Prova Scritta di Istituzioni di Met. Mat. della Fisica

Ferrara, martedí 19 giugno 2012

1 Parte A

1.1 Esercizio A1

Si dica se la trasformazione

$$f(z) = \frac{z^2 + z - i}{z + i}$$

è conforme in $z = 0$, e si analizzi il suo comportamento infinitesimo nell'intorno di tale punto.

1.2 Esercizio A2

Siano

$$F(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z} \qquad \text{e} \qquad G = \frac{1}{z^2(z^2 + 25)}.$$

Per entrambe le funzioni,

1. si calcoli il residuo in ciascun punto singolare;
2. si valuti l'integrale curvilineo

   $$\int_\gamma dz, \qquad \text{con} \quad \gamma = 4e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]$$

   facendo espressamente uso delle formule integrali di Cauchy.

1.3 Esercizio A3

Si valuti l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

2 Parte B

È dato l'operatore

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 4 \end{pmatrix}$$

- dopo aver trovato i suoi autovalori, si scrivano i corrispondenti proiettori e si esprima A nella forma $\lambda_1 P^{(1)} + \lambda_2 P^{(2)}$;
- si esprima

  $$U = e^{iA}$$

  e si verifichi direttamente che si tratta di un operatore unitario.
  Si ricordino le proprietà dei proiettori e che

  $$A = \sum \lambda_k P^{(k)} \Longrightarrow f(A) = \sum f(\lambda_k) P^{(k)}$$

Soluzione

A1 L'unica singolarità di f è in $z = -i$, dunque esiste evidentemente una regione attorno a 0 in cui f è analitica e, inoltre,

$$f'(z) = \frac{z^2 + 2iz + 2i}{(z+i)^2} \Longrightarrow f'(0) = -2i \neq 0$$

dunque il mapping è conforme in 0, e siccome

$$f'(0) = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right),$$

l'azione locale di f consiste nel ruotare i vettori tangenti in $f(0) = -1$ di un angolo pari a $\frac{3}{2}\pi$ e nel raddoppiarne la lunghezza.

A2 F ha una singolarità eliminabile in 0; si ricorda che in tal caso F è analitica in 0. In $z = -1$ ha un polo semplice, dunque

$$\text{Res}(F;0) = 0, \quad \text{Res}(F;-1) = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1 - \frac{1}{e};$$

G ha un polo doppio in 0, due poli semplici, rispettivamente, in $5i$ e $-5i$. In 0,

$$\text{Res}(G;0) = \frac{d}{d}\frac{1}{z^2+25}\bigg|_{z=0} = 0$$

mentre nei poli semplici,

$$\text{Res}(G;5i) = \frac{1}{(5i)^2 10i} = \frac{i}{250}; \quad \text{Res}(G;-5i) = \frac{1}{(-5i)^2(-10i)} = -\frac{i}{250}$$

Per quel che riguarda l'integrale di F, osserviamo che γ è omotetica al punto -1, che rappresenta l'unica singolarità di F (analitica in 0!), e pertanto la formula integrale di Cauchy implica che

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - 0)}d\zeta \qquad \text{essendo} \quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

per cui infine si ha che

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)dz.$$

Notiamo che nella regione racchiusa dalla circonferenza γ, $G(z)$ è analitica ovunque tranne che nell'origine. Scriveremo allora, usando la formula di Cauchy per le derivate,

$$g'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - 0)^2}d\zeta \qquad \text{essendo} \quad g(z) = \frac{1}{z^2+25}.$$

L'integrale richiesto è dunque nullo, in quanto

$$g'(z) = -\frac{2z}{(z^2+25)^2} \Longrightarrow g'(0) = 0.$$

A3 È conveniente porre, essendo l'integrando funzione pari,

$$\int_0^\infty = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty,$$

e integrare nel piano complesso sul percorso chiuso Γ: da $-R$ a R sull'asse delle x, tornando in $-R$ tramite la semicirconferenza

$$\mu_R = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ e } |z| = R\}.$$

Siccome l'integrale

$$\int_{\mu_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz \to 0 \qquad \text{per} \quad R \to \infty,$$

$$\int_\Gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2} 2\pi i(\mathrm{Res}(f;i) + \mathrm{Res}(f;2i))$$

per il teorema dei residui. I residui sono calcolati nei poli del semipiano superiore. Si tratta di poli semplici, dunque

$$\mathrm{Res}(f;i) = \frac{(i)^2}{(i^2+4)(i+i)} = \frac{i}{6}; \qquad \mathrm{Res}(f;2i) = -\frac{i}{3}$$

e, dunque, infine

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}.$$

B Gli autovalori risolvono

$$\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

e sono $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$, per cui:

$$P^{(1)} = \frac{(3-\sqrt{2})\mathbb{I} - A}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & i \\ -i & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = \frac{(3+\sqrt{2})\mathbb{I} - A}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -i \\ i & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

Allora,

$$U = e^{iA} = e^{i\lambda_1} P^{(1)} + e^{i\lambda_2} P^{(2)}.$$

D'altra parte, gli autovalori sono reali (A è autoaggiunta), i proietttori sono autoaggiunti e cosí

$$U^+ = e^{-i\lambda_1} P^{(1)} + e^{-i\lambda_2} P^{(2)} \Longrightarrow UU^+ = \mathbb{I}$$

essendo $P^2 = P$ (idempotenza), $P^{(1)}P^{(2)} = 0$, $P^{(1)} + P^{(2)} = \mathbb{I}$.