1 Parziale di Studio di Funzioni di Interesse Fisico, 26/02/2009

1. *Riconsegnare il testo degli esercizi, firmato, congiuntamente all'elaborato scritto.*

2. Firmare e consegnare solo il materiale che si desidera venga corretto.

3. Spegnere e non utilizzare il cellulare.

1.1 Parziale 1

- Esercizio n. 1 (*)

  Si determini centro e raggio di convergenza della serie

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(2+i)^n (z-2+i)^n]$$

  Si determini l'espressione esplicita di $S(z)$ all'interno del raggio di convergenza. Abbiamo

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad a_n = (2+i)^n, \ z_0 = 2-i$$

  pertanto il centro della serie è z_0 il raggio della serie è

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |2+i| = 5 \Rightarrow R = 1/5$$

  Ponendo $w = (2+i)(z-2+i)$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{4-(2+i)z}$$

- Esercizio n. 2 (*)

  Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 3}$$

Si calcola utilizzando il lemma di Jordan. I poli di f sono $z = \pm i$, $z = \pm\sqrt{3}i$. Per $k > 0$ si chiude il cammino nel semipiano superiore. L'integrale sulla semicirconferenza nel semipiano superiore si annulla, nel limite $R \to \infty$, per il lemma di Jordan.

$$\begin{aligned} g(k,x) &= \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{x^4+4x^2+3} \\ \hat{f}(k>0) &= 2\pi i \left[\mathrm{Res}\left(g(k,z), z=i\right)\right) + \mathrm{Res}\left(g(k,z), z=\sqrt{3}i)\right)\Big] \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{-k} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}k}\right) \end{aligned}$$

Il calcolo per $k < 0$ è simile con l'avvertenza che, il cammino di integrazione va chiuso nel semipiano inferiore, i poli rilevanti sono $z = -i, -\sqrt{3}i$ e la somma dei residui va presa con segno negativo per via del verso di percorrenza del cammino chiuso. In definitiva:

$$\hat{f}(k) = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{-|k|} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|k|}\right)$$

- *Esercizio n. 2bis (*) Si verifichi che l'antitrasformata di fourier di $\hat{f}(k)$ è $f(x)$.*

  Otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{-ikx}\hat{f}(k)\mathrm{d}k &= \frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-ikx}\left(\mathrm{e}^{k} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}k}\right) + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{4}e^{-ikx}\left(\frac{ie^{k}}{i+x} + \frac{e^{\sqrt{3}k}}{-3+i\sqrt{3}x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + \ldots \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{i}{i+x} - \frac{3i}{-3+i\sqrt{3}x} - \frac{i}{-i+x} + \frac{3i}{-3-i\sqrt{3}x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{3+x^2}\right) = \frac{1}{x^4+4x^2+3} \end{aligned}$$

Si noti che per semplificare il calcolo abbiamo utilizzato il fatto che il termine indicato con i puntini è il complesso coniugato di quello mostrato esplicitamente come si può verificare operando la sostituzione $k \leftrightarrow -k$ nell'integrale.

- Esercizio n. 3 (*)

Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{2}{5z-1+i}\mathrm{d}z$$

dove γ è l'arco di cerchio di raggio $R=3$, centrato nell'origine, che congiunge i punti $z=-3$ e $z=3$ passando nel semipiano inferiore.

Se consideriamo il cammino chiuso costituito dalla curva γ e dal segmento $\gamma_1 \equiv \{x \in [-3,3]\}$ dell'asse reale possiamo applicare il teorema dei residui.

$$\int_\gamma + \int_{\gamma_1} = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{2}{5z-1+i}, z = \frac{1-i}{5}\right) = \frac{2\pi i}{5} \Rightarrow \int_\gamma = -\int_{\gamma_1} + \frac{2\pi i}{5}$$

Resta da calcolare l'integrale su γ_1

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} &= \int_3^{-3} \mathrm{d}x \frac{2}{5x-1+i} = -2\int_{-3}^{3} \frac{(5x-1)-i}{(5x-1)^2+1} = -\frac{1}{5}\log[(5x-1)^2+1]\Big|_{-3}^{3} \\ &+ \frac{2i}{5}\arctan(5x-1)\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{5}\log\frac{257}{197} + \frac{2i}{5}[\arctan(14)+\arctan(16)]\end{aligned}$$

- Esercizio n. 4 (**)

Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z}{\sin z - 2}\mathrm{d}z$$

dove γ é la circonferenza di raggio $r=5$

La funzione ha poli semplici per

$$\sin z - 2 = 0$$

Per trovare le radici poniamo $w = \mathrm{e}^{iz}$, l'equazione diviene

$$\begin{aligned}&= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{w} - w\right) - 2 = 0 \Rightarrow w = 2i \pm i\sqrt{3} \\ iz &= \log[2i \pm i\sqrt{3}] = i\frac{\pi}{2} + \log(2 \pm \sqrt{3})\end{aligned}$$

Le soluzioni z sono definite a meno di $2k\pi$

$$z = \frac{\pi}{2} - i\log(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi$$

I soli poli interni al cammino di integrazione sono quelli per $k = 0$. Pertano l'integrale cercato è la somma dei due residui

$$\mathcal{I} = 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left[f, z = \frac{\pi}{2} - i\log(2-\sqrt{3}) \right] + \mathrm{Res}\left[f, z = \frac{3\pi}{2} - i\log(\sqrt{3}+2) \right] \right\}$$

Per il calcolo dei residui si ha, utilizzando la regola di de l'Hospital,

$$\lim_{z\to z_j} \frac{z(z-z_j)}{\sin z - 2} = \lim_{z\to z_j} \frac{z_j(z-z_j)}{\sin z - 2} = \frac{z_j}{\cos z_j}$$

dove z_j sono i poli determinati in precedenza

- Esercizio n. 5 (**)

  Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta + 3} \mathrm{d}\theta$$

Consideriamo l'integrale

$$\mathcal{I} = -i \int_\gamma \frac{1}{(z+z^{-1})^2/4 + 3} \frac{1}{z} \mathrm{d}z$$

se scegliamo come γ la circonferenza di raggio unitario l'integrale si riduce all'integrale cercato, infatti

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{i\theta} \\ \mathrm{d}z &\to i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ (z+z^{-1})/2 &= \cos\theta \end{aligned}$$

L'integrale cercato è quindi

$$\mathcal{I} = -i \int_\gamma \frac{4z}{z^4 + 14z^2 + 1} \mathrm{d}z$$

i poli della funzione integranda sono per

$$z^2 = -7 \pm 4\sqrt{3} \Rightarrow z_{1,2} = \pm i\sqrt{7-4\sqrt{3}};\ z_{3,4} = \pm i\sqrt{7+4\sqrt{3}};$$

i soli poli interni al cammino di integrazione sono $z_{1,2}$. Per il calcolo dei residui abbiamo (si noti che $z_3 = -z_4$ e $z_1 = -z_2$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(z_1) &= \frac{-4iz_1}{(z_1 - z_2)(z_1^2 - z_3^2)} \\
\mathrm{Res}(z_2) &= \frac{-4iz_2}{(z_2 - z_1)(z_2^2 - z_3^2)} \\
\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2) &= \frac{-4i}{z_1^2 - z_3^2} = \frac{-4i}{8\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

- Esercizio n. 6 (**)

  Si calcoli l'integrale al valor principale

  $$V.P. \int_\gamma \frac{\sin z}{z + 1 + i} \mathrm{d}z$$

  dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $r = \sqrt{2}$

  La funzione integranda è analitica ovunque eccettuato il polo in $z = -1 - i = z_0$ che si trova sul cammino di integrazione. Consideriamo un cammino chiuso costituito dalla curva $\tilde{\gamma}$ e da γ_ϵ dove $\tilde{\gamma}$ è la circonferenza γ privata di un arco di cerchio simmetrico rispetto a z_0 e γ_ϵ è un arco di cerchio centrato in z_0 di raggio ϵ. Il cammino è costruito in modo che z_0 sia esterno al cammino chiuso. Abbiamo

  $$\int_{\tilde{\gamma}} + \int_{\gamma_\epsilon} = 0 \Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\tilde{\gamma}} = V.P. \int_\gamma = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon}$$

  e dai lemmi noti

  $$-\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\sin z}{z + 1 + i} = -i(0 - \pi) \sin z_0 = i\pi \sin z_0$$

- Esercizio n. 7 (***)

  Sia $F(z)$ la funzione

  $$F(z) = \int_\gamma \frac{\sin w}{(\mathrm{e}^w - i)(w + 1/2)(w - z)} \mathrm{d}w$$

dove γ è la circonferenza di raggio unitario. Si determini $F(z)$, se ne discuta il dominio di analiticità e si discuta il limite

$$\lim_{z\to\xi} F(z) \quad \xi \in \gamma$$

I poli della funzione integranda

$$f(w) = \frac{\sin w}{(\mathrm{e}^w - i)(w + 1/2)(w - z)},$$

sono

$$w = -1/2; \quad w = z; \quad w = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z$$

Se $|z| > 1$ la funzione integranda ha un solo polo interno al cammino di integrazione e, utilizzando il teorema dei residui otteniamo

$$F_+(z) = \frac{4\pi i \sin\frac{1}{2}}{(\mathrm{e}^{-1/2} - i)(1 + 2z)}; \quad |z| > 1$$

che è analitica per $|z| > 1$

Se $|z| < 1$ la funzione integranda ha due poli interni al cammino di integrazione e, utilizzando il teorema dei residui otteniamo

$$F_-(z) = F_+(z) + 4\pi i \frac{\sin z}{(\mathrm{e}^z - i)(2z + 1)}$$

che è analitica per $|z| < 1$

In accordo con le formule di Plemelij otteniamo

$$\lim_{|\xi|\to 1^-} F_-(\xi) - \lim_{|\xi|\to 1^+} F_+(\xi) = 4\pi i \frac{\sin\xi}{(\mathrm{e}^\xi - i)(2\xi + 1)} = 2\pi i(\xi - z)f(\xi)$$

2 Parziale di Studio di Funzioni di Interesse Fisico, 26/02/2009

1. *Riconsegnare il testo degli esercizi, firmato, congiuntamente all'elaborato scritto.*

2. Firmare e consegnare solo il materiale che si desidera venga corretto.

3. Spegnere e non utilizzare il cellulare.

2.1 Parziale 2

- Esercizio n. 1 (*)

  Si determini centro e raggio di convergenza della serie

  $$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(4z + 1 + i)^n]$$

  Si determini l'espressione esplicita di $S(z)$ all'interno del raggio di convergenza.

- Esercizio n. 2 (*)

  Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

  $$f(x) = \frac{1}{x^4 - ix^2 + 2}$$

- Esercizio n. 2bis (*) Si verifichi che l'antitrasformata di fourier di $\hat{f}(k)$ è $f(x)$.

- Esercizio n. 3 (*)

  Si calcoli l'integrale

  $$\int_{\gamma} \frac{2}{2iz - 2 + i} \mathrm{d}z$$

  dove γ è l'arco di cerchio di raggio $R = 3$, centrato nell'origine, che congiunge i punti $z = -3i$ e $z = 3i$ passando nel II e nel III quadrante del piano complesso.

- Esercizio n. 4 (**)

  Si calcoli l'integrale
  $$\int_\gamma \frac{\cos z}{\sin z + \frac{i}{2}} \mathrm{d}z$$
  dove γ é la circonferenza di raggio $r = 5$

- Esercizio n. 5 (**)

  Si calcoli l'integrale
  $$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2 + x + 1} \mathrm{d}x$$

- Esercizion n. 6 (**)

  Si calcoli l'integrale al valor principale
  $$V.P. \int_\gamma \frac{\tan z}{z + 2i} \mathrm{d}z$$
  dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $r = 2$

- Esercizion n. 7 (***)

  Sia $F(z)$ la funzione
  $$F(z) = \int_\gamma \frac{\cos w}{(\sin w - \frac{1}{2})(w + 2i)(w - z)} \mathrm{d}w$$
  dove γ è la circonferenza di raggio unitario. Si determini $F(z)$, se ne discuta il dominio di analiticità e si discuta il limite
  $$\lim_{z \to \xi} F(z) \quad \xi \in \gamma$$

3 Parziale di Studio di Funzioni di Interesse Fisico, 26/02/2009

1. *Riconsegnare il testo degli esercizi, firmato, congiuntamente all'elaborato scritto.*

2. Firmare e consegnare solo il materiale che si desidera venga corretto.

3. Spegnere e non utilizzare il cellulare.

3.1 Parziale 3

- Esercizio n. 1 (*)

  Si determini centro e raggio di convergenza della serie

  $$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [[(2-i)z + 2 - i)^n]$$

  Si determini l'espressione esplicita di $S(z)$ all'interno del raggio di convergenza.

- Esercizio n. 2 (*)

  Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

  $$f(x) = \frac{1}{x^4 - 2ix^2 - 1}$$

- Esercizio n. 2bis (*) Si verifichi che l'antitrasformata di fourier di $\hat{f}(k)$ è $f(x)$.

- Esercizio n. 3 (*)

  Si calcoli l'integrale

  $$\int_\gamma \frac{2}{3z + 1 - 5i} \mathrm{d}z$$

  dove γ è l'arco di cerchio di raggio $R = 3$, centrato nell'origine, che congiunge i punti $z = -3i$ e $z = 3i$ passando nel II e nel III quadrante del piano complesso.

- Esercizio n. 4 (**)

  Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^3}{\cos z + 5} \mathrm{d}z$$

  dove γ é la circonferenza di raggio $r = 5$

- Esercizio n. 5 (**)

  Si calcoli l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} \mathrm{d}x$$

- Esercizion n. 6 (**)

  Si calcoli l'integrale al valor principale

$$V.P. \int_\gamma \frac{\cos z}{(2z + i)(4z - 1)} \mathrm{d}z$$

  dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $r = 1/2$

- Esercizion n. 7 (***)

  Sia $F(z)$ la funzione

$$F(z) = \int_\gamma \frac{\tan w}{(w + 1 + i)(w - z)} \mathrm{d}w$$

  dove γ è la circonferenza di raggio unitario. Si determini $F(z)$, se ne discuta il dominio di analiticità e si discuta il limite

$$\lim_{z \to \xi} F(z) \quad \xi \in \gamma$$

4 Parziale di Studio di Funzioni di Interesse Fisico, 26/02/2009

1. *Riconsegnare il testo degli esercizi, firmato, congiuntamente all'elaborato scritto.*

2. Firmare e consegnare solo il materiale che si desidera venga corretto.

3. Spegnere e non utilizzare il cellulare.

4.1 Parziale 4

- Esercizio n. 1 (*)

  Si determini centro e raggio di convergenza della serie

  $$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [[4z - i)^n]$$

  Si determini l'espressione esplicita di $S(z)$ all'interno del raggio di convergenza.

- Esercizio n. 2 (*)

  Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ della funzione

  $$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}$$

- Esercizio n. 2bis (*) Si verifichi che l'antitrasformata di fourier di $\hat{f}(k)$ è $f(x)$.

- Esercizio n. 3 (*)

  Si calcoli l'integrale

  $$\int_\gamma \frac{1+2i}{5z+4+i} \mathrm{d}z$$

  dove γ è l'arco di cerchio di raggio $R = 3$, centrato nell'origine, che congiunge i punti $z = -3$ e $z = 3$ e passante nel semipiano inferiore.

- Esercizio n. 4 (**)

  Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^3}{\cos z + 3i}\mathrm{d}z$$

  dove γ é la circonferenza di raggio $r = 5$

- Esercizio n. 5 (**)

  Si calcoli l'integrale

$$\int_3^\infty \frac{1}{2x^4+1}\mathrm{d}x$$

- Esercizion n. 6 (**)

  Si calcoli l'integrale al valor principale

$$V.P. \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z + 2i)(z - 1 + i)}\mathrm{d}z$$

  dove γ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $r = \sqrt{2}$

- Esercizion n. 7 (***)

  Sia $F(z)$ la funzione

$$F(z) = \int_\gamma \frac{w}{(\sin w + i/4)(\mathrm{e}^w - 5i)(w - z)}\mathrm{d}w$$

  dove γ è la circonferenza di raggio unitario. Si determini $F(z)$, se ne discuta il dominio di analiticità e si discuta il limite

$$\lim_{z\to\xi} F(z) \quad \xi \in \gamma$$