Prova Scritta di Istituzioni di Met. Mat. della Fisica

Ferrara, venerdí 13 luglio 2012

1 Parte A

1.1 Esercizio A1

Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - 5z + 2}{(z-1)^2}$$

intorno al suo punto singolare. In base a tale sviluppo, si stabilisca il tipo di singolarità. Si verifichi direttamente che il residuo b_1 coincide con il coefficiente calcolato mediante la formula

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

fornita dal teorema di Laurent.

1.2 Esercizio A2

Si calcoli il residuo in ogni singolarità isolata della funzione

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{[z(z-3)]^2}$$

1.3 Esercizio A3

Si valuti la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{5ix}}{x^2+4}$$

2 Parte B

Una volta mostrato che i tre vettori

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono una base per $\mathbb{C}^3$,

- si costruisca a partire da tale base una base ortonormale $\mathbf{e}^{(i)}$ mediante il procedimento di Gram-Schmidt;
- si trovi quale matrice A soddisfa l'equazione (in cui j non è indice di somma):

$$A\mathbf{e}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{e}^{(j)} \qquad \text{con} \quad \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = i\ \lambda_3 = -i;$$

- si verifichi infine se A è una matrice unitaria.

Soluzione

A1 La singolarità di f è in $z = 1$. D'altra parte, si può riscrivere la funzione come

$$f(z) = \frac{(z-1)^2 - 3(z-1) - 2}{(z-1)^2} = 1 - \frac{3}{(z-1)} - \frac{2}{(z-1)^2}.$$

L'unico termine della parte analitica è $a_0 = 1$, mentre la parte principale è caratterizzata da $b_1 = -3$ e $b_2 = -2$. La singolarità è un polo del secondo ordine. Naturalmente la formula per il residuo è

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-1)^2}dz, \qquad \text{dove} \quad g(z) = z^2 - 5z + 2.$$

Ma $g(z)$ è analitica e pertanto possiamo usare la formula di Cauchy per le derivate:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-1)^2}dz = g'(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3.$$

A2 $z = 0$ è un polo del primo ordine, in base al limite notevole: $\dfrac{\sin z}{z} \to 1$ quando $z \to 0$. Conseguentemente,

$$\text{Res}\,(f(z);0) = \lim_{z\to 0} z \cdot \pi \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z} \cdot \frac{1}{z(z-3)^2} = \frac{\pi}{9}.$$

Anche in 3, f ha un polo del primo ordine perché si può esprimere come il rapporto $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ di due funzioni che hanno, rispettivamente, uno zero del primo ordine ($g = \sin \pi z$) e uno del secondo ($h(z) = z^4 + 9z^2 - 6z^3$) in $z = 3$. Dalla teoria sappiamo allora che il residuo si calcola secondo la formula

$$\text{Res}\,(f(z;3) = 2\frac{g'(3)}{h''(3)} = 2\frac{\pi \cos 3\pi}{18} = -\frac{\pi}{9}.$$

A3 Siccome $\omega = -5 < 0$, $|e^{5iz}| = e^{-5y} \leq 1$ nel semipiano superiore. Pertanto scegliamo come curva chiusa, la semicirconferenza γ percorsa in senso antiorario da $x = R$ a $x = -R$ e il tratto rettilineo sull'asse reale da $-R$ a R. L'unica singolarità contenuta nella regione delimitata da tale contorno è $z = 2i$, e usando il teorema dei residui e il lemma di Jordan, facilmente si ottiene, passando al limite per $R \to \infty$,

$$\hat{f}(-5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{5iz}}{(z+2i)(z-2i)}; 2i\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}e^{-10}.$$

B I vettori sono linearmente indipendenti perché la matrice formata da essi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a -1, dunque non è singolare.
Seguendo il procedimento di Gram-Schmidt, si ha:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} \Longrightarrow \mathbf{e}^{(1)} = \frac{\mathbf{u}^{(1)}}{||\mathbf{u}^{(1)}||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} - (\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)})\mathbf{e}^{(1)} \Longrightarrow \mathbf{e}^{(2)} = \frac{\mathbf{u}^{(2)}}{||\mathbf{u}^{(2)}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{v}^{(3)} - (\mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{e}^{(1)})\mathbf{e}^{(1)} - (\mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{e}^{(2)})\mathbf{e}^{(2)} \Longrightarrow \mathbf{e}^{(3)} = \frac{\mathbf{u}^{(3)}}{||\mathbf{u}^{(3)}||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per determinare A dall'equazione agli autovalori, si devono scrivere tre semplici equazioni, di cui qui si scrive solo la prima, relativa a $j = 1$, dunque con $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce $a_{11} + a_{12} = 1$, $a_{21} + a_{22} = 1$ e $a_{31} + a_{32} = 0$.
Al secondo autovalore corrispondono analogamente le condizioni $a_{11} - a_{12} = i$, $a_{21} - a_{22} = -i$, e, infine a $\lambda = -i$, $a_{13} = 0 = a_{23}$ e $a_{33} = -i$. Allora

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, come è immediato verificare,

$$AA^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che prova l'unitarietà della matrice. Si doveva inoltre notare che tutti gli autovalori sono di modulo unitario.