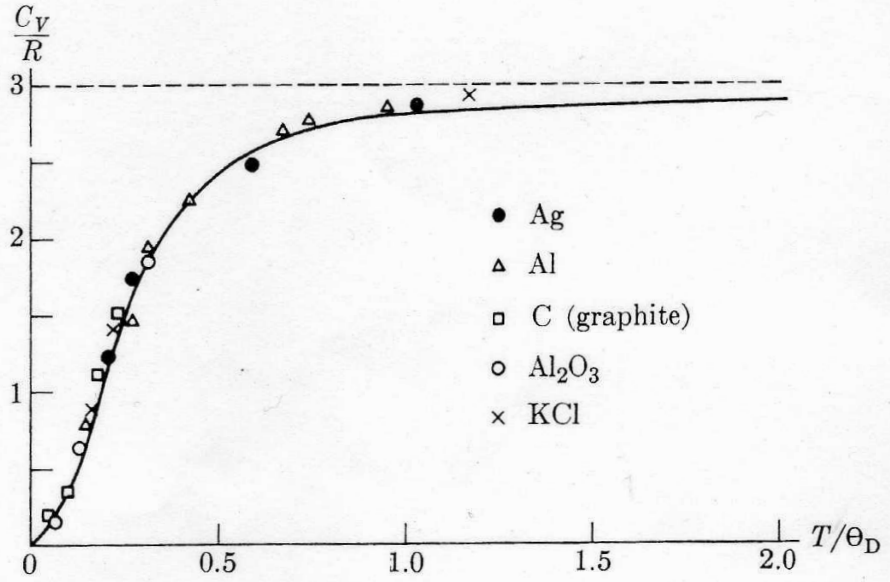


Fig. 13–9. Heat capacity of a crystal lattice as a function of the temperature.

TABLE 13–3 Debye Temperatures of Some Solids

Substance	Θ_D, °K	Substance	Θ_D, °K
Ag	225	Ge	366
Au	165	Na	159
C (diamond)	1860	Ni	456
Cu	339	Pt	229