Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 15/02/2010

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*

1 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2+z-1}{z+1-i}\mathrm{d}z,$$

dove γ *è la* spezzata aperta *che congiunge i punti* $z_1 = 2+i$*,* $z_2 = 2-2i$*,* $z_3 = -2-2i$*,* $z_4 = -2+i$ *e* $z_5 = 1+2i$

1.1 Soluzione

Possiamo riscrivere la funzione integranda come

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2+z-1}{z+1-i} = z+i-\frac{2+i}{z+1-i} = f_1(z)+f_2(z) \\ f_1(z) &= z+i \\ f_2(z) &= -\frac{2+i}{z+1-i} \end{aligned}$$

Poichè $f_1(z)$ è analitica abbiamo

$$\int_\gamma f_1(z)\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{2}z^2+iz\right)\Big|_{z_1}^{z_5} = -4-i$$

$f_2(z)$ non è analitica e pertanto non è possibile usare una primitiva a meno di tagliare opportunamente il piano complesso. Il modo più semplice di calcolare l'integrale è di considerare l'integrale sulla spezzata chiusa Γ che conginuge i punti z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 come indicato in figura 1. Se indichiamo con γ_1 il segmento z_5z_1 otteniamo, applicando il teorema dei residui,

$$\int_\gamma f_2 = \int_\Gamma f_2 - \int_{\gamma_1} f_2 = -2\pi+4\pi i - \int_{\gamma_1} f_2$$

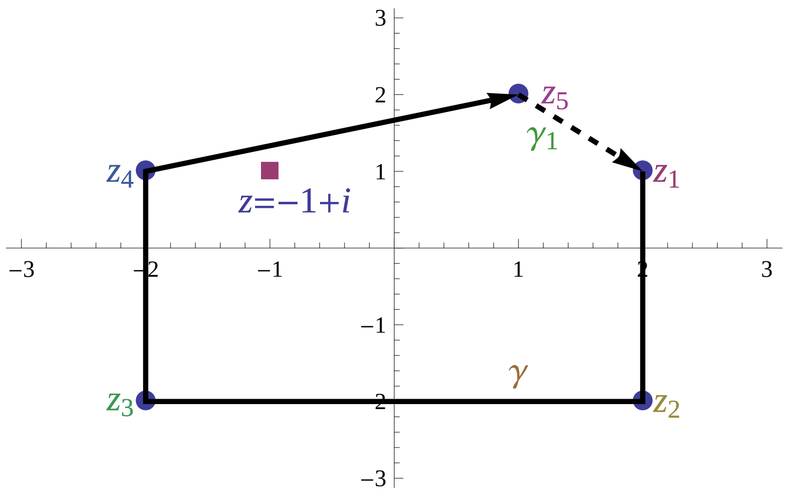

Figure 1: La spezzata aperta γ è indicata con la linea continua. Il segmento γ_1 con la linea tratteggiata. La curva $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1$ è una curva chiusa all'interno della quale la funzione integranda ha un polo in $z = -1 + i$. L'integrale su γ pertanto è dato dal residuo nel polo meno l'integrale su γ_1

Per l'integrale su γ_1 possiamo usare la parametrizzazione della curva $z = z_5 + (z_1 - z_5)t,\ t \in [0, 1]$ ed otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f_2(z)\mathrm{d}z &= (z_1 - z_5)(2 + i)\int_0^1 \frac{1}{z_5 + 1 - i + (z_1 - z_5)t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{5(i-1) - 2(2+i)t}{2t^2 + 2t + 5} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i\right)\left(\pi - 2\arctan 2 + i\log\frac{9}{5}\right)\end{aligned}$$

e pertanto

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -4 - i - 2\pi + 4\pi i - \left(-\frac{1}{2} + i\right)\left(\pi - 2\arctan 2 + i\log\frac{9}{5}\right)$$

2 Esercizio A2

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+1-5/2i)^6 - 2 - 2i} \mathrm{d}x$$

3 Esercizio A3

Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4 - 2ix^2 - 1}$$

4 Esercizio A4

Si calcolino i coefficienti c_1 e c_{-3} della serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\tan z}{z^2 + 1}$$

in un intorno del punto $z_1 = 3/2(1+i)$

5 Esercizio A5

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_0^1 x^z (1-x)^{1-z} \mathrm{d}x$$

Si determini l'espressione di $F(z)$, il suo dominio di analiticità, se ne determini il prolungamento analitico e se ne classifichino le singolarità.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 15/02/2010

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*

6 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{-z^2+1}{z-3-2i}\mathrm{d}z,$$

dove γ è la *spezzata aperta* che congiunge i punti $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-2i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = -2+i$ e $z_5 = -1+2i$

7 Esercizio A2

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-2-i)^6 - 4i}\mathrm{d}x$$

8 Esercizio A3

Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^4 - 2(1+i)x^2 + 2i}$$

8.1 Soluzione

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx}\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{x^4-2(1+i)x^2+2i}\mathrm{d}x = \hat{f}_+(k) + \hat{f}_-(k) \\
\hat{f}_\pm(k) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx}\frac{\mathrm{e}^{\pm ix}}{x^4-2(1+i)x^2+2i}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabile di integrazione $x \to -t$ è immediato verificare che $\hat{f}_-(k) = \hat{f}_+(-k)$. Per il calcolo di $\hat{f}_+(-k)$ consideriamo gli integrali in campo complesso

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_j} \frac{\mathrm{e}^{i(1+k)z}}{z^4 - 2(1+i)z^2 + 2i}\mathrm{d}z$$

dove le curve Γ_1 e Γ_2 sono mostrate in figura 2. Se $k > 1$ utilizziamo il cammino di integrazione Γ_1, su tale cammino infatti

$$\int_{\gamma_R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

per il lemma di Jordan e pertanto, per $k > -1$

$$\hat{f}_+(k) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{e}^{i(1+k)z}}{z^4 - 2(1+i)z^2 + 2i}\mathrm{d}z$$

La curva Γ_1 è una curva chiusa al cui interno la funzione integranda ha solo poli e pertanto si può utilizzare il teorema dei residui. I poli della funzione integranda si hanno in corrispondenza degli zeri del denominatore

$$z^4 - 2(1+i)z^2 + 2i = 0 \Rightarrow z_\pm = \pm\sqrt{2}^{1/4}\mathrm{e}^{i\pi/8}$$

e sono entrambi poli doppi. Pertanto, $k > -1$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_+(k) &= \lim_{z\to z_+} 2\pi i \lim_{z\to z_+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z - z_+)^2 \frac{\mathrm{e}^{i(1+k)z}}{z^4 - 2(1+i)z^2 + 2i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left.\frac{\mathrm{e}^{i(1+k)z}}{(z - z_-)^2}\right|_{z=z_+} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i(1+k)z_+}[i(1+k)(z_+ - z_-) - 2]}{(z_+ - z_-)^2}
\end{aligned}$$

9 Esercizio A4

Si calcolino i coefficienti c_1 e c_{-5} della serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\cot z}{2z^2 + 1}$$

in un intorno del punto $z_1 = 3/2(1+i)$

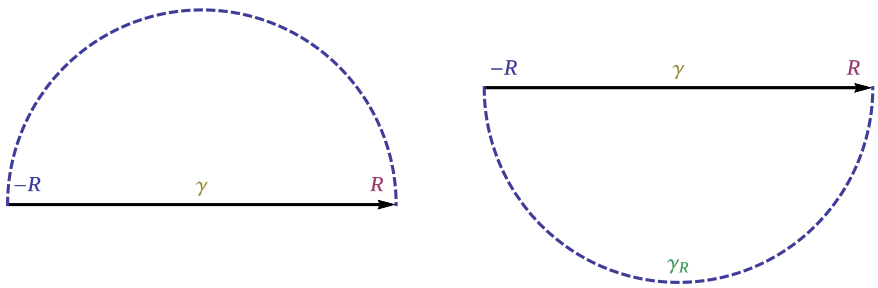

Figure 2: La spezzata aperta γ è indicata con la linea continua. La curva γ_R con la linea tratteggiata. La curva $\Gamma = \gamma \cup \gamma_1$ è una curva chiusa all'interno della quale la funzione integranda ha un polo doppio. L'integrale su γ pertanto è dato dal residuo nel polo meno l'integrale su γ_R che è nullo per il lemma di Jordan. La curva Γ di sinistra è utilizzata per $k > -1$ quella di destra per $k < -1$.

10 Esercizio A5

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_{-1}^{1} (1-x)^{z+2}(1-x)^{1-z}\mathrm{d}x$$

Si determini l'espressione di $F(z)$, il suo dominio di analiticità, se ne determini il prolungamento analitico e se ne classifichino le singolarità.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 15/02/2010

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*

11 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2+i}{z+1-i}\mathrm{d}z,$$

dove γ è la *spezzata aperta* che congiunge i punti $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-2i$, $z_3 = -3-2i$, $z_4 = -3+i$ e $z_5 = 1/2+2i$

12 Esercizio A2

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-3-i)^6+2i}\mathrm{d}x$$

12.1 Soluzione

La funzione integranda ha sei poli semplici nel piano complesso, nessuno dei quali sull'asse reale. Possiamo pertanto considerare l'integrale in campo complesso

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-3-i)^6+2i}\mathrm{d}z$$

dove il cammino Γ é mostrato in figura 3. Per l'integrale cercato abbiamo pertanto

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x = \int_\gamma \mathrm{d}z = \int_\Gamma \mathrm{d}z - \int_{\gamma_R}\mathrm{d}z$$

Abbiamo

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z-3-i)^6+2i}\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

Poiché

$$\frac{z}{(z-3-i)^6+2i} \to 0$$

uniformemente per $R \to \infty$ su tutta la circonferenza di raggio R. L'integrale su Γ è uguale alla somma, cambiata di segno, dei residui nei poli interni alla curva. Consideriamo $w = z - 3 - i$. I poli della funzione integranda si hanno in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione

$$w^6 = -2i \Rightarrow w_n = 2^{1/6} \mathrm{e}^{\pi/4 + k\pi/3}, \ k = 0, \ldots, 5$$

ovvero i poli sono

$$z_k = 3 + i + 2^{1/6} \mathrm{e}^{\pi/4 + k\pi/3}, \ k = 0, \ldots, 5$$

Con l'ausilio di una calcolatrice possiamo ottenere

$$z_0 \simeq 3.79 + 1.79i \quad z_1 \simeq 2.71 + 2.08i \quad z_2 \simeq 1.92 + 1.29i$$
$$z_3 \simeq 2.21 + 0.21i \quad z_4 \simeq 3.29 - 0.084i \quad z_5 \simeq 4.08 + 0.71i$$

L'unico polo interno alla curva Γ è pertanto il polo in $z = z_4$. Pertanto

$$\int_\Gamma = \mathrm{Res(f, z_4)} = -2\pi i \lim_{z \to z_4} \frac{z - z_4}{(z-3-i)^6 + 2i} = \frac{-2\pi i}{6(z_4 - 3 - i)^5} = -\frac{\pi i}{3 w_4^5} = -\frac{\pi i}{3 \cdot 2^{5/6} \mathrm{e}^{i\pi 17/12}}$$

dove si è utilizzato il teorema di De L'Hospital per semplificare il calcolo del residuo.

13 Esercizio A3

Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^4 - 2(1-i)x^2 + 2i}$$

14 Esercizio A4

Si calcolino i coefficienti c_1 e c_{-2} della serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\cot z}{4z^2 - 1},$$

in un intorno del punto $z_1 = 3/2(1 + i)$

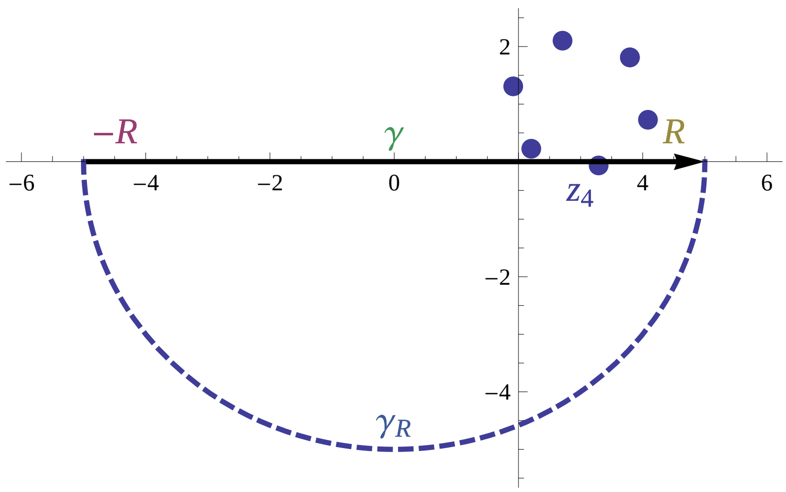

Figure 3: La spezzata aperta γ è indicata con la linea continua. La semicirconferenza γ_R con la linea tratteggiata. L'integrale cercato coincide con l'integrale su γ. La curva $\Gamma = \gamma \cup \gamma_R$ è una curva chiusa all'interno della quale la funzione integranda ha un polo in $z = z_6$. L'integrale su γ pertanto è dato dal residuo nel polo cambiato di segno (la curva é percorsa in senso *orario*) meno l'integrale su γ_R che è nullo poichè $zf(z) \to 0$ uniformemente su tutta la circonferenza di raggio R per $R \to \infty$.

15 Esercizio A5

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_0^2 x^{z+2}(2-x)^{1-z}\mathrm{d}x$$

Si determini l'espressione di $F(z)$, il suo dominio di analiticità, se ne determini il prolungamento analitico e se ne classifichino le singolarità.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 15/02/2010

- *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
- *Spegnere e non utilizzare i cellulari*

16 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2+z}{z-2-2i}\mathrm{d}z,$$

dove γ è la *spezzata aperta* che congiunge i punti $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-2i$, $z_3 = -3-2i$, $z_4 = -3+i$ e $z_5 = 1/2+2i$

17 Esercizio A2

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+3-i)^4+3}\mathrm{d}x$$

18 Esercizio A3

Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^4+6ix^2-9}$$

19 Esercizio A4

Si calcolino i coefficienti c_1 e c_{-6} della serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{\tan z}{z^2+2},$$

in un intorno del punto $z_1 = 3/2(1+i)$

20 Esercizio A5

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_1^2 (x-1)^{z+3}(2-x)^{2-z}\mathrm{d}x$$

Si determini l'espressione di $F(z)$, il suo dominio di analiticità, se ne determini il prolungamento analitico e se ne classifichino le singolarità.

21 Esercizio B

Si verifichi che l'operatore

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è un proiettore. Si determinino Nucleo e Range dell'operatore P e si verifichi che P soddisfa il teorema di decomposizione spettrale. Infine si determini la soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Py \\ y(t=0) &= (1,1,0)^T \end{aligned}$$