Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*
   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.
4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami.*
   - SI
   - NO

1 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z^6 - 1 + i} \mathrm{d}z$$

dove γ è la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -3+2i =$, $z_3 = -3 - 2i$ e $z_4 = 1 - 2i$ del piano complesso. (Si usi eventualmente la calcolatrice per determinare la localizzazione approssimativa dei poli nel piano complesso).

La funzione integranda $f(z)$,

$$f(z) = \frac{1}{z^6 - 1 + i}$$

è analitica su tutto il piano complesso fatta eccezione per gli zeri del denominatore. Il denominatore è un polinomio in z di sesto grado ed ammette al più sei radici distinte che sono poli della funzione integranda. Pertanto la funzione integranda ha un numero finito di singolarità (poli) al finito e possiamo applicare il teorema dei residui per calcolare l'integrale richiesto.

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}(f(z), z_j)$$

dove la somma è limitata alle singolarità *interne* alla curva γ.

I poli della funzione sono in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione

$$z^6 = 1 - i \Rightarrow z_k = 2^{1/12} \mathrm{e}^{i(7\pi/24 + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, \ldots, 5$$

Una semplice verifica numerica fornisce per i poli la seguente approssimazione

$$\begin{aligned} z_0 &= 0.65 + 0.84i, \ z_1 = -0.41 + 0.98i, \ z_2 = -1.05 + 0.14i, \\ z_3 &= -0.65 - 0.84i, \ z_4 = 0.41 - 0.98i, \ z_5 = 1.05 - 0.14i \end{aligned}$$

Dei sei poli trovati z_5 è esterno alla curva di integrazione gli altri poli sono interni, pertanto

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=0}^{4} \mathrm{Res}(f(z), z_j)$$

Poichè la funzione ha un numero finito di poli e il numero dei poli esterni al cammino di integrazione è significativamente inferiore al numero dei poli interni, è conveniente utilizzare la relazione:

$$\sum_{j=0}^{5} \mathrm{Res}(f(z), z_j) + \mathrm{Res}(f(z), \infty) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{4} \mathrm{Res}(f(z), z_j) = -\mathrm{Res}(f(z), z_5) - \mathrm{Res}(f(z), \infty) = \int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z$$

Si verifica immeriatamente che

$$\mathrm{Res}(f(z), \infty) = -\mathrm{Res}(1/t^2 f(1/t), 0) = 0$$

pertanto

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{Res}(f(z), z_5) = -2\pi i \lim_{z \to z_5} \frac{z - z_5}{z^6 - 1 + i} = -2\pi i \frac{1}{6 z_5^5}$$

dove si è utilizzato il teorema di De l'Hospital che, nel caso presente, semplifica notevolmente il calcolo del residuo.

2 Esercizio A2*

È data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\cos\left(1 + \frac{1}{z}\right)}$$

- *Si determini la regione di analiticità di $f(z)$*
- *Si calcolino i residui della funzione $f(z)$ nei suoi poli*
- *Si calcoli*
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
dove γ è il cerchio, centrato nell'origine, di raggio $r = 1$, percorso in senso antiorario.

La funzione $f(z)$ si può scrivere come

$$f(z) = \frac{2}{\exp\left(i + \frac{i}{z}\right) + \exp\left(-i - \frac{i}{z}\right)},$$

la funzione

$$\exp\left(\pm i \pm \frac{i}{z}\right) = \mathrm{e}^{\pm i}\mathrm{e}^{\pm i/z}$$

e' analitica su tutto il piano complesso eccettuato il punto $z = 0$ nel quale ha una singolarità essenziale, come si può facilmente verificare osservando che il limite per $z \to 0$ lungo l'asse immaginario è diverso se $z \to 0$ mantenendosi nel semipiano superiore o in quello inferiore.

Gli altri punti singolari per $f(z)$ corrispondono agli zeri del denominatore, ovvero

$$1 + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\pi(1 + 2k') \Rightarrow z_k = \frac{2}{1 + 2k} \quad k(= k' - 1) \in Z$$

Si ha

$$\lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{\cos\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\frac{1}{z_k^2}\sin\left(1 + \frac{1}{z_k}\right)} = (-1)^{k-1}\frac{4}{(1 + 2k)^2} = \mathrm{Res}(f, z_k)$$

pertanto i punti z_k sono poli semplici isolati della $f(z)$ e i residui sono dati nell'equazione precedente. I poli z_k si accumulano nell'intorno del punto $z = 0$ che pertanto è *una singolarità essenziale non isolata* della $f(z)$.

Per il calcolo dell'integrale osserviamo che all'interno del cammino di integrazione sono presenti infiniti poli ed una singolarità essenziale non isolata. All'esterno del cammino di integrazione è invece presente un solo polo ed occorre tenere in considerazione il comportamento della funzione all'infinito. Questo suggerisce di effettuare l'integrale cambiando il verso di percorrenza della curva. Formalmente questo si effettua operando il cambio di variabile $z \to 1/t$.

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

dove $\tilde{\gamma}$ è la curva di raggio unitario percorsa in senso *orario*.

Per convincersi dell'esattezza di questa formula si può studiare l'andamento di un incremento finito di z e t

$$\Delta t_j = (t_j + \Delta t_j) - t_j = \frac{1}{z_j + \Delta' z_j} - \frac{1}{z_j}$$

oppure utilizzare le proprietà degli integrali: in coordinate polari, utilizzando il fatto che la curva γ è una circonferenza con raggio costante,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{d}z\ f(z) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta i R \mathrm{e}^{i\theta} f\left(R\mathrm{e}^{i\theta}\right) \overset{\theta\to-\phi}{=} -\int_0^{-2\pi} \mathrm{d}\phi i R \mathrm{e}^{-i\phi} f\left(R\mathrm{e}^{-i\phi}\right) \\
&= -\int_0^{-2\pi} \mathrm{d}\left(R^{-1}\mathrm{e}^{i\phi}\right) \frac{1}{\left(R^{-1}\mathrm{e}^{i\phi}\right)^2} f\left(\frac{1}{R^{-1}\mathrm{e}^{i\phi}}\right) \overset{t=R^{-1}\mathrm{e}^{i\phi}}{=} -\int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{d}t\ \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}$$

dove $\tilde{\gamma}$ è la circonferenza di raggio $R_{\tilde{\gamma}} = 1/R_\gamma$ percorsa in senso *orario* (si noti che ϕ, nell'integrale, diminuisce).

Pertanto possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) = -\int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{d}t \frac{1}{t^2\cos(1+t)}$$

poiché la curva è percorsa in senso orario il dominio interno alla curva è $|t| > 1$ e su questo dominio non possiamo applicare il teorema dei residui in quanto comprende un numero infinito di poli nonchè la singolarità essenziale all'infinito. È tuttavia sufficiente invertire il verso di percorrenza della curva per ottenere

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{-\tilde{\gamma}} \mathrm{d}t \frac{1}{t^2\cos(1+t)}$$

dove adesso il dominio interno alla curva è $|t| < 1$. Su questo dominio la curva ha due poli in $t = 0$ e $t = \pi/2 - 1$ e pertanto

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{-\tilde{\gamma}} \mathrm{d}t g(t) = \int_{-\tilde{\gamma}} \mathrm{d}t \frac{1}{t^2\cos(1+t)} = 2\pi i[\mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Res}(g,\pi/2-1)]$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\cos(1+t)} = \frac{\sin(1)}{\cos^2(1)} \\
\mathrm{Res}(g,\pi/2-1) &= \lim_{t\to\pi/2-1}\frac{t-(\pi/2-1)}{t^2\cos(1+t)} = \lim_{t\to\pi/2-1}\frac{t-(\pi/2-1)}{(\pi/2-1)^2\cos(1+t)} \\
&= -\frac{1}{(\pi/2-1)^2\sin(1)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo di nuovo utilizzato il teorema di De l'Hospital per il calcolo del secondo termine.

3 Esercizio B1

Si costruisca un operatore con nucleo N

$$N = \{v \in C^3, \quad v = \lambda(1,i,0)^T, \quad \lambda \in C\}$$

e range R

$$R = \{v \in C^3, \quad v = \lambda_1(2,0,i)^T + \lambda_2(0,i,i)^T, \quad \lambda_j \in C\}.$$

Si dica se l'operatore così costruito è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino autovalori e proiettori che realizzano il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore.

Il modo più semplice di costruire l'operatore richiesto è di farlo nella base dei vettori di base del Range e del Nucleo

$$\psi_1 = (2,0,i)^T, \quad \psi_2 = (0,i,i)^T, \quad \psi_3 = (1,i,0)^T,$$

In questa base l'operatore richiesto è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato infatti $\psi = c_j\psi_j$

$$\begin{aligned}
A\psi &= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2)\psi_1 + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2)\psi_2 \\
A\psi_3 &= 0
\end{aligned}$$

L'unica richiesta sugli a_{jj} è che

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

in caso contrario il nucleo avebbe dimensione maggiore di uno e il range inferiore a due.

La scelta più semplice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operatore cercato, nella base canonica, è

$$A' = TAT^{-1}$$

dove T è la trasformazione dalla base $\{\psi_j\}$ alla base canonica

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & i & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -1 & -i & -2i \\ 1 & -2i & 2i \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2i & -2i \\ -i & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A' è un proiettore, pertanto è diagonalizzabile ed ha autovalori $\lambda = 1$ con molteplicità due e $\lambda = 0$ con molteplicità uno. Il teorema di decomposizione spettrale è immediatamente realizzato con

$$P_1 = A' \quad P_0 = I - P_1 \quad A' = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1$$

4 Esercizio B2

È dato l'operatore

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2+4i & 1-2i & 1-2i \\ 2-4i & 4+2i & 4+2i \end{pmatrix}$$

Si determinino Nucleo e Range di A. Si determinino gli autovalori di A e i proiettori che realizzano la decomposizione spettrale. Si verfichi esplicitamente che il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A è soddisfatto

Il polinomio caratteristico è

$$p_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda)$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 0$$

I proiettori che realizzano il teorema di decomposizione spettrale sono

$$P_5 = \frac{-A}{-5} \quad P_0 = \frac{5I - A}{5}$$

per i quali vale

$$\begin{aligned} I &= P_0 + P_5 \\ A' &= 0 \cdot P_0 + 5 \cdot P_5 \end{aligned}$$

5 Esercizio B3*

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y = Ay; \quad y(t = 0) = (1, 0, -1)^T$$

dove A è l'operatore dell'esercizio B2.

La soluzione richiesta è

$$y = \mathrm{e}^{At} y(0)$$

Avendo già determinato la decomposizione spettrale dell'operatore il modo più semplice di determinarne l'esponenziale è di osservare che

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_j \mathrm{e}^{\lambda_j t} P_j = \mathrm{e}^{5t} \frac{1}{5} A + \mathrm{e}^0 P_0$$

Alternativamente possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= a_0 I + a_1 t A + a_2 t^2 A \\ 1 &= a_0 \\ \mathrm{e}^{5t} &= a_0 + 5 a_1 t + 25 a_2 t^2 \\ \mathrm{e}^{5t} &= a_0 + a_1 + 10 a_2 t \end{aligned}$$

ovvero

$$a_0 = 1, \quad ta_1 = \frac{2 - e^{5t} + 5te^{5t}}{5}, \quad t^2 a_2 = \frac{1 - e^{5t} + 5te^{5t}}{25}$$

e si può verificare che si ottiene lo stesso risultato.

6 Esercizio B4*

É data la distribuzione regolare

$$\rho(x) = |sin(x^2 - 1)|$$

sullo spazio σ delle funzioni test

$$\sigma = \{f \in C^2[-3, 3], \quad f(\pm 3) = f'(\pm 3) = 0\}$$

si determinino ρ' e ρ''.

La funzione $\rho(x)$ non é derivabile per $x = \pm\sqrt{m\pi + 1}$ con $m \in N,\ m \geq 0$. Per determinare $\rho'(x)$ ricorriamo pertanto alla definizione di derivata per una distribuzione.

$$\rho'(f) = -\rho(f') = -\int_{-3}^{3} \rho(x) f'(x)\ \mathrm{d}x$$

Per poter determinare la forma esplicita di ρ' dobbiamo scriverla sotto forma di un funzionale che agisce su f e non su f'. A questo scopo utilizziamo la tecnica di integrazione per parti *spezzando l'intervallo di integrazione in intervalli sui quali ρ è derivabile*:

$$\begin{aligned}
-\int_{-3}^{3} \rho(x) f'(x)\ \mathrm{d}x &= -\int_{-3}^{-\sqrt{2\pi+1}} \sin(x^2 - 1) f'(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} sin(x^2 - 1) f'(x)\ \mathrm{d}x + \dots \\
&= -\sin(x^2 - 1) f(x)\Big|_{-3}^{-\sqrt{2\pi+1}} + \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} 2x\cos(x^2 - 1) f(x)\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \sin(x^2 - 1) f(x)\Big|_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} - \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} 2x\cos(x^2 - 1) f(x)\ \mathrm{d}x + \dots \\
&= \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} 2x\cos(x^2 - 1) f(x) + \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} + \dots \\
&= \int_{-3}^{3} g_\rho(x) f(x)
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $f \in \sigma \Rightarrow f(\pm 3) = 0$

$$\begin{aligned} g_\rho(x) &= \begin{cases} g_1(x) = 2x\cos(x^2-1) & x \in I \\ g_2(x) = -2x\cos(x^2-1) & x \notin I \end{cases} \\ I &= [-3, -\sqrt{2\pi+1}] \cup [-\sqrt{\pi+1}, -1] \cup [1, \sqrt{\pi+1}] \cup [\sqrt{2\pi+1}, 3] \end{aligned}$$

e

$$\rho' = g_\rho$$

nel senso delle distribuzioni.

Per determinare ρ'' procediamo allo stesso modo

$$\begin{aligned} \rho'' f &= -\rho'(f') = -\int_{-3}^{-\sqrt{2\pi+1}} g_1 f' \,\mathrm{d}x - \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} 2g_2 f' \,\mathrm{d}x + \ldots \\ &= -g_1(-\sqrt{2\pi+1})f(-\sqrt{2\pi+1}) + g_2(-\sqrt{2\pi+1})f(-\sqrt{2\pi+1}) \\ &\quad + \int_{-3}^{-\sqrt{2\pi+1}} g_1' f \,\mathrm{d}x + \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} g_2' f \,\mathrm{d}x + \ldots \\ &= [g_2(-\sqrt{2\pi+1}) - g_1(-\sqrt{2\pi+1})]\delta_{-\sqrt{2\pi+1}}(f) + \int_{-3}^{-\sqrt{2\pi+1}} g_1' f \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{-\sqrt{2\pi+1}}^{-\sqrt{\pi+1}} g_2' f \,\mathrm{d}x + \ldots \\ &= [A_1\delta_{-\sqrt{2\pi+1}} + A_2\delta_{-\sqrt{\pi+1}} + A_3\delta_{-1} + A_4\delta_1 A_5\delta_{\sqrt{\pi+1}} + A_6\delta_{\sqrt{2\pi+1}}](f) + \\ &\quad \int_{-3}^{3} h_\rho(x) f(x) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} h_\rho(x) &= \begin{cases} h_1(x) = g_1' & x \in I \\ x h_2(x) = g_2' & x \notin I \end{cases} \\ A_1 &= A_6 = 4\sqrt{2\pi-1} \\ A_2 &= A_5 = 4\sqrt{\pi-1} \\ A_3 &= A_4 = 4 \end{aligned}$$

7 Esercizio B5*

Si consideri l'operatore $O : l_2 \to l_2$,

$$O(\{a_n\}) = \{b_n\}$$

$$b_{2m} = \frac{1}{m^2} a_{2m-1}$$
$$b_{2m-1} = \frac{1}{m^2} a_{2m}$$

Dove $m \in N$ e $m > 0$. Si dimostri che O é compatto ed autoaggiunto e se ne ricavi lo spettro.

Si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||Oe_j|| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \in R$$

ovvero la sommatorie delle norme di una base ortonormale di l_2 converge e questa è una condizione *sufficiente* per la compattezza di O.

Siano ora $y = \{y_n\}$ ed $x = \{x_n\}$ due successioni di l_2

$$x \in l_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \in R$$

Abbiamo:

$$(y, Ox) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{2k+1} x_{2k} \frac{1}{k^2} + y_{2k} x_{2k+1} \frac{1}{k^2} = (Oy, x) \Rightarrow O = O^{\dagger}$$

Notiamo che l'operatore è "diagonale a blocchi"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

gli autovettori v_λ e relativi autovalori λ di O sono pertanto

$$\begin{aligned} v_{\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, \pm 1, 0, 0, \dots\} \\ v_{\pm 1/4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{0, 0, 1, \pm 1, 0, 0, \dots\} \\ v_{\pm 1/k^2} &= \{w_n^{(\pm k)}\} \quad w_n^{(\pm k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\delta_{2k,n} \pm \delta_{2k+1,n}\right). \end{aligned}$$

Gli autovettori sono una base ortonormale di l_2, gli autovalori sono tutti non degeneri e ammettono $\lambda = 0$ come punto di accumulazione. Il punto $\lambda = 0$ è un punto (l'unico) dello spettro continuo di O, è infatti immediato dimostrare che l'unica soluzione di $Ov = 0$ è $v = 0$.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*

2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*

3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*

   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.

4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami.*

   - SI
   - NO

8 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^8 - 3 + i)} \mathrm{d}z$$

dove γ è la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -3+2i =$, $z_3 = -3 - 2i$ e $z_4 = 1 - 2i$ del piano complesso. (Si usi eventualmente la calcolatrice per determinare la localizzazione approssimativa dei poli nel piano complesso).

9 Esercizio A2*

È data la funzione

$$f(z) = \tan\left(1 + \frac{2}{(z-1)}\right)$$

- Si determini la regione di analiticità di $f(z)$
- si individuino e si classifichino le singolaritá di $f(z)$

- Si calcolino i residui della funzione $f(z)$ nei suoi poli
- Si calcoli

  $$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

  dove γ è il cerchio, centrato in $z_0 = 1$, di raggio $r = 1$, percorso in senso antiorario.

10 Esercizio B1

Si costruisca un operatore con nucleo N

$$N = \{v \in C^3, \quad v = \lambda(0,1,1)^T, \quad \lambda \in C\}$$

e range R

$$R = \{v \in C^3, \quad v = \lambda_1(2,0,i)^T + \lambda_2(i,i,i)^T, \quad \lambda_j \in C\}.$$

Si dica se l'operatore così costruito è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino autovalori e proiettori che realizzano il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore.

11 Esercizio B2

È dato l'operatore

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2i & 1 & i \\ 2 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino Nucleo e Range di A. Si determinino gli autovalori di A e i proiettori che realizzano la decomposizione spettrale. Si verfichi esplicitamente che il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A è soddisfatto

12 Esercizio B3*

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = Ay; \quad y(t=0) = (1,0,-1)^T$$

dove A è l'operatore dell'esercizio B2.

13 Esercizio B4*

É data la distribuzione regolare

$$\rho(x) = |x^2 - 3x + 2|$$

sullo spazio σ delle funzioni test

$$\sigma = \{f \in C^2[-3,3], \quad f(\pm 3) = f'(\pm 3) = 0\}$$

si determinino ρ' e ρ''.

14 Esercizio B5*

Si consideri l'operatore $O : l_2 \to l_2$,

$$\begin{aligned} O(\{a_n\}) &= \{b_n\} \\ b_{2m} = \frac{1}{m^4+1} a_{2m-1} \\ b_{2m-1} = \frac{m}{m^4+1} a_{2m} \end{aligned}$$

Dove $m \in N$ e $m > 0$. Si dimostri che O é compatto ed autoaggiunto e se ne ricavi lo spettro.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*
   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.
4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami.*
   - SI
   - NO

15 Esercizio A1

Si determini l'integrale
$$\int_\gamma \frac{1}{(z^8 - 1 - 5i)} \mathrm{d}z$$
dove γ è la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -3+2i =$, $z_3 = -3 - 2i$ e $z_4 = 1 - 2i$ del piano complesso. (Si usi eventualmente la calcolatrice per determinare la localizzazione approssimativa dei poli nel piano complesso).

16 Esercizio A2*

È data la funzione
$$f(z) = \frac{1}{\sinh\left(1 + \frac{2}{(z+i)}\right)}$$

- Si determini la regione di analiticità di $f(z)$
- si individuino e si classifichino le singolaritá di $f(z)$

- Si calcolino i residui della funzione $f(z)$ nei suoi poli
- Si calcoli
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
dove γ è il cerchio, centrato in $z_0 = -i$, di raggio $r = 1$, percorso in senso antiorario.

17 Esercizio B1

Si costruisca un operatore con nucleo N
$$N = \{v \in C^3, \quad v = \lambda(1,1,1)^T, \quad \lambda \in C\}$$
e range R
$$R = \{v \in C^3, \quad v = \lambda_1(1,i,0)^T + \lambda_2(i,-1,0)^T, \quad \lambda_j \in C\}.$$
Si dica se l'operatore così costruito è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino autovalori e proiettori che realizzano il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore.

18 Esercizio B2

È dato l'operatore
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-i & 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$
Si determinino Nucleo e Range di A. Si determinino gli autovalori di A e i proiettori che realizzano la decomposizione spettrale. Si verfichi esplicitamente che il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A è soddisfatto

19 Esercizio B3*

Si risolva l'equazione differenziale
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y = Ay; \quad y(t=0) = (1,0,-1)^T$$
dove A è l'operatore dell'esercizio B2.

20 Esercizio B4*

É data la distribuzione regolare

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{|x^2-3x+2|}$$

sullo spazio σ delle funzioni test

$$\sigma = \{f \in C^2[-3,3], \quad f(\pm 3) = f'(\pm 3) = 0\}$$

si determinino ρ' e ρ''.

21 Esercizio B5*

Si consideri l'operatore $O : l_2 \to l_2$,

$$\begin{aligned} O(\{a_n\}) &= \{b_n\} \\ b_{2m} &= \frac{1}{m^4}a_{2m} + \frac{1}{m^2}a_{2m-1} \\ b_{2m-1} &= \frac{1}{m^4}a_{2m-1} + \frac{1}{m^2}a_{2m} \end{aligned}$$

Dove $m \in N$ e $m > 0$. Si dimostri che O é compatto ed autoaggiunto e se ne ricavi lo spettro.

.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*
   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.
4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami.*
   - SI
   - NO

22 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^6+4)} \mathrm{d}z$$

dove γ è la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 + i =$, $z_3 = -3 - 3i$ e $z_4 = 1 - 3i$ del piano complesso. (Si usi eventualmente la calcolatrice per determinare la localizzazione approssimativa dei poli nel piano complesso).

23 Esercizio A2*

È data la funzione

$$f(z) = \tanh\left(5 + \frac{1}{z}\right)$$

- Si determini la regione di analiticità di $f(z)$
- si individuino e si classifichino le singolaritá di $f(z)$

- Si calcolino i residui della funzione $f(z)$ nei suoi poli
- Si calcoli
$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z$$
dove γ è il cerchio, centrato in $z_0 = 0$, di raggio $r = 1$, percorso in senso antiorario.

24 Esercizio B1

Si costruisca un operatore con nucleo N

$$N = \{v \in C^3, \quad v = \lambda(1, i, 0)^T, \quad \lambda \in C\}$$

e range R

$$R = \{v \in C^3, \quad v = \lambda_1(1, i, i)^T + \lambda_2(i, 0, 1)^T, \quad \lambda_j \in C\}.$$

Si dica se l'operatore così costruito è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino autovalori e proiettori che realizzano il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore.

25 Esercizio B2

È dato l'operatore

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1+i & 2+2i & -2+2i \\ -1+i & -2-2i & 2-2i \end{pmatrix}$$

Si determinino Nucleo e Range di A. Si determinino gli autovalori di A e i proiettori che realizzano la decomposizione spettrale. Si verfichi esplicitamente che il teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A è soddisfatto

26 Esercizio B3*

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y = Ay; \quad y(t=0) = (1, 0, -1)^T$$

dove A è l'operatore dell'esercizio B2.

27 Esercizio B4*

É data la distribuzione regolare

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{|2x^2-5x+2|}$$

sullo spazio σ delle funzioni test

$$\sigma = \{f \in C^2[-3,3], \quad f(\pm 3) = f'(\pm 3) = 0\}$$

si determinino ρ' e ρ''.

28 Esercizio B5*

Si consideri l'operatore $O : l_2 \to l_2$,

$$\begin{aligned} O(\{a_n\}) &= \{b_n\} \\ b_{2m} &= \frac{1}{m^4}a_{2m} + \frac{1}{m^4}a_{2m-1} \\ b_{2m-1} &= \frac{1}{m^4}a_{2m} \end{aligned}$$

Dove $m \in N$ e $m > 0$. Si dimostri che O é compatto ed autoaggiunto e se ne ricavi lo spettro.