Prova Scritta di Istituzioni di Met. Mat. della Fisica

Ferrara, venerdí 24 giugno 2011

1 Esercizio A1

Usando le formule integrali di Cauchy, si valuti l'integrale

$$\int_\gamma \frac{e^{z-3}}{z(z-3)^2}dz$$

(a) se

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

è la circonferenza unitaria centrata nell'origine;

(b) nel caso in cui la γ è la circonferenza

$$\gamma(t) = 3 + 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

2 Esercizio A2

Si valuti l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 6x + 10}dx$$

3 Esercizio B1

Determinare nucleo e range dell'operatore

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1-i \\ 3-i & 4 & 1+i \\ 1-i & 0 & -1+i \end{pmatrix}$$

4 Esercizio B2

Si risolva il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{y} = Ay \qquad y(0) = (1, 0, -1)^T$$

dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Esercizio B3

Sia $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ lo spazio di funzioni test definito al solito da

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{f : f \in C^\infty(R), \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(t)t^m| \in R \quad \forall n, m \in N\}$$

(ovvero lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili che, unitamente alle loro derivate, all'infinito vanno a zero piú rapidamente di qualunque potenza).

Si determinino i coefficienti c_n in modo tale che la successione di distribuzioni regolari ϕ_{f_n}, su $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, associate alle funzioni

$$f_n(x) = c_n \frac{1}{x^4 n^4 + 1}$$

converga debolmente alla distribuzione δ di Dirac $\delta(x)$. Determinati i coefficienti, si dimostri la convergenza debole. Si ricordi che l'azione di ϕ_{f_n} è data da:

$$\phi_{f_n} : g \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \to \int_R dt f_n(t) g(t).$$

Soluzione

1. (a) all'interno e su $\gamma(t)$, è analitica la funzione

$$f(z) = \frac{e^{z-3}}{(z-3)^2}$$

dunque, per la formula integrale di Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)} dz = 2\pi i f(0) \Longrightarrow \int_\gamma \frac{e^{z-3}}{z(z-3)^2} dz = \frac{2\pi i}{9e^3}.$$

(b) All'interno e sul cerchio $\gamma(t)$, è analitica la funzione

$$f(z) = \frac{e^{z-3}}{z}$$

dunque, per la formula integrale di Cauchy per le derivate,

$$f'(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-3)^3} dz \Longrightarrow \int_\gamma \frac{e^{z-3}}{z(z-3)^2} dz = \frac{4\pi i}{9}.$$

2. L'integrale, calcolato su una semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio R, e appartenente al semipiano superiore,

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2 - 6z + 10} dz$$

ha due poli semplici:

$$z_1 = 3 + i, \quad \text{e} \quad z_2 = 3 - i$$

Solo z_1 contribuisce al residuo, che vale, applicando l'Hopital,

$$\lim_{z \to 3+i} \frac{(z-3-i)e^{iz}}{z^2 - 6z + 10} = \lim_{z \to 3+i} \frac{e^{iz}}{2z - 6} = \frac{e^{3i-1}}{2i}.$$

Conseguentemente,

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2 - 6x + 10} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10} dx = 2\pi i \frac{e^{3i-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}(3i+1)(\cos 3 + i \sin 3)$$

essendo sottinteso l'integrale sulla semicirconferenza che si annulla. Passando al limite, e uguagliando le parti reali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 6x + 10} dx = \frac{\pi}{e} \cos 3$$

3. Gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2i, \quad \lambda_3 = 0$$

e i relativi autovettori sono

$$v_1 = (0, 1, 0)^T, \quad (i, -i, 1)^T, \quad (1, -1, 1)^T$$

Il nucleo di A è pertanto lo spazio lineare spannato dal vettore v_3:

$$N = \{x; x = \alpha v_3, \alpha \in R\}$$

e il range di A lo spazio lineare spannato dai vettori v_1 e v_2

$$R = \{x; x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \alpha_1, \alpha_2 \in R\}$$

4. $y(t)$ è dato da
$$y(t) = \mathrm{e}^{At}y(0)$$
Il problema si riduce pertanto al calcolo di e^{At}. Sappiamo che e^{At} si può scrivere come combinazione lineare di I, At ed A^2t^2 ovvero
$$\mathrm{e}^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 At + \alpha_2 A^2 t^2 \tag{1}$$
Se v_λ è un autovettore relativo all'autovalore λ della matrice At, applicando ambo i membri dell'equazione 1 a v_λ, otteniamo
$$\mathrm{e}^{\lambda} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 \tag{2}$$
Gli autovalori di At sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità uno e $\lambda_2 = 4t$ con molteplicità due. Otteniamo pertanto due equazioni direttamente dalla relazione 2. La terza equazione si ottiene derivando l'equazione 2 rispetto a λ e ponendo $\lambda = 4$.

Pertanto
$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_0 \\ \mathrm{e}^{4t} &= \alpha_0 + 4\alpha_1 t + 16\alpha_2 t^2 \\ \mathrm{e}^{4t} &= \alpha_1 + 8\alpha_2 t \end{aligned}$$
da cui otteniamo
$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 t = \frac{\mathrm{e}^{4t} - 1 - 2t\mathrm{e}^{4t}}{2}, \quad \alpha_2 t^2 = \frac{4t\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{4t} + 1}{16}$$
Abbiamo poi
$$A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 16 & -8 \\ -8 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
ed infine dalla relazione 1 segue
$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} (1+t)\mathrm{e}^{4t} & \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{4t}(1+2t) - 1\right] & \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{4t}) \\ -t\mathrm{e}^{4t} & \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{4t}(1-2t) + 1\right] & \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{e}^{4t}) \\ -t\mathrm{e}^{4t} & \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{4t}(1-2t) - 1\right] & \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{4t}) \end{pmatrix}$$

5. È *necessario*[1] che
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$
Utilizzando il teorema dei residui, abbiamo
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{c_n}{1 + x^4 n^4} \overset{y=nx}{=} \frac{c_n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \frac{1}{1+y^4} = \frac{c_n \pi}{\sqrt{2}n}$$
ovvero
$$c_n = \frac{\sqrt{2}n}{\pi}$$

[1] Un modo di vederlo é considerare le funzioni test $g_\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, con $\alpha > 0$. Per la convergenza debole *è necessario che* $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f_n(x)g(x) = g(0) = 1$ Ora per n sufficentemente grande possiamo avere $\frac{1}{n} \ll x_0 \ll \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. L'integrale $\int_{-x_0}^{x_0} \mathrm{d}x\ f_n(x)g(x) \simeq g(0)\int_{-x_0}^{x_0} \mathrm{d}x\ f_n(x) \simeq g(0)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f_n(x)$ a meno di termini $\mathcal{O}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x_0^2})$ e $\mathcal{O}(c_n/(n^4 x_0^3))$. Assumendo che c_n non diverga troppo rapidamente con n entrambi i termini vanno a zero nei limiti $n \to \infty$ e $\alpha \to 0$ (si noti che la convergenza deve sussistere per tutte le funzioni test e quindi in particolare per tutti i valori di α). La condizione è quindi necessaria. Non è sufficiente poichè la convergenza non è dimostrata per tutte le funzioni test. **Si assume che queste considerazioni siano note e questa discussione è data qui per completezza, ma non è richiesta per la soluzione dell'esercizio.**

Ogni altra scelta di c_n equivalente alla precedente a meno di termini che si annullano nel limite $n \to \infty$ è ugualmente accettabile.

Dimostriamo ora la convergenza della successione f_n alla δ di Dirac nel senso delle distribuzioni (in senso debole). Occorre dimostrare che, $\forall g \in \mathcal{S}$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f_n(x) g(x) \right] - g(0) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f_n(x) [g(x) - g(0)] \right|$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrale su R di f_n e uno e portato la costante $g(0)$ all'interno del segno di integrale. Ora

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f_n(x)[g(x) - g(0)] \right| &\leq \left| \int_{|x|<a} \mathrm{d}x f_n(x)[g(x) - g(0)] \right| + \left| \int_{|x|>a} \mathrm{d}x f_n(x)[g(x) - g(0)] \right| \\ &= I_- + I_+ \end{aligned}$$

Per I_+ abbiamo

$$I_+ \leq \sup_{|x|>a} |g(x) - g(0)| \left| \int_{|x|>a} \mathrm{d}x f_n(x) \right| \leq \sup_{|x|>a} |g(x) - g(0)| \frac{c_n}{n^4 a^3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3 a^3} \right)$$

Poichè $g(x)$ è derivabile con derivata prima continua e limitata abbiamo

$$g(x) = g(0) + g'(\xi)x, \quad \xi \in [0, x]$$

Per I_- abbiamo pertanto

$$I_- \leq \sup_{|x|<a} |g'(x)| \int_{|x|<a} \mathrm{d}x |f_n(x)| \leq \sup_{|x|<a} |g'(x)| c_n \int_{|x|<a} x \mathrm{d}x = \sup_{|x|<a} |g'(x)| c_n a^2 = \mathcal{O}(a^2 n)$$

Ora *la scelta di* a *è arbitraria. Se possiamo scegliere* a *in modo tale che sia* $\mathcal{O}(a^2 n)$ *sia* $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3 a^3}\right)$ *siano infinitesimi nel limite* $n \to \infty$ abbiamo dimostrato la convergenza richiesta. È immediato verificare che se $a \sim n^{-\beta}$ con

$$a \sim n^{-\beta}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1$$

otteniamo il risultato voluto ed entrambi i contributi I_+ e I_- vanno a zero nel limite $n \to \infty$