Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 15/09/2009

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
- *Si esegua almeno un esercizio di tipo A ed uno di tipo B*

1 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x) - \cos x}{x^4 + 2} \mathrm{d}x$$

Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^4 + 2} \mathrm{d}x = 0$$

poichè la funzione integranda è dispari.

Per il termine rimanente abbiamo

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{x^4 + 2} \mathrm{d}x \right) = -\frac{1}{2} \left(\mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_- \right) = -\mathcal{I}_+$$

L'ultimo passaggio è giustificato dall'osservazione che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{x^4 + 2} \mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$

in quanto la funzione integranda è dispari. Dalla relazione 1 otteniamo immediatamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^4 + 2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ix}}{x^4 + 2} \mathrm{d}x$$

Ci rimane da valutare soltanto

$$\mathcal{I}_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^4 + 2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

Possiamo prolungare analiticamente la funzione integranda ed utilizzare il cammino di integrazione mostrato in figura 1. Abbiamo

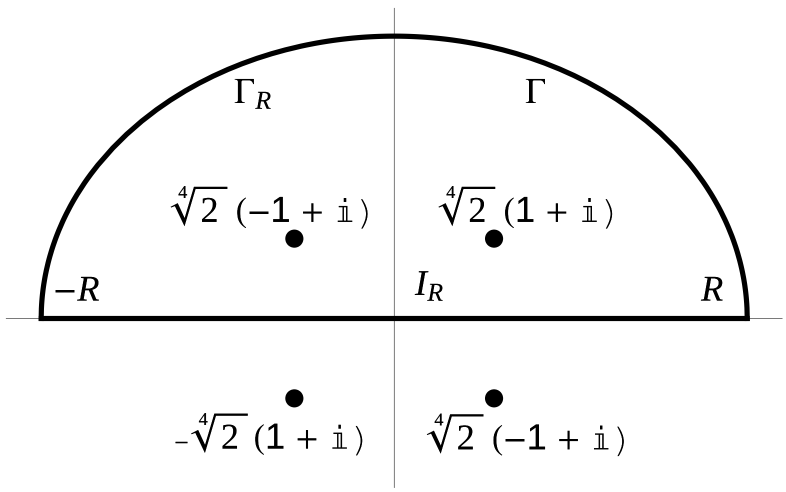

Figure 1: Cammino di integrazione utilizzato per il calcolo dell'integrale richiesto. L'integrale richiesto è uguale all'integrale su I_R. L'integrale su Γ_R si annulla nel limite $R \to \infty$ per il lemma di Jordan e pertano l'integrale su I_R (uguale all'integrale su Γ) è dato dalla somma sui residui nei poli del semipiano superiore.

$$
\begin{aligned}
2\pi i(\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2) &= 2\pi i\left\{\mathrm{R}es[f,z=2^{-1/4}(-1+i)]+\mathrm{R}es[f,z=2^{-1/4}(1+i)]\right\}\\
&= \int_{I_R}+\int_{\Gamma_R}\overset{R\to\infty}{=}\mathcal{I}_+
\end{aligned}
$$

poichè $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}=0$ per il lemma di Jordan.

Per i residui abbiamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \frac{1-i}{8\cdot 2^{1/4}}\mathrm{e}^{-2^{-1/4}(1+i)}\\
\mathcal{R}_2 &= -\frac{1+i}{8\cdot 2^{1/4}}\mathrm{e}^{2^{-1/4}(-1+i)}\\
\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2 &= \frac{-2i\mathrm{e}^{-2^{-1/4}}}{8\cdot 2^{1/4}}\left[\cos\left(2^{-1/4}\right)+\sin\left(2^{-1/4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ed infine l'integrale cercato è

$$
-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+2}\mathrm{d}x=-\mathcal{I}_+=\frac{-4\pi\mathrm{e}^{-2^{-1/4}}}{8\cdot 2^{1/4}}\left[\cos\left(2^{-1/4}\right)+\sin\left(2^{-1/4}\right)\right]
$$

2 Esercizio A2

Si calcoli la funzione $F(z)$

$$
F(z)=\int_\gamma\frac{w}{(w+1-i)(w-z)}\mathrm{d}w
$$

dove γ è il segmento che congiunge i punti $w_1=-i$ e $w_2=1$ del piano complesso. Si discutano in particolare il dominio di analiticità di $F(z)$ e il limite per $z\to\xi_\gamma$, dove $\xi_\gamma\in\gamma$.

3 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$
F(z)=\int_0^1 x^z(1-x)^{1-z}
$$

Si determini l'espressione di $F(z)$ il suo dominio di analiticità, se ne classifichino le singolarità e se ne determini il prolungamento analitico.

4 Esercizio B1

Si valuti la funzione vettoriale $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned} y(t) &= Ay(t) \\ y(0) &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 2i & \frac{9}{2} - \frac{7}{2}i \\ 1+i & 4-2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5 Esercizio B2

Si determini la matrice R che rappresenta una rotazione oraria di $\pi/6$ attorno al vettore

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento: Si scriva R nella base in cui risulta più semplice e si effettui successivamente l'opportuno cambiamento di base.)

6 Esercizio B2a

Si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore R ottenuto nel problema precedente.

7 Esercizio B3

Si consideri l'operatore lineare

$$O : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ O(f) = \int_0^1 |t-s| f(s) \mathrm{d}s.$$

Se ne discuta lo spettro.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
- *Si esegua almeno un esercizio di tipo A ed uno di tipo B*

8 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - i\cos x}{x^3 + i}\mathrm{d}x$$

9 Esercizio A2

Si calcoli la funzione $F(z)$

$$F(z) = \int_\gamma \frac{1-w}{(w+3i)(w-z)}\mathrm{d}w$$

dove γ *è il segmento che congiunge i punti* $w_1 = 1 + i$ *e* $w_2 = 2 - i$ *del piano complesso. Si discutano in particolare il dominio di analiticità di* $F(z)$ *e il limite per* $z \to \xi_\gamma$, *dove* $\xi_\gamma \in \gamma$.

Dai teoremi noti relativi alla rappresentazione integrale in esame sappiamo che

- $F(z)$ è analitica $\forall z,\ z \notin \gamma$.
- $F(z)$ è singolare negli estremi dell intervallo.
- Se $\xi \in \gamma$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\xi_+} F(z) - \lim_{z\to\xi_-} F(z) &= g(\xi)\\ g(\xi) &= \frac{1-\xi}{(\xi+3i)}\end{aligned}$$

  dove per $\lim_{z\to\xi_{+(-)}} F(z)$ si intende il limite per $z \to \xi$ lungo una qualunque direzione che non sia tangente a γ in ξ e che si avvicini a ξ da sinistra (destra) rispetto al verso di percorrenza della curva.

Possiamo riscrivere $F(z)$ come

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \int_\gamma \left(\frac{1-z}{(z+3i)(w-z)} - \frac{1+3i}{(w+3i)(z+3i)} \right) \mathrm{d}w \\
&= \frac{1-z}{z+3i} \int_\gamma \frac{1}{w-z} \mathrm{d}w - \frac{1+3i}{z+3i} \int_\gamma \frac{1}{w+3i} \mathrm{d}w = G(z) + \frac{\chi}{z+3i} \\
G(z) &= \frac{1-z}{z+3i} \int_\gamma \frac{1}{w-z} \mathrm{d}w \\
\chi &= -(1+3i) \int_\gamma \frac{1}{w+3i} \mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

Notiamo preliminarmente che il calcolo di χ non è necessario. Sappiamo infatti che $F(z)$ è analitica ovunque eccettuato il segmento $w_1 - w_2$ e in particolare è analitica in $z = -3i$. Poichè la funzione

$$
\frac{\chi}{z+3i}
$$

ha un polo semplice in $z = -3i$, questa singolarità deve essere cancellata da una singolarità analoga di $G(z)$; ovvero $G(z)$ ha un polo semplice in $z = -3i$ e $Res[G(z), z = -3i] = -\chi$.

Valutiamo comunque χ per due motivi: *i*) costituisce un utile controllo dell'esattezza del calcolo *ii*) il calcolo di χ è un utile introduzione al calcolo di $G(z)$ che è più complesso e coinvolge un maggiore numero di sottigliezze.

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\chi &= -(1+3i) \int_\gamma \frac{1}{w+3i} \mathrm{d}w \overset{w \to 1+i+(1-2i)t}{=} -(1+3i)(1-2i) \int_0^1 \frac{1}{t+1+(-2t+4)i} \mathrm{d}t \\
&= -(7+i) \int_0^1 \frac{t+1(2t-4)i}{5t^2-14t+17} \mathrm{d}t = \frac{1+3i}{2} \left[\log \frac{17}{8} + 2i \left(\arctan \frac{7}{6} - \arctan \frac{1}{3} \right) \right]
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo utilizzato

$$
\begin{aligned}
\int \frac{at+b}{ct^2+dt+e} \mathrm{d}t &= \frac{b-ad_1}{c\sqrt{e_1-d_1^2}} \arctan \frac{d_1+x}{\sqrt{e_1-d_1^2}} + \frac{a}{2c} \log(ct^2+dt+e) \quad (e_1 > d_1^2) \\
d_1 &= \frac{d}{2c} \\
e_1 &= \frac{e}{c}
\end{aligned}
$$

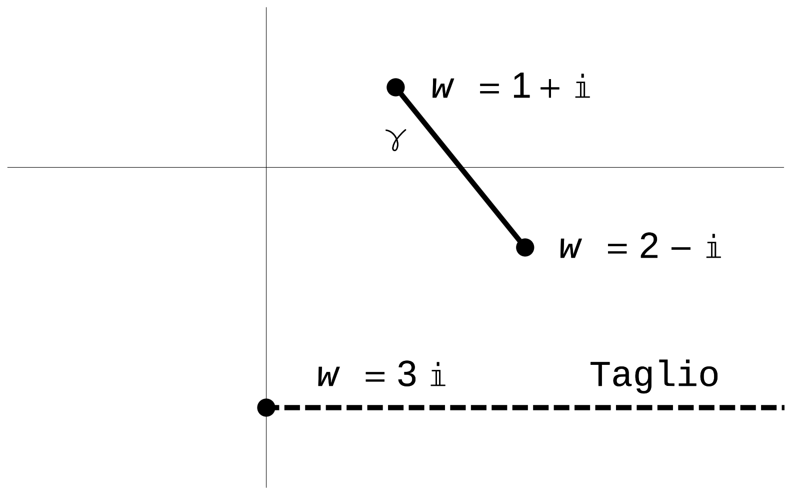

Figure 2: Dominio utilizzato per l'integrazione della funzione $1/(w+3i)$. Al fine di ottenere un dominio semplicemente connesso e poter così utilizzare il teorema integrale di Cauchy, il piano complesso viene privato di una semiretta, trateggiata in figura, con origine nel polo della funzione integranda. La scelta del taglio è arbitraria e vincolata solo al fatto che la curva γ sia all'interno del dominio così costruito.

Il calcolo è semplice, tuttavia un pò involuto dal punto di vista algebrico. Vediamo come si può procedere cercando direttamente una "primitiva" della funzione integranda in campo complesso.

Notiamo preliminarmente che la funzione integranda ha un polo in $w = -3i$, pertanto il suo dominio non è semplicemente connesso e non possiamo utilizzare il teorema integrale di Cauchy per concludere che l'integrale è indipendente dalla curva che connette gli estremi di integrazione e trovare di conseguenza una primitiva. Per i nostri scopi è tuttavia sufficiente che la funzione integranda sia analitica su un dominio semplicemente connesso che contiene la curva γ.

A questo scopo possiamo *tagliare il piano complesso* lungo la semiretta $z = x - 3i$, $x \geq 0$, come indicato in fig. 2. Sul piano complesso privato di questa semiretta la funzione integranda è infatti analitica e il dominio così definito è semplicemente connesso. Sul dominio così definito la primitiva di

$1/(w+3i)$ è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(w) &= \log(w+3i) = \log|w+3i| + i\arctan\frac{w_I+3}{w_R} + i\phi \\
\phi &= \begin{cases} 0 & w_R > 0,\ w_I+3>0 \\ \pi & w_R < 0 \\ 2\pi & w_R<0,\ w_I+3<0 \end{cases} \\
w &= w_I + iw_R
\end{aligned}
$$

e il risultato cercato è

$$
\begin{aligned}
-(1+3i)\int_\gamma \frac{1}{w+3i}\mathrm{d}w &= -(1+3i)[\mathcal{P}(w_2)-\mathcal{P}(w_1)] \\
&= -(1+3i)\left\{\log\left|\frac{2+2i}{1+4i}\right| + i\,[\arctan(1)-\arctan(4)]\right\} \\
&= -(1+3i)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{17}{8} + i\left[\arctan(4)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizzando identità trigonometriche o direttamente con una calcolatrice è immediato verificare che l'espressione ottenuta coincide con la precedente.

Ripetiamo nuovamente che la scelta del taglio è largamente arbitraria, l'unica richiesta è che il dominio così ottenuto contenga interamente la curva γ al suo interno. In fig. 3 mostriamo una possibilità alternativa. Con questa scelta la nuova primitiva di $1/(w+3i)$ è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(w) &= \log(w+3i) = \log|w+3i| + i\arctan\frac{w_I+3}{w_R} + i\phi \\
\phi &= \begin{cases} 0 & w_R < 0,\ w_I+3<-w_R \\ \pi & w_R > 0 \\ 2\pi & w_R<0,\ w_I+3>-w_R \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{P}_1(w)$ è singolare in $w=-3i$, *discontinua* lungo la semiretta $w_I=-3-w_R$, $w_R<0$, e analitica altrove (si noti che ϕ è definito in modo da eliminare la discontinuità della funzione arcotangente lungo l'asse immaginario $w_R=0$). È immediato verificare che utilizzando la nuova primitiva abbiamo nuovamente

$$
-(1+3i)\int_\gamma \frac{1}{w+3i}\mathrm{d}w = -(1+3i)[\mathcal{P}_1(w_2)-\mathcal{P}_1(w_1)]
$$

Si noti che $\mathcal{P}(w)-\mathcal{P}_1(w)$ *non è una costante.*

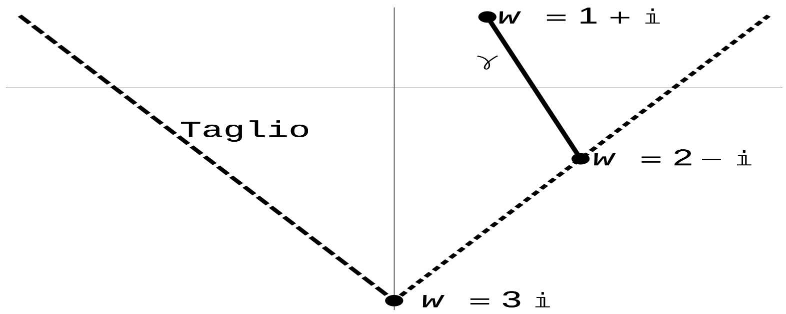

Figure 3: Un altro possibile dominio, alternativo a quello di fig. 2 utilizzabile per l'integrazione della funzione $1/(w+3i)$. Il taglio scelto è indicato con la linea trateggiata. Con la linea punteggiata indichiamo invece un taglio "non corretto": attraversa la curva γ e pertanto l'integrale su questa curva, nel dominio così definito, non dipende solo dagli estremi della curva.

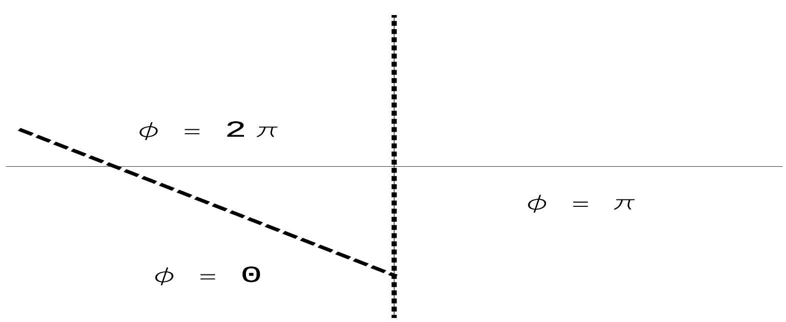

Figure 4: La funzione $\log(w + 3i)$ analitica sul dominio di fig. 3. $\log(w + 3i) = \log|w + 3i| + i \arctan \frac{w_I+3}{w_R} + i\phi$

Si può verificare esplicitamente che se si definisce il logaritmo tagliando il piano complesso lungo la linea punteggiata di figura 3 *non si ottiene* una buona primitiva della funzione integranda e non si riottiene il risultato corretto.

Procediamo ora al calcolo di $G(z)$. Ripetiamo nuovamente che ai fini della soluzione dell'esercizio questo è il solo calcolo necessario. Valutiamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w \quad &\overset{w\to 1+i+(1-2i)t}{=} \quad (1-2i)\int_0^1 \frac{1}{(t+1+z_R)+i(-2t+1+z_I)} \\
&= \quad (1-2i)\int_0^1 \frac{(t+1+z_R)-i(-2t+1+z_I)}{(t+1+z_R)^2+(-2t+1+z_I)^2} \\
&= \quad \frac{1}{2}\log\frac{(z_R-2)^2+(z_I+1)^2}{(z_R-1)^2+(z_I-1)^2} \\
&\quad\quad +i\left(\arctan\frac{4+2z_I-z_R}{-3+z_I+2z_R}-\arctan\frac{1-2z_I+z_R}{3-z_I-2z_R}\right)
\end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}
G(z) \quad = \quad & \frac{1-z}{z+3i}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(z_R-2)^2+(z_I+1)^2}{(z_R-1)^2+(z_I-1)^2}\right. \\
& \left. +i\left(\arctan\frac{4+2z_I-z_R}{-3+z_I+2z_R}-\arctan\frac{1-2z_I+z_R}{3-z_I-2z_R}\right)\right] \qquad (2)
\end{aligned}$$

Si può verificare, per sostituzione diretta, che $Res[G(z), z=-3i] = -\chi$.

Il calcolo precedente è piuttosto involuto ed è più conveniente ricorrere ad una primitiva della funzione

$$f_z(w) = \frac{1}{w-z}$$

Per z fissato la funzione f_z è analitica ovunque eccettuato il punto $w = z$. Per introdurre una primitiva di f_z occorre individuare un dominio *semplicemente connesso* della f_z. A questo scopo si può operare un *taglio* del piano complesso, ovvero si esclude dal dominio una curva che congiunga il punto singolare con l'infinito. La scelta della curva è completamente arbitraria. La scelta più semplice è una semiretta con origine in $w = z$. Per ogni dato valore di z la semiretta deve essere scelta in modo che la curva γ sia interna al dominio di analiticità della f_z *ovvero il taglio non deve intersecare* γ. Con queste avvertenze la primitiva cercata è

$$\mathcal{I}_{fz} = \log(w-z)$$

e l'integrale richiesto è

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w = \log\left(\frac{w_2-z}{w_1-z}\right)$$

dove è tuttavia necessaria una prescrizione per definire il logaritmo. Le considerazioni di carattere generale fatte in precedenza ci consentono di determinare tale prescrizione per ogni differente valore di z, tuttavia la scelta del taglio va effettuata per ogni nuovo valore di z ed è pertanto poco utile dal punto di vista pratico.

Possiamo tuttavia utilizzare le proprietà di $F(z)$ (ovvero di essere discontinua lungo il segmento w_1-w_2 ed analitica altrove) per individuare una prescrizione generale per il logaritmo: se definiamo $\log(w_1 - z)$ sul piano complesso privato della semiretta con origine $z = w_1$ e passante per w_2 e $\log(w_2 - z)$ sulla semiretta con origine $z = w_2$ lungo la direzione da w_1 a w_2, così come mostrato in figura 5, otteniamo il risultato cercato. Infatti i due logaritmi così definiti hanno una discontinuità di $2\pi i$ lungo i rispettivi tagli. Tali discontinuità tuttavia si sommano a zero lungo le porzioni dei tagli che si sovrappongono poichè i due logaritmi compaiono con i segni opposti. La discontinuità rimane invece lungo il segmento da w_1 a w_2 poichè uno solo dei due logaritmi è discontinuo lungo tale segmento.

Più specificatamente possiamo porre

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \log(z+w_1) = \log(z_R + iz_I + 1 + i) = \log\rho_1 + i\theta_1 \qquad (3)\\
\rho_1 &= \sqrt{(z_R+1)^2 + (z_I+1)^2}\\
\theta_1 &= \arctan\left(\frac{z_I+1}{z_R+1}\right) + \phi_1\\
\phi_1 &= \begin{cases} 0 & z_R > -1;\ z_I > -1\\ \pi & z_R < -1\\ 2\pi & z_I - 1 < -2(z_R-1) < 0\\ 0 & 0 > z_I - 1 > -2(z_R - 1)\end{cases}
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= \log(z+w_2) = \log\rho_2 + i\theta_2 \qquad (4)\\
\rho_2 &= \sqrt{(z_R+2)^2 + (z_I-1)^2} \qquad (5)\\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{z_I-1}{z_R+2}\right) + \phi_2
\end{aligned}$$

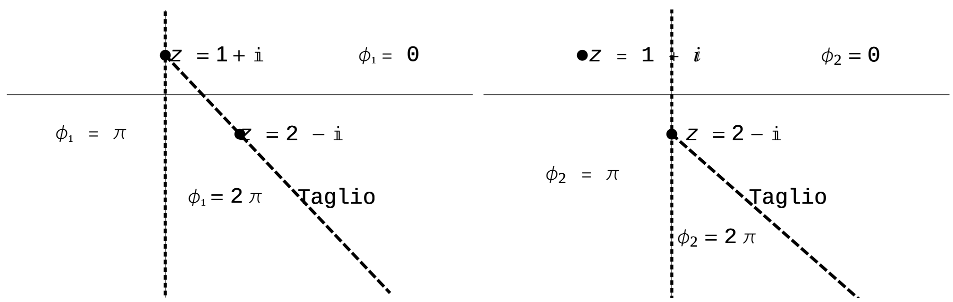

Figure 5: I domini di analiticità delle funzioni $\log(z+w_1)$ (sinistra) e $\log(z+w_2)$ (destra) e i rispettivi valori di ϕ_j, definiti nelle equazioni 3 e 4. Le funzioni sono analitiche su tutto il piano complesso eccettuato i punti del taglio lungo il quale sono discontinue.

$$\phi_2 = \begin{cases} 0 & z_R > -2;\ z_I > 1 \\ \pi & z_R < -2 \\ 2\pi & z_I + 1 < -2(z_R - 2) < 0 \\ 0 & 0 > z_I + 1 > -2(z_R - 2) \end{cases}$$

I tagli e il valore di ϕ_j sono mostrati in figura 5. Utilizzando queste definizioni otteniamo infine

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1-z}{z+3i}[f_1(z) - f_2(z)] = \frac{1-z}{z+3i}\left[\frac{1}{2}\log\frac{(z_R-2)^2 + (z_I+1)^2}{(z_R-1)^2 + (z_I-1)^2}\right. \\ &\left. +i\left(-\arctan\frac{z_I+1}{2-z_R} - \arctan\frac{1-z_I}{1-z_R} + \phi\right)\right] \\ \phi &= \begin{cases} 0 & z_R - 1 < 0 \\ \pi & z_I - 1 > -2(z_R - 1),\ 1 < z_R < 2 \\ -\pi & z_I - 1 < -2(z_R - 1),\ 1 < z_R < 2 \\ 0 & z_R - 2 > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

come mostrato in figura 6. Si può verificare, utilizzando identità trigonometriche o una calcolatrice, che le espressioni di eq. (6) ed eq. (2) sono identiche.

10 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_0^1 x^z (1-x)^{1-z}$$

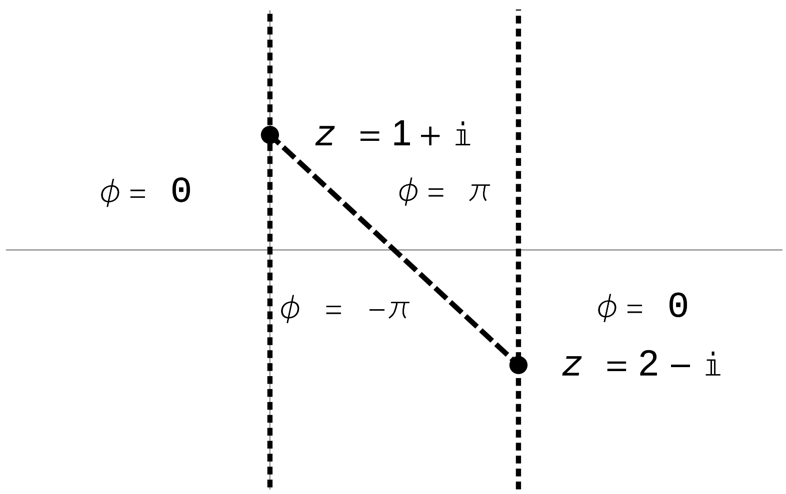

Figure 6: L'angolo ϕ di equazione 6.

Si determini l'espressione di $F(z)$ il suo dominio di analiticità e se ne classifichino le singolarità.

11 Esercizio B1

Si valuti la funzione vettoriale $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned} y(t) &= Ay(t) \\ y(0) &= \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12 Esercizio B2

Si determini la matrice R che rappresenta una rotazione antioraria di $\pi/4$ attorno al vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento: Si scriva R nella base in cui risulta più semplice e si effettui successivamente l'opportuno cambiamento di base.)

13 Esercizio B2a

Si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore R ottenuto nel problema precedente.

14 Esercizio B3

Si consideri l'operatore lineare

$$O : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ O(f) = \int_0^1 |t-s| f(s) \mathrm{d}s.$$

Se ne discuta lo spettro.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
- *Si esegua almeno un esercizio di tipo A ed uno di tipo B*

15 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x) + 3\cos(2x)}{x^3 + 2 + 2i} \mathrm{d}x$$

16 Esercizio A2

Si calcoli la funzione $F(z)$

$$F(z) = \int_\gamma \frac{1}{(w+2)(w-z)} \mathrm{d}w$$

dove γ è il segmento che congiunge i punti $w_1 = i$ e $w_2 = 1$ del piano complesso. Si discutano in particolare il dominio di analiticità di $F(z)$ e il limite per $z \to \xi_\gamma$, dove $\xi_\gamma \in \gamma$.

17 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_0^1 x^z (1-x)^{1-z}$$

Si determini l'espressione di $F(z)$ il suo dominio di analiticità e se ne classifichino le singolarità.

18 Esercizio B1

Si valuti la funzione vettoriale $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{aligned} y(t) &= Ay(t) \\ y(0) &= \begin{pmatrix} i \\ -3+i \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & i \\ 2+2i & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione in esame è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{At} y(0)$$

il problema si riduce quindi a determinare l'esponenziale di At.

Determiniamo preliminarmente gli autovalori di At. Per il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ otteniamo

$$p_A(\lambda) = \mathrm{D}et(A - \lambda I) = \lambda^2 - (3+i)\lambda + 2 + i$$

da cui otteniamo, per gli autovalori di At

$$\begin{aligned} \lambda_1 t &= (2+i)t \\ \lambda_2 t &= t \end{aligned}$$

.

Per una generica funzione di un operatore O_A rappresentato da una matrice A $n \times n$ abbiamo

$$f(A) = f_0 I + f_1 A + \ldots f_{n-2} A^{n-1} + f_{n-1} A^{n-1}.$$

Nel caso di interesse per questo esercizio abbiamo pertanto

$$\mathrm{e}^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 At$$

dove possiamo ottenere i coefficienti α_j applicando entrambi i membri dell'equazione ad un autovettore di A:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 t \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 t \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1-i}{2}\left[(2+i)\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{(2+i)t}\right] \\ \alpha_1 t &= \frac{1-i}{2}\left[-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{(2+i)t}\right]\end{aligned}$$

da cui

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} i\mathrm{e}^t + (1-i)\mathrm{e}^{(2+i)t} & \frac{1+i}{2}\left[-\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{(2+i)t}\right] \\ -2\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{(2+i)t} & (1-i)\mathrm{e}^t + i\mathrm{e}^{(2+i)t} \end{pmatrix}$$

ed infine

$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}\left[(1+4i)\mathrm{e}^t - 5i\mathrm{e}^{(2+i)t}\right] \\ -(5+3i)\mathrm{e}^t + 5\mathrm{e}^{(2+i)t} \end{pmatrix}$$

19 Esercizio B2

Si determini la matrice R che rappresenta una rotazione oraria di $\pi/4$ attorno al vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento: Si scriva R nella base in cui risulta più semplice e si effettui successivamente l'opportuno cambiamento di base.)

20 Esercizio B2a

Si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore R ottenuto nel problema precedente.

21 Esercizio B3

Si consideri l'operatore lineare

$$O : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ O(f) = \int_0^1 |t-s| f(s)\mathrm{d}s.$$

Se ne discuta lo spettro.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 31/03/2009

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
- *Si esegua almeno un esercizio di tipo A ed uno di tipo B*

22 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x) - 2i\cos(5x)}{x^4 + 1 - i} \mathrm{d}x$$

23 Esercizio A2

Si calcoli la funzione $F(z)$

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{(w+i)^2(w-z)} \mathrm{d}w$$

dove γ è il segmento che congiunge i punti $w_1 = 2i$ e $w_2 = 1 - i$ del piano complesso. Si discutano in particolare il dominio di analiticità di $F(z)$ e il limite per $z \to \xi_\gamma$, dove $\xi_\gamma \in \gamma$.

24 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_0^1 x^z (1-x)^{1-z}$$

Si determini l'espressione di $F(z)$ il suo dominio di analiticità e se ne classifichino le singolarità.

25 Esercizio B1

Si valuti la funzione vettoriale $y(t)$ soluzione dell'equazione differenziale

$$
\begin{aligned}
y(t) &= Ay(t) \\
y(0) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix} \\
A &= \begin{pmatrix} 2-i & i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

26 Esercizio B2

Si determini la matrice R che rappresenta una rotazione antioraria di $-\pi/6$ attorno al vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento: Si scriva R nella base in cui risulta più semplice e si effettui successivamente l'opportuno cambiamento di base.)

Il modo più semplice di ottenere la matrice R cercata è di introdurre una terna levogira ortogonale di assi di riferimento il cui asse z' coincida con la direzione individuata dal vettore v. In questo sistema di riferimento la rotazione cercata è semplicemente

$$R' = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per detrminare R nella base canonica è sufficiente operare il cambiamento di base

$$R = S^{-1}R'S$$

Dove S è la matrice che trasforma le coordinate nella base canonica in quelle nella base accentata. Determiniamo i vettori di base nella base accentata

$$e'_3 \;=\; \frac{v}{||v||} = \frac{1}{3}(2, -1, -2)^T$$

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)^T \\ e'_2 &= e'_3 \times e'_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,-2,5)^T \end{aligned}$$

Si noti che la scelta di e'_1 è arbitraria, è sufficiente che sia ortogonale ad e'_3. La matrice che trasforma le coordinate nella base accentata in quelle nella base canonica è

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

poichè S è la matrice di trasformazione relativa al cambiammento di base fra due basi ortogonali è unitaria e più precisamente ortogonale nel caso in esame. Pertanto

$$S^{-1} = S^T$$

Otteniamo pertanto

$$\begin{aligned} R &= S^T R S = S^T \begin{pmatrix} \frac{-4+3\sqrt{3}}{6\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{3\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{6} \\ \frac{3+4\sqrt{3}}{6\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{15}} & \sqrt{\frac{5}{12}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8+5\sqrt{3} & 2(1+\sqrt{3}) & -11+4\sqrt{3} \\ 2(-5+\sqrt{3}) & 2(1+4\sqrt{3}) & 2(-1-\sqrt{3}) \\ -5+4\sqrt{3} & 2(5-\sqrt{3}) & 8+5\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

C'e' un modo leggermente più sofisticato di risolvere l'esercizio facendo uso degli operatori in "forma diadica". Ricordiamo preliminarmente cosa si intende per operatore in "forma diadica". Sia O un operatore definito come

$$O = v \otimes w^*; \; O : u \to O(u) = (w,u)v$$

Dove v, w ed u sono vettori di uno spazio vettoriale lineare M. È immediato verificare che $O : M \to M$ è un operatore lineare. La notazione $v \otimes w^*$ (usualmente $|v\rangle\langle w|$ nei testi di meccanica quantistica) si dice forma diadica dell'operatore. Se M è uno spazio vettoriale a dimensione finita m l'operatore O si può rappresentare con una matrice e i vettori con m-tuple di numeri reali o complessi. Se indichiamo con O_{ij} (i-esima riga j-esima colonna) l'elemento della matrice O (con leggero abuso di notazione indichiamo con

O sia l'operatore che la matrice che lo rappresenta in una base assegnata) è immediato verificare che

$$O_{ij} = v_i w_j^*$$

dove v_i e w_j sono le componenti dei vettori v e w nella base assegnata. Più specificamente se M è bidimensionale

$$O = \begin{pmatrix} v_1 w_1^* & v_1 w_2^* \\ v_2 w_1^* & v_2 w_2^* \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora l'azione dell'operatore R che stiamo cercando sui vettori e'_j. Poichè costituiscono una base di R^3 se riusciamo a scrivere un operatore che abbia l'effetto voluto sugli e'_j questo operatore sarà l'operatore cercato. Abbiamo

$$\begin{aligned} R(e'_1) &= \cos\phi e'_1 + \sin\phi e'_2 \\ R(e'_2) &= \cos\phi e'_2 - \sin\phi e'_1 \\ R(e'_3) &= e'_3 \end{aligned}$$

Utilizzando il fatto che gli e'_j costituiscono una base ortonormale è immediato verificare che l'operatore cercato è

$$R = (\cos\phi e'_1 + \sin\phi e'_2) \otimes (e'_1)^* + (\cos\phi e'_2 - \sin\phi e'_1) \otimes (e'_2)^* + e'_3 \otimes (e'_3)^* \quad (8)$$

Se indichiamo con $P_j = e'_j \otimes (e'_j)^*$ (*si noti che i P_j così definiti sono proiettori ortogonali lungo la direzione e'_j*) e con $A_{\{ij\}} = e'_i \otimes (e'_j)^*$ (*si noti che gli indici i e j non denotano righe e colonne dell'operatore*) l'equazione (8) si puó riscrivere

$$\begin{aligned} R &= \cos\phi(P_1 + P_2) + \sin\phi(A_{\{21\}} - A_{\{12\}}) + P_3 \\ &= \cos\phi I + (1 - \cos\phi)P_3 + \sin\phi(A_{\{21\}} - A^\dagger_{\{21\}}) \end{aligned} \quad (9)$$

dove con I abbiamo indicato l'operatore identità e abbiamo utilizzato le proprietà

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= I \\ A_{\{12\}} &= A^\dagger_{\{21\}} \end{aligned}$$

che si possono verificare esplicitamente.

Otteniamo

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
A_{\{21\}} &= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Inserendo queste relazioni nell'espressione (9) si riottiene l'espressione (7) per la matrice di rotazione R.

27 Esercizio B2a

Si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore R ottenuto nel problema precedente.

28 Esercizio B3

Si consideri l'operatore lineare

$$O : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ O(f) = \int_0^1 |t-s| f(s)\mathrm{d}s.$$

Se ne discuta lo spettro.