Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 07/04/2010

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*
   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By, N.B. A1.1+A2.1= 1 esercizio.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.
4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami (venerdì 9 ore 9:00).*
   - SI
   - NO

1 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1+i}\mathrm{d}z$$

dove γ è

1. il segmento che unisce i punti $z_1 = 4 - i$ e $z_2 = 4 + 5i$
2. la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 4-i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 4+2i$, $z_4 = 6 + 3i$ e $z_5 = 4 + 5i$

1.1 Soluzione

1.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z-1+i}\mathrm{d}z \quad &\overset{z\in\gamma\Rightarrow z=4+iy,\ y\in[-1,5]}{=} \quad \int_{-1}^{5} \frac{\mathrm{d}iy}{3+i(y+1)} = i\int_{-1}^{5} \frac{3-i(y+1)}{9+(y+1)^2}\mathrm{d}y \\
&= \left\{\frac{1}{2}\log[9+(y+1)^2] + \arctan\frac{y+1}{3}\right\}\Big|_{-1}^{5} \\
&= \frac{1}{2}\log 5 + \arctan 2
\end{aligned}$$

2. all'interno della curva γ la funzione integranda è analitica, pertanto per il teorema integrale di Cauchy

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

2 Esercizio A2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-2+i})(z+i)}$$

1. Se ne classifichino le singolarità e se ne determinino i residui nei poli

2. Si determinino i coefficienti c_1 e c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent della $f(z)$, centrato in $z=0$ e valido in un intorno del punto $z=3i$

3 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6x^3+z}\mathrm{d}x \qquad x \in R,\ z \in C$$

Se ne determini il dominio di analiticità e se ne studi il limite per z situato sui bordi del dominio.

4 Esercizio B1

È dato l'operatore

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Si determini α in modo tale che l'operatore A sia unitario. In corrispondenza di tale valore di α si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A.

5 Esercizio B2

Si verifichi che l'operatore

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ 2i & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un proiettore. Si determinino le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay \\ y(0) &= (1,0,i)^T \end{aligned}$$

6 Esecizio B3

Si consideri l'insieme $\mathcal{M}_{2,2}$ delle matrici quadrate due per due con elementi di matrice complessi.

- Si dimostri che $\mathcal{M}_{2,2}$ è isomorfo a $\mathbf{C}^4$
- Sia
$$A = \begin{pmatrix} i & 2i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$$
si dimostri che l'applicazione
$$A : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2} \quad A(M) : M \to M' = AM \quad M'_{jk} = \sum_{l=1}^{2} A_{jl} M_{lk}$$
(ovvero l'applicazione mappa una matrice M nel prodotto matriciale di A per M), è un operatore lineare su $\mathcal{M}_{2,2}$.
- L'isomorfismo che si è stabilito fra $\mathcal{M}_{2,2}$ e $\mathbf{C}^4$ consente di associare all'operatore A un operatore A' di $\mathbf{C}^4$ in $\mathbf{C}^4$: si determini A'.

7 Esercizio B4

Si dimostri che vale la relazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log |x| = V.P. \frac{1}{x}$$

nel senso delle distribuzioni. Con $V.P.$ si è indicato l'integrale al valor principale

$$V.P.\frac{1}{x}(g(x)) = V.P.\int_a^b g(x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

.

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 07/04/2010

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*
   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By, N.B. A1.1+A2.1= 1 esercizio.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.
4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami (venerdì 9 ore 9:00).*
   - SI
   - NO

8 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1+i}\mathrm{d}z$$

dove γ è

1. il segmento che unisce i punti $z_1 = 3-5i$ e $z_2 = 3+i$
2. la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 3-5i$, $z_2 = 1-2i$, $z_3 = 3-i$, $z_4 = 6$ e $z_5 = 3+i$

9 Esercizio A2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-1+i})(2z-i+1)}$$

1. Se ne classifichino le singolarità e se ne determinino i residui nei poli

2. Si determinino i coefficienti c_1 e c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent della $f(z)$, centrato in $z = 0$ e valido in un intorno del punto $z = 2 + i$

9.1 Soluzione

1. Il numeratore di $f(z)$ è analitico su tutto il piano complesso ed ha un polo all'infinito. Il denominatore si annulla in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione

$$(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-1+i})(2z - i + 1) = 0 \Rightarrow z = \frac{-1+i}{2}, -1 + i + 2\pi ki,\ k \in Z$$

Tutti i punti trovati sono poli semplici della funzione $f(z)$. Il denominatore ha una singolarità essenziale nel punto all'infinito che pertanto è una singolarità essenziale per $f(z)$. I residui cercati sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}es\left(f, z = \frac{-1+i}{2}\right) &= \lim_{z \to \frac{-1+i}{2}} \frac{z^2\left(z - \frac{-1+i}{2}\right)}{(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-1+i})(2z - i + 1)} \\
&= \frac{(1-i)^2}{8}(\mathrm{e}^{(-1+i)/2} - \mathrm{e}^{-1+i}) \\
\mathrm{R}es\,(f, z = -1 + i + 2\pi ki)) &= \lim_{z \to -1+i+2\pi ki} \frac{z^2\,(z + 1 - i - 2\pi ki)}{(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-1+i})(2z - i + 1)} \\
&= \frac{(-1 + i + 2\pi ki)^2}{-1 + i + 4\pi ki} \lim_{z \to -1+i+2\pi ki} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,(z + 1 - i - 2\pi ki)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-1+i})} \\
&= \frac{(-1 + i + 2\pi ki)^2}{(-1 + i + 4\pi ki)\mathrm{e}^{-1+i}}
\end{aligned}$$

2. La serie di Laurent centrata in $z = 0$ della $f(z)$ converge uniformemente su corone circolari, centrate in $z = 0$, caratterizzate dall'assenza di singolarità al loro interno. In particolare converge sulla corona circolare $\mathcal{C} \equiv \{z \in C, \sqrt{2} < |z| < \sqrt{4\pi^2 - 2\pi}\}$ a cui appartiene il punto $z = 2+i$. I coefficienti cercati della serie di Laurent sono dati da

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) z^{-n-1} \mathrm{d}z$$

dove $\gamma \subset \mathcal{C}$. è una curva chiusa. All'interno della curva chiusa γ la funzione integranda presenta poli semplici in $z = (-1+i)/2$, $z = -1+i$

ed eventualmente un polo in $z = 0$ (se $n \geq 2$). Pertanto possiamo calcolare i coefficienti c_n utilizzando il teorema dei residui.

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \mathrm{R}es\left(f, z = \frac{-1+i}{2}\right) + \mathrm{R}es\left(f, z = -1+i\right) \\
&= \frac{(1-i)^2}{8}(\mathrm{e}^{(-1+i)/2} - \mathrm{e}^{-1+i}) + (-1+i)\mathrm{e}^{1-i} \\
c_{-1} &= \mathrm{R}es\left(\frac{f(z)}{z^2}, z = \frac{-1+i}{2}\right) + \mathrm{R}es\left(\frac{f(z)}{z^2}, z = -1+i\right) \\
&= \frac{1}{2(\mathrm{e}^{(-1+i)/2} - \mathrm{e}^{-1+i})} + \frac{\mathrm{e}^{1-i}}{-1+i}
\end{aligned}$$

10 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ix^3 + 2z}\mathrm{d}x \qquad x \in R,\ z \in C$$

Se ne determini il dominio di analiticità e se ne studi il limite per z situato sui bordi del dominio.

11 Esercizio B1

È dato l'operatore

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3i & 1 \\ \alpha & -3i \end{pmatrix}$$

Si determini α in modo tale che l'operatore A sia unitario. In corrispondenza di tale valore di α si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A.

12 Esercizio B2

Si verifichi che l'operatore

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-i & -1 & -i \\ -1-i & 1+i & -1-i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

è un proiettore. Si determinino le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay \\ y(0) &= (1, 0, i)^T \end{aligned}$$

13 Esecizio B3

Si consideri l'insieme $\mathcal{M}_{2,2}$ delle matrici quadrate due per due con elementi di matrice complessi.

- Si dimostri che $\mathcal{M}_{2,2}$ è isomorfo a $\mathbf{C}^4$
- Sia
$$A = \begin{pmatrix} i & -3i \\ 1 & 2-i \end{pmatrix}$$
si dimostri che l'applicazione
$$A : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2} \quad A(M) : M \to M' = AM \quad M'_{jk} = \sum_{l=1}^{2} A_{jl} M_{lk}$$
(ovvero l'applicazione mappa una matrice M nel prodotto matriciale di A per M), è un operatore lineare su $\mathcal{M}_{2,2}$.
- L'isomorfismo che si è stabilito fra $\mathcal{M}_{2,2}$ e $\mathbf{C}^4$ consente di associare all'operatore A un operatore A' di $\mathbf{C}^4$ in $\mathbf{C}^4$: si determini A'.

14 Esercizio B4

Si dimostri che vale la relazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log |x| = V.P. \frac{1}{x}$$

nel senso delle distribuzioni. Con $V.P.$ si è indicato l'integrale al valor principale

$$V.P. \frac{1}{x}(g(x)) = V.P. \int_a^b g(x) \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 07/04/2010

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*
2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*
3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*
   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By, N.B. A1.1+A2.1= 1 esercizio.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.
4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami (venerdì 9 ore 9:00).*
   - SI
   - NO

15 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1+i} \mathrm{d}z$$

dove γ è

1. il segmento che unisce i punti $z_1 = 2-3i$ e $z_2 = 2+i$
2. la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 2-i$, $z_4 = 3$ e $z_5 = 2+i$

16 Esercizio A2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{1+i})(z-i)}$$

1. Se ne classifichino le singolarità e se ne determinino i residui nei poli
2. Si determinino i coefficienti c_1 e c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent della $f(z)$, centrato in $z = 0$ e valido in un intorno del punto $z = 2$

17 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - z} \mathrm{d}x \qquad x \in R,\ z \in C$$

Se ne determini il dominio di analiticità e se ne studi il limite per z situato sui bordi del dominio.

18 Esercizio B1

È dato l'operatore

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 2i \\ \alpha & 9 \end{pmatrix}$$

Si determini α in modo tale che l'operatore A sia hermitiano. In corrispondenza di tale valore di α si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A.

19 Soluzione

$$A = A^\dagger \Rightarrow \alpha = 2i$$

Determiniamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

da cui, per gli autovalori otteniamo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, che sono reali.

Cerchiamo i proiettori sui relativi sottospazi invarianti

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda_2 I - A}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \\ P_2 &= \frac{\lambda_1 I - A}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I proiettori determinati sono ortogonali ($P_j = P_j^\dagger$) e soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} P_i P_j &= \delta_{ij} \\ P_1 + P_2 &= I \\ 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 &= A \end{aligned}$$

conformemente al teorema di decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti. Possiamo ottenere gli autovettori di A risolvendo l'equazione

$$Av_j = \lambda_j v_j$$

oppure utilizzando i proiettori ed applicandoli ad un generico vettore

$$v_j = P_j \psi$$

ovvero

$$\begin{aligned} v_1 &= P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \end{pmatrix} \\ v_2 &= P_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

È immediato verificare che $Av_j = \lambda_j v_j$ e $(v_1, v_2) = 0$.

20 Esercizio B2

Si verifichi che l'operatore

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 2-i \\ -2+6i & 1 & 1-3i \\ 2+4i & 0 & 4-2i \end{pmatrix}$$

è un proiettore. Si determinino le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay \\ y(0) &= (1, 0, i)^T \end{aligned}$$

21 Esecizio B3

Si consideri l'insieme $\mathcal{M}_{2,2}$ delle matrici quadrate due per due con elementi di matrice complessi.

- Si dimostri che $\mathcal{M}_{2,2}$ è isomorfo a $\mathbf{C}^4$
- Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2i & i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$
si dimostri che l'applicazione
$$A : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2} \quad A(M) : M \to M' = AM \quad M'_{jk} = \sum_{l=1}^{2} A_{jl} M_{lk}$$
(ovvero l'applicazione mappa una matrice M nel prodotto matriciale di A per M), è un operatore lineare su $\mathcal{M}_{2,2}$.
- L'isomorfismo che si è stabilito fra $\mathcal{M}_{2,2}$ e $\mathbf{C}^4$ consente di associare all'operatore A un operatore A' di $\mathbf{C}^4$ in $\mathbf{C}^4$: si determini A'.

22 Esercizio B4

Si dimostri che vale la relazione
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log |x| = V.P. \frac{1}{x}$$
nel senso delle distribuzioni. Con $V.P.$ si è indicato l'integrale al valor principale
$$V.P. \frac{1}{x}(g(x)) = V.P. \int_a^b g(x) \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Prova scritta di: Studio di Funzioni di Interesse Fisico del 07/04/2010

1. *Firmare e riconsegnare il testo d'esame*

2. *Spegnere e non utilizzare i cellulari*

3. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere:*

   - *Il secondo scritto parziale (almeno due esercizi di tipo Bx)*
   - *Lo scritto complessivo (almeno un esercizio di tipo Ax ed uno di tipo By, N.B. A1.1+A2.1= 1 esercizio.* Questa è la sola opzione possibile per chi non avesse superato il primo scritto parziale.

4. *Indicare, contrassegnando l'opzione scelta, se si intende sostenere la prova orale nel corso della presente sessione di esami (venerdì 9 ore 9:00).*

   - SI
   - NO

23 Esercizio A1

Si determini l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1+3i}\mathrm{d}z$$

dove γ è

1. il segmento che unisce i punti $z_1 = 8-3i$ e $z_2 = 8+i$

2. la spezzata chiusa che congiunge i punti $z_1 = 8-3i$, $z_2 = 7-i$, $z_3 = 8-i$, $z_4 = 9$ e $z_5 = 8+i$

24 Esercizio A2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{1-3i})(2z+i)}$$

1. Se ne classifichino le singolarità e se ne determinino i residui nei poli
2. Si determinino i coefficienti c_1 e c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent della $f(z)$, centrato in $z = 0$ e valido in un intorno del punto $z = 4$

25 Esercizio A3

Si consideri la funzione

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 + z + i} \mathrm{d}x \qquad x \in R,\ z \in C$$

Se ne determini il dominio di analiticità e se ne studi il limite per z situato sui bordi del dominio.

26 Esercizio B1

È dato l'operatore

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 4+4i \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Si determini α in modo tale che l'operatore A sia hermitiano. In corrispondenza di tale valore di α si verifichi la validità del teorema di decomposizione spettrale per l'operatore A.

27 Esercizio B2

Si verifichi che l'operatore

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-i & i & i \\ 1-i & 1+i & -1+i \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è un proiettore. Si determinino le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay \\ y(0) &= (1,0,i)^T \end{aligned}$$

27.1 soluzione

Si ottiene immediatamente per calcolo diretto

$$A^2 = A$$

e pertanto A è un proiettore. La soluzione dell'equazione differenziale assegnata è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{At} y(0)$$

pertanto il problema si riduce al calcolo di e^{At}. Se è nota la decomposizione spettrale di un operatore $B = \sum_j \lambda_j P_j$ il metodo più semplice di calcolare $f(B)$ è

$$f(B) = \sum_j f(\lambda_j) P_j$$

Nel caso in esame poichè A è un proiettore la sua decomposizione spettrale è immediata

$$A = 0 \cdot (I - A) + 1 \cdot A \Rightarrow At = 0 \cdot (I - A) + t \cdot A$$

gli autovalori di un proiettore sono infatti $\lambda = 0, 1$ ($A^2 = A \Rightarrow \lambda^2 = \lambda$ se $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$). Pertanto

$$\mathrm{e}^{At} = I - A + A\mathrm{e}^t$$

e

$$y(t) = (1, 0, -i)^T + (\mathrm{e}^t - 1)\frac{1}{2}(1-i, -2i, 1+i)^T = \frac{1}{2}[1+i+\mathrm{e}^t(1-i), -2i(\mathrm{e}^t-1), -1-3i+\mathrm{e}^t(1+i)]^T$$

Era possibile, sebbene piú involuto, utilizzare la relazione

$$\mathrm{e}^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 At + \alpha_2 A^2 t^2$$

con α_j da determinare. Tale espressione si può semplificare utilizzando la proprietà del proiettore $A^2 = A$

$$\mathrm{e}^{At} = \alpha_0 I + (\alpha_1 t + \alpha_2 t^2) A = \alpha_0 I + \beta_1 At$$

e sono pertanto solo due i coefficienti da determinare: α_0 e $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 t$. Come già osservato gli autovalori di un proiettore sono $\lambda = 0, 1$ e otteniamo pertanto le due equazioni per α_0 e β_1

$$\begin{aligned}
Atv_j &= \lambda_j v_j \qquad \lambda_j = 0, t \\
\mathrm{e}^{At} v_j &= \mathrm{e}^{\lambda_j} v_j = (\alpha_0 I + \beta_1 A) v_j = (\alpha_0 + \beta_1 \lambda_j) v_j \\
\mathrm{e}^0 &= \alpha_0 \\
\mathrm{e}^t &= \alpha_0 + \beta_1 t \Rightarrow \beta_1 t = \mathrm{e}^t - 1
\end{aligned}$$

28 Esecizio B3

Si consideri l'insieme $\mathcal{M}_{2,2}$ delle matrici quadrate due per due con elementi di matrice complessi.

- Si dimostri che $\mathcal{M}_{2,2}$ è isomorfo a $\mathbf{C}^4$
- Sia
$$A = \begin{pmatrix} i & i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$$
  si dimostri che l'applicazione
$$A : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2} \quad A(M) : M \to M' = AM \quad M'_{jk} = \sum_{l=1}^{2} A_{jl} M_{lk}$$
  (ovvero l'applicazione mappa una matrice M nel prodotto matriciale di A per M), è un operatore lineare su $\mathcal{M}_{2,2}$.
- L'isomorfismo che si è stabilito fra $\mathcal{M}_{2,2}$ e $\mathbf{C}^4$ consente di associare all'operatore A un operatore A' di $\mathbf{C}^4$ in $\mathbf{C}^4$: si determini A'.

29 Esercizio B4

Si dimostri che vale la relazione
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log|x| = V.P.\frac{1}{x}$$
nel senso delle distribuzioni. Con $V.P.$ si è indicato l'integrale al valor principale
$$V.P.\frac{1}{x}(g(x)) = V.P.\int_a^b g(x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

.