1 Funzioni di variabile complessa.

1.1 $\mathbb{C}$ è un campo.

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è $\mathbb{R}^2$ con le seguenti operazioni sui suoi elementi (x, y):

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{somma}$$
$$a(x, y) = (ax, ay) \qquad \text{prodotto per un numero reale}$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad \text{prodotto complesso}$$

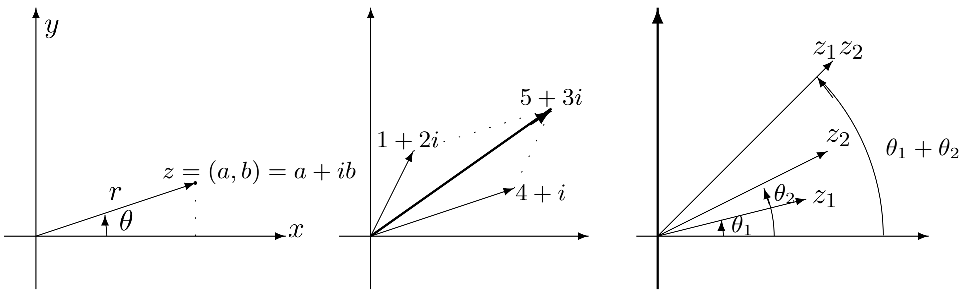
Con questa definizione, e

1. identificando i numeri reali x con i punti dell'asse delle ascisse;
2. associando a ogni punto dell'*asse dei numeri immaginari* il numero iy (y è l'ordinata, i è l'unità immaginaria),

si ha che $(x, 0) = x$ e $iy = y(0, 1)$. Dunque,

$$(x, 0) + y(0, 1) = (x, y) = x + iy = z.$$

Le operazioni di somma e prodotto hanno un immediato significato geometrico se usiamo anche la rappresentazione polare dei numeri complessi:



un numero complesso $z = a + ib$ è rappresentato da un vettore (applicato nell'origine) nel piano $\mathbb{R}^2$ con componenti $(x, 0)$ sull'asse reale e $ib = (0, b)$ su quello immaginario. La regola della somma è proprio quella del parallelogramma per la somma dei vettori. La terza figura illustra il prodotto

$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

Da cui è immediato dedurre che

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{e} \quad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (\text{mod} 2\pi)^1.$$

Un'ulteriore rappresentazione del prodotto è la seguente azione del vettore z_1 su z_2:

$$z_1z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

[1]a sinistra e a destra di questa uguaglianza il risultato può essere esterno all'intervallo $[0, 2\pi[$ (il cosiddetto "*branch*" o "*determinazione principale*") usualmente scelto: in tal caso si può normalizzare il risultato aggiungendo opportuni multipli di 2π. Per esempio, se $z_1 = -1$ e $z_2 = -i$, sottraendo 2π al termine di destra, si ottiene l'uguaglianza nel branch scelto:

$$\arg(z_1z_2) = \arg i = \frac{\pi}{2}; \quad \arg z_1 + \arg z_2 = \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

Si noti che la scelta un branch permette di associare uno e un solo argomento a ogni numero complesso.

In tal caso diremo che $z_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una trasformazione lineare (e, dunque, è rappresentabile da una matrice) che ruota ogni numero complesso di un angolo pari a $\arg z_1$ e ne moltiplica il modulo per un fattore pari a $|z_1|$. Per esempio,

$$z_1 = (0, 2) = 2i = 2i \sin \frac{\pi}{2}$$

ruota tutti i numeri del piano complesso di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$ (in senso antiorario) e ne raddoppia il modulo.

Formula di De Moivre.

$$z^n = r(\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n \in \mathbb{N}$$

Un'applicazione di grande interesse riguarda la soluzione delle equazioni algebriche

$$z^n = w \quad \text{essendo } w \in \mathbb{C} \text{ un numero assegnato.}$$

Infatti, si ha

$$z^n = w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Longrightarrow z = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right) \right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

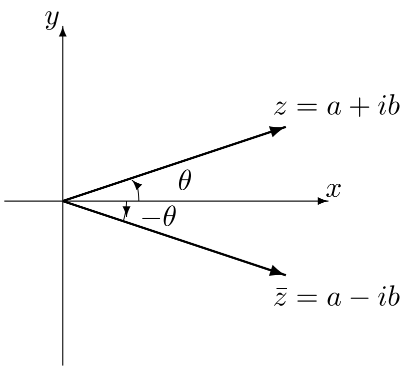
che dà evidentemente luogo a n distinte soluzioni, compatibilmente con il fatto che $\arg z \in [0, 2\pi]$. Dunque, deve essere

$$\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \leq 2\pi.$$

Proprietà rilevanti. Una volta introdotto il complesso coniugato di un numero,

$$z = a + ib \Longrightarrow \bar{z} = a - ib,$$

il cui significato geometrico è rappresentato dalla seguente figura



con le ovvie conseguenze

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$
$$z\bar{z} = |z|^2$$
$$z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \text{ è reale}$$
$$\bar{\bar{z}} = z$$
$$\text{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \text{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

vanno ricordate le seguenti proprietà relative al valore assoluto $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (disuguaglianza triangolare)
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
- $|z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2} \sqrt{|w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2}$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

1.2 Alcune funzioni elementari

1.2.1 Funzione esponenziale

Se si pone, in analogia alla funzione esponenziale di una variabile reale,

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots ,$$

si ottiene, sempre per definizione, che

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Ciò giustifica la definizione

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

Osservazioni.

1. Nella rappresentazione polare,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Se $r = 1$, il numero complesso $z = e^{i\theta}$ individua nel piano complesso i punti di una circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine.

2.

Poiché $$e^{z+2\pi ni} = e^z(\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n) = e^z,$$

e^z è una funzione periodica di periodo $2\pi ni$, qualsiasi sia n, numero intero.

1.2.2 Funzioni trigonometriche

sommando e sottraendo $$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}. \end{array}$$

Ciò giustifica la seguente definizione:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Come si può facilmente dimostrare, queste funzioni ricalcano le prorpietà delle funzioni trigonometriche di variabile reale.

1.2.3 Funzione logaritmo

In questo caso l'estensione dal campo reale a quello complesso richiede cautela. Si vuole ancora definire il logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale come nel caso reale: $y = \ln x = y$ è l'esponente da dare a e per ottenere x. Ma e^y è una funzione monotona, mentre e^z è periodica. Inoltre $e^z \neq 0$, dunque la funzione inversa non è definita nell'origine. Per definire la funzione inversa, è necessario fissare una striscia "orizzontale" larga 2π nel piano Oxy:

$$A_{y_0} = \{x + iy | x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\},$$

in modo da mappare un unico periodo. Infatti, con questa restrizione otteniamo che

1. siccome in generale $e^{z_1} = e^{z_2} \implies z_1 = z_2 + 2\pi n i$, se per ipotesi $z_1, z_2 \in A_{y_0}$, resta dimostrato che
$$e^z : A_{y_0} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$$
è una mappa bijettiva, in quanto $z_1 = z_2$;

2. possiamo esplicitare la soluzione $z \in A_{y_0}$ dell'equazione $e^z = w$, $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ come segue:
$$e^{x+iy} = w \implies \begin{cases} e^x = |w| \\ e^{iy} = \dfrac{w}{|w|} \end{cases}$$
la prima equazione ha evidentemente soluzione $x = \ln |w|$ (l'usuale funzione logaritmo di una variabile reale in $\mathbb{R}^+$). La seconda equazione ha un'unica soluzione per $y \in A_{y_0}$, ed essa è proprio $\arg w$. Dunque, resta definita la funzione inversa
$$\boxed{\log z = \log |z| + i \arg z}$$
il cui dominio è $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e il cui codominio è A_{y_0}.

<u>Osservazioni</u>

1. la scelta dell'intervallo $[y_0, y_0 + 2\pi[$ per $\arg z$ definisce una particolare **diramazione** (**branch**) della funzione logaritmo; la definizione sopra evidenziata è quella della **diramazione della funzione logaritmo appartenente alla striscia** A_{y_0}.

2. la funzione è definita anche su $\mathbb{R}^-$:
$$\log(-2) = \log \sqrt{2} + i\pi, \quad (\arg z \in [0, 2\pi[).$$

3. anche la funzione potenza
$$a^b = e^{b \log a} = e^{b \log |a|} e^{bi \arg a}$$
è una funzione a piú valori se non si fissa il branch per il logaritmo. Infatti,
$$(1+i)^b = e^{b(\log \sqrt{2} + 1\pi/4 + 2\pi n i)}.$$

1.3 Limiti e continuità

Alcune nozioni relativi agli insiemi sono mutuate da quelle già apprese in campo reale. Le ricordiamo qui, sottolineando che dal punto di vista topologico $\mathbb{C}$ coincide con $\mathbb{R}^2$.

- Costruiamo un **disco** attorno a un punto z_0 scegliendo un $r \in \mathbb{R}^+$ tale che

  $$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} | z - z_0| < r\},$$

  mentre un disco **privato del centro** è l'insieme $D(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. $A \subset \mathbb{C}$ è detto **insieme aperto** se per ogni suo punto z_0, $\exists\, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $|z - z_0| < \epsilon$ se $z \in A$. Intuitivamente, A non contiene la propria frontiera, tutti i suoi punti sono "interni".

- Un sottoinsieme $B \subset \mathbb{C}$ è **chiuso** se è aperto il suo complemento

  $$\mathbb{C} \backslash B = \{z \in \mathbb{C} | z \notin B\}.$$

  Un sottoinsieme $B \subset \mathbb{C}$ è **chiuso** se e solo se ogni successione $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ di punti di B che sia convergente (cioè $\lim_{n\to\infty} z_n = w$), converge a un punto di B.

- A è **limitato** se

  $$\exists\, M \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tale che} \quad |z| < M \;\forall z \in A.$$

- $A \subset \mathbb{C}$ è **compatto** se è limitato e chiuso.

- $\mathbb{C}$ (come $\mathbb{R}$) è **completo** in quanto ogni **successione di Cauchy** converge. Si ricorda che una successione di Cauchy, in generale, è costituita da elementi che da un certo n in poi sono arbitrariamente vicini:[2]

  $$|z_n - z_m| < \epsilon, \quad \text{con} \quad n, m \geq N.$$

- $A \subset \mathbb{C}$ è **connesso per cammini** se $\forall a, b \in A$, esiste una curva congiungente questi due punti, tutta contenuta in A.

Ricordiamo le definizioni di **limite** e di **continuità** per funzioni definite in $A \subset \mathbb{C}$ e a valori in $\mathbb{C}$:

1. Supponiamo che $D(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ appartenga ad A. Diremo che

   $$\lim_{z\to z_0} f(z) = a,$$

   se $\forall\, \epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in D(z_0, r)$, che soddisfi $z \neq z_0$ e $|z - z_0| < \delta$, si abbia $|f(z) - a| < \epsilon$.

2. f è continua in $z_0 \in A$ se e solo se

   $$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0);$$

   f è continua in A se lo è in ogni suo punto.

La continuità è legata a ad alcune prorpietà degli insiemi sopra esposte. Sotto l'ipotesi che f sia continua,

- se $F \subset \mathbb{C}$ è chiuso (aperto), $f^{-1}(F)$ è chiuso (aperto);

[2]per esempio, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è di Cauchy nell'insieme dei numeri razionali, ma non è convergente in questo insieme (converge a e che è irrazionale). Dunque l'insieme dei razionali non è completo.

- se $A \subset \mathbb{C}$ è connesso (compatto) , $f(A)$ è connesso (compatto);
- se $A \subset \mathbb{C}$ è compatto e f è a valori reali, f assume in $f(A)$ un valore minimo e un valore massimo;
- se $A \subset \mathbb{C}$ è compatto, f è **uniformemente continua**

Quest'ultima caratteristica va precisata: la continuità è una proprietà **locale**, nel senso che riguarda il comportamento della funzione nell'intorno di un punto. La definizione di continuità uniforme su un insieme $A \subset \mathbb{C}$, richiede che $\forall\, \epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\text{se} \quad z_1, z_2 \in A, |z_2 - z_1| < \delta \quad \text{si ha} \quad |f(z_2) - f(z_1)| < \epsilon$$

e si deve notare che la **globalità** della definizione consiste nel fatto che δ non dipende da un particolare punto di A ma è lo stesso per ogni punto dell'insieme.

1.4 Punti all'infinito. La sfera di Riemann.

In $\mathbb{C}$ non c'è un ordinamento, e dunque non possiamo aggiungere ai punti al finito $+\infty$ e $-\infty$, ma solo ∞, in modo da rendere possibili operazioni del tipo $z + \infty = \infty$ e concetti limite come

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = z_0$$

che significa: $\forall\, \epsilon > 0$ esiste un $R > 0$ tale che $|f(z) - z_0| < \epsilon$ allorché $|z| \geq R$. z è infinitamente grande quando è "esterno" a una circonferenza di raggio "molto grande".

Questo ampliamento, che indicheremo con $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$, ha una conveniente rappresentazione geometrica mediante la sfera di Riemann $\mathbb{S}$. Si tratta di proiettare tutti i punti di una sfera sul piano $\mathbb{C}$ secondo la seguente regola:

1. il polo Sud della sfera è appoggiato sull'origine del sistema di assi Oxy;
2. il polo Nord non viene proiettato e a esso è associato il valore ∞ di $\overline{\mathbb{C}}$;
3. tracciando una semiretta che parte dal polo Nord e interseca prima la sfera e poi il piano, si associa biunivocamente un punto della sfera a un punto del piano.

Con ciò si trasferiscono su $\overline{\mathbb{C}}$ le proprietà di compattezza della sfera. Questo procedimento è detto di **compattificazione** perché permette di rendere limitato un insieme (il piano complesso) con l'aggiunta di un punto. In campo reale, un analogo processo si ottiene estendendo la retta reale ai punti $+\infty$ e $-\infty$.

2 Differenziabilità in $\mathbb{C}$.

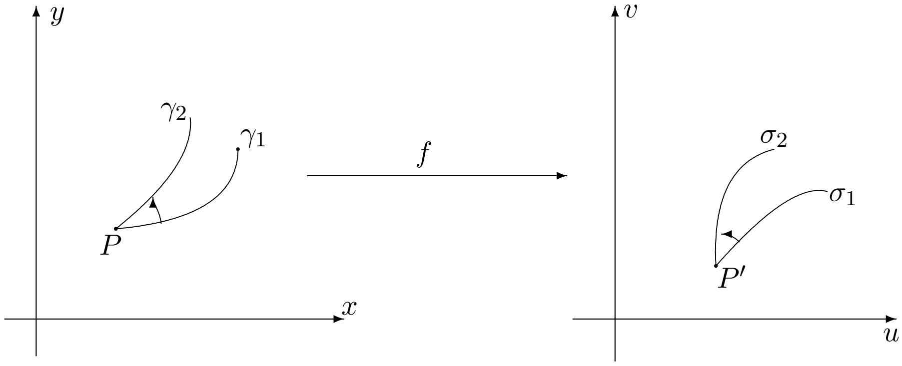
Derivata complessa di una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ ($A \subset \mathbb{C}$ è un aperto) nel punto z_0 è il limite (se esiste)

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Osservazioni

- Il limite non vincola z a tendere a z_0 lungo una particolare direzione, diversamente dalla definizione in campo reale.
- Una funzione derivabile in senso complesso è detta **analitica** e piú avanti verrà spiegato il motivo della definizione, basato sul fatto che in campo complesso l'esistenza della derivata prima implica quella delle derivate di ordine superiore; una funzione è detta **analitica nel punto** z_0 se f' esiste in un intorno di z_0;
- valgono tutte le regole dimostrate per derivate di funzioni di variabile reale.

2.1 Applicazioni conformi.



Se $f(z) = w$, scritta anche come $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, è una funzione a un sol valore, essa trasforma i punti del piano Oxy nei punti del piano $O'uv$. In particolare f trasforma insiemi di punti (come quelli che costituiscono una curva) in insiemi di punti.

Definizione. Una trasformazione è **conforme** in un punto z_0, dove $f'(z_0) \neq 0$, se l'angolo tra due curve uscenti da z_0 ($\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ di figura) è lo stesso e con lo stesso verso di quello formato dalle curve trasformate ($\sigma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ e $\sigma_2(t) = f(\gamma_2(t))$).

D'altra parte, se indichiamo con $S_i = \left.\dfrac{d\gamma_i}{dt}\right|_{t=0}$ i vettori tangenti alle curve in z_0 e con $T_i = \left.\dfrac{d\sigma_i}{dt}\right|_{t=0}$ quelli tangenti in $f(z_0)$, notiamo che la condizione di conformità è verificata se tutti i vettori tangenti sono ruotati dello stesso angolo dalla trasformazione e sono comunque trasformati in vettori non nulli. La trasformazione conforme ruota e allunga vettori tangenti alle curve. Vale allora la definizione equivalente:

Definizione 2. Una trasformazione è **conforme** in un punto z_0, dove $f'(z_0) \neq 0$, se esiste un angolo $\theta \in [0, 2\pi[$ e un numero $r > 0$ tali che per ogni curva $\gamma(t)$ (differenziabile, appartenente al dominio di f, con $\gamma(0) = z_0$, $\gamma'(0) \neq 0$), la curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ sia differenziabile in $t = 0$ e si abbia

$$|T| = r|S| \quad \text{e} \quad \arg T = \arg S + \theta \,(\operatorname{mod} 2\pi)$$

dove r e θ sono determinati dal seguente:

Teorema. Se $f : A \to \mathbb{C}$ è analitica e $f'(z_0) \neq 0$, allora f è conforme in z_0 con

$$\theta = \arg f'(z_0) \quad \text{e} \quad r = |f'(z_0)|.$$

Dimostrazione.

$$T = \left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=0} = f'(z_0)S,$$

da cui segue immediatamente che $|T| = |f'(z_0)| \cdot |S|$ e che $\arg T = \arg f'(z_0) + \arg S \; (\operatorname{mod} 2\pi)$.

Si osservi che l'azione di f' è solo locale, di carattere infinitesimo, in quanto è legata all'azione su vettori tangenti; localmente si ha trasformazione di piccole figure in figure simili (piccoli cerchi in cerchi di raggio diverso ma non in ellissi), e l'ingrandimento delle figure è dato da $|f'(z_0)|^2$. Figure grandi sono trasformate in figure non simili.

Si noti inoltre che nella dimostrazione non si richiede alcuna direzione privilegiata per i vettori tangenti (l'azione è la stessa su tutti i vettori tangenti a tutte le curve in z_0): ciò è dovuto all'arbitrarietà del tendere di z a z_0 nel limite che definisce f'.

Esempio: analizziamo il comportamento infinitesimo della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)} \qquad \text{nel punto } z_0 = i.$$

$$\text{Poiché} \quad f'(i) = -\frac{1}{(i-1)^2} = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{3i}{2}\right),$$

localmente f ruota i vettori tangenti alle curve in $f(i) = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}(-1-i)$ di un angolo pari a $\dfrac{3\pi}{2}$ e ne dimezza la lunghezza.

2.2 Equazioni di Cauchy-Riemann

Teorema di Cauchy-Riemann. *Sia $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A essendo aperto. $f'(z_0)$ esiste se e solo se f è differenziabile nel senso di funzione di variabili reali $(f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y))$[3] , e nel punto $(x_0, y_0) = z_0$ le funzioni u, v soddisfano le cosiddette **equazioni di Cauchy-Riemann***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

Dunque, se le derivate parziali $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ esistono e sono continue su A e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, allora f è analitica in A.

Se $f'(z_0)$ esiste, allora

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Dimostrazione.

- Esiste $f'(z_0) \Longrightarrow u, v$ soddisfano le eqq di C-R. (necessità)
  Infatti, poichè per definizione

  $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

  calcolando il rapporto incrementale per $z = x + iy_0$, si ha

  $$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x - x_0} =$$

  $$= \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

  Siccome

  $$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y),$$

  i limiti convergono alle derivate parziali, definite in campo reale,

  $$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_0,y_0) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x_0,y_0).$$

[3]Si definisce in tal caso derivata di f

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

dove lo Jacobiano rappresenta la miglior approssimazione lineare della funzione in un punto. Da notare che la differenziabilità non richiede tanto l'esistenza dello Jacobiano, quanto quella di tutte le derivate parziali.

L'analogo calcolo per $z = x_0 + iy$ porta a

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x_0, y_0) - i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x_0, y_0).$$

Siccome $f'(z_0)$ esiste indipendentemente da come z tende a z_0, uguagliando i due risultati si ottengono le equazioni di Cauchy-Riemann.

- non dimostriamo qui la sufficienza (si veda sui manuali indicati), e però ricordiamo che rispetto alla necessità si deve richiedere che le derivate parziali di u e v, cioè le componenti dello Jacobiano, siano continue. Questo perchè, dovendo dimostrare che f è differenziabile, dobbiamo essenzialmente mostrare che la derivata di f fornisce la miglior approssimazione lineare di f stessa lungo ogni direzione, e nel fare ciò dobbiamo richiedere la continuità delle derivate parziali.

Enunciamo un importante teorema, di cui non diamo dimostrazione:
Teorema della funzione inversa: Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica, con derivata prima continua e con $f'(z_0) \neq 0$. Allora esistono un intorno U di z_0 e un intorno V di $f(z_0)$ tale per cui si ha che $f : U \to V$ è bijettiva e che f^{-1} è analitica con derivata

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}, \qquad \text{dove} \quad w = f(z).$$

Esempio. Si studi l'analiticità della funzione

$$f(x + iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2).$$

Si noti che le condizioni di Cauchy-Riemann implicano che

$$2x = 2y; \quad 2 = -2x \Longrightarrow f' \text{ esiste solo in } z_0 = -1 - i.$$

Dunque la funzione è differenziabile in $-1 - i$, ma non è analitica perché la derivata non esiste in un intorno di tale punto.

Esempio. Si mostri che la funzione $z \mapsto |z|^2$ non è analitica.
Prima di tutto notiamo che

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e tale derivata è evidentemente nulla dove f è analitica (vds. condizioni di Cauchy-Riemann). Ma

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z|^2 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}) = z = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$$

Dunque la derivata esiste in un sol punto e la funzione, differenziabile in $z = 0$ non è analitica.

2.3 Funzioni armoniche.

Conseguenza immediata delle equazioni di Cauchy-Riemann è che le funzioni $u = \operatorname{Re} f =$ e $v = \operatorname{Im} f$ sono **funzioni armoniche** se f è analitica. vale a dire

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \Delta v.$$

u e v sono dette **armoniche coniugate**.
Proposizione. Su una regione $A \subset \mathbb{C}$ u e v siano funzioni armoniche coniugate e gli insiemi di livello

$$u(x, y) = c_1 \quad \text{e} \quad v(x, y) = c_2$$

definiscano curve regolari. Allora tali curve si intersecano ortogonalmente.

Dimostrazione. I gradienti delle curve, ∇u e ∇v sono ortogonali, rispettivamente alle curve $u = c_1$ e $v = c_2$. Inoltre,

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

per le equazioni di Cauchy-Riemann, dunque sono perpendicolari tra loro e questo basta per assicurare la perpendicolarità delle curve.

Osservazione. Nel piano uv, i cui punti sono ottenuti applicando f ai punti del piano xy, le equazioni

$$u = c_1 \quad \text{e} \quad v = c_2$$

sono evidentemente rette parallele agli assi e perpendicolari tra di loro. Se f è analitica, lo è anche f', e l'applicazione conforme da essa generata deve conservare gli angoli tra i vettori tangenti: dunque le curve trasformate in (xy) hanno vettori tangenti perpendicolari nel punto di intersezione e sono esse stesse perpendicolari. Questo è un altro modo di dimostrare la proposizione precedente, da un punto di vista geometrico-intuitivo.

2.4 La derivata del logaritmo

La funzione logaritmo è definita su $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ed è a valori in una striscia del tipo $\{x + iy | y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$. Fissiamo per es. $y_0 = -\pi$ e notiamo che $\log z$ presenta una discontinuità nei punti del semiasse reale negativo $\{x + iy | y = 0, x < 0\}$[4]. Infatti, dalla definizione,

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0^+} \log z &= \log |x| + i\pi \\ \lim_{y \to 0^-} \log z &= \log |x| - i\pi \end{aligned}$$

Siccome la continuità di una funzione è condizione necessaria per la sua differenziabilità, si dimostra che è analitica la funzione

$$\log z = \log |z| + i \arg z \qquad -\pi < \arg z < \pi,$$

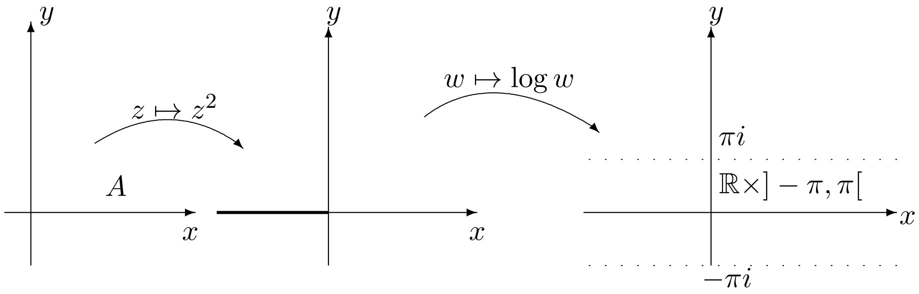
definita su $\mathbb{C}\backslash\{x + iy \,|\, x \leq 0, y = 0\}$.
Questa diramazione è comunemente detta **principale**. In ciascuna diramazione il logaritmo complesso è una funzione analitica e la sua derivata è

$$\log z = \frac{1}{z},$$

dove si è applicato il teorema sulla derivata di funzione inversa, con $w = e^z, z = \log w \Longrightarrow \frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{w}$.

Esempio di composizione dei domini. Dominio di analiticità per $z \mapsto \log z^2$.

[4] è $\arg z$ a essere discontinuo.



Nella figura di mezzo è disegnato il dominio (*branch principale* del logaritmo complesso)

$$\mathbb{C}\backslash\{x+iy \,|\, x \leq 0, y = 0\}$$

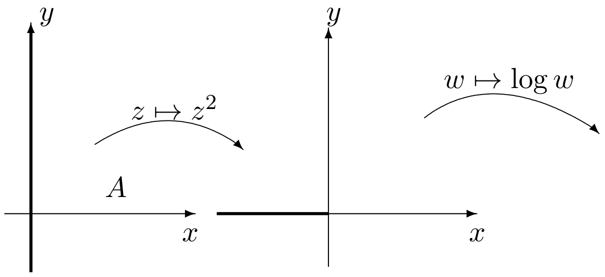
ma il dominio A della funzione composta va definito nel piano della prima figura e siccome l'argomento del logaritmo, z^2 è una funzione intera, l'unica limitazione è che l'immagine di z^2 non appartenga al semiasse negativo del dominio del logaritmo. Prima di tutto analizziamo quali punti di A sarebbero mappati sull'asse reale. La condizione è che sia reale

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

e ciò è evidentemente vero per $2\theta = n\pi$, n numero intero. Ma se n è pari $r^2 \cos 2n\pi$ è un numero reale positivo. Dunque il dominio da rimuovere si ottiene richiedendo

$$r^2 \cos(2n+1)\pi \leq 0 \Longrightarrow \arg z = \pm\frac{\pi}{2}$$

(naturalmente $\arg z^2 = \pm\pi$); nessuna condizione invece su r^2. Allora, i punti di A che non devono essere mappati sono tutti e soli quelli dell'asse immaginario.



L'insieme di definizione della funzione composta è dunque

$$\mathbb{C}\backslash\{z \,|\, \arg z = \pm\frac{\pi}{2}\} \quad \text{cioè}$$

$$\mathbb{C}\backslash\{x+iy \,|\, x = 0\}$$

I semiassi in grassetto sono i*"branch cuts"*: i domini rimossi per mantenere la monodromia o la continuità di una funzione.

Esempio. Definiamo la regione su cui è analitica la funzione $\sqrt{e^z+1}$ e valutiamo la sua derivata.

Come nell'esempio precedente, il dominio del logaritmo complesso condiziona quello di $\sqrt{e^z+1}$. Anche in questo caso chiediamo che il codominio della radice non comprenda il semiasse reale negativo. In tal caso si ha:

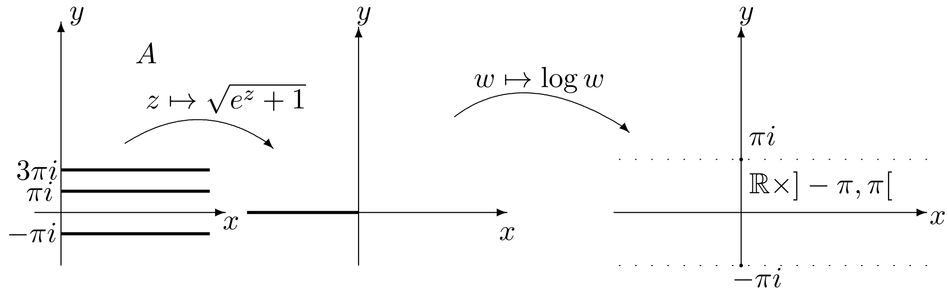
$$e^z + 1 \in \mathbb{R} \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{Im} z = n\pi,$$

in quanto $e^z = e^x \cos x + ie^x \sin y$. Se n è pari il coseno è sempre positivo. Dobbiamo dunque richiedere che

$$e^x \cos(2n+1) + 1 \geq 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

e questo è vero solo se x è minore di zero. Allora i branch cuts sono le semirette di A

$$\{x+iy|x \geq 0, y = (2n+1)\pi\}.$$



3 Il teorema di Cauchy.

3.1 Integrali curvilinei

La teoria degli integrali curvilinei in campo complesso ricalca, nelle definizioni e nei primi risultati, quanto già noto in campo reale. D'altra parte, se

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

il calcolo si riconduce a

$$\int_\gamma f(z) = \int_\gamma (u+iv)d(x+iy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$$

dove $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ è una funzione di variabile reale a valori complessi. Ricordiamo solo che

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

e che $\qquad s(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$

è la lunghezza della curva.

<u>Esempio 1</u>. Valutiamo un integrale curvilineo su un percorso chiuso:

$$\int_\gamma xdz \quad \text{dove } \gamma \text{ è il contorno di un quadrato di lato unitario.}$$

La curva (spezzata) può essere parametrizzata in modo che $\gamma : [0,4] \to \mathbb{C}$ individui i quattro lati come segue:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= t + 0i;\ 0 \le t \le 1 \quad &&\text{(lato su asse delle } x \text{ dall'origine a } x = 1)\\
\gamma_2 &= 1 + (t-1)i;\ 1 \le t \le 2 \quad &&\text{(lato che unisce i punti } (1,0) \text{ e } (1,1)\\
\gamma_3 &= (3-t) + i;\ 2 \le t \le 3 \quad &&\text{(lato che unisce i punti } (1,1) \text{ e } (0,1))\\
\gamma_4 &= 0 + (4-t)i;\ 3 \le t \le 4 \quad &&\text{(lato che unisce i punti } (0,1) \text{ e } (0,0))
\end{aligned}$$

Allora, calcolando le varie derivate γ_k', l'integrale è

$$\int_\gamma xdz = \int_0^1 tdt + \int_1^2 idt + \int_2^3 (t-3)dt + \int_3^4 0dt = i.$$

A futura memoria si noti che la funzione integranda non è analitica (perché?), e che la sua integrazione su un percorso chiuso non è nulla.

Proposizione. *Sia f continua su un insieme aperto A e γ una curva continua a tratti, contenuta in A. Supponiamo che esista una costante positiva tale che*

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \gamma,$$

allora

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq M s(\gamma).$$

Dimostrazione Sia $\int_a^b g(t) = re^{i\theta}$. Conseguentemente,

$$r = \mathrm{Re}\, r = \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} g(t)) dt.$$

Siccome il modulo di un numero complesso è sempre maggiore o uguale della sua parte reale, si ha che

$$\mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} g(t)) \leq |(e^{-i\theta} g(t))| = |g(t)|$$

e conseguentemente

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| = r \leq \int_a^b |g(t) dt.$$

Sfruttando questo risultato, si ha allora che

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)| |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b ||\gamma'(t)| dt = M s(\gamma).$$

Esempio 2. Sia γ la semicirconferenza superiore (nel semipiano $y \geq 0$) di raggio unitario e centro nell'origine. Cerchiamo una limitazione a

$$\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right|.$$

L'equazione parametrica della curva è naturalmente

$$\gamma(t) = e^{it}, \qquad 0 \leq t \leq \pi,$$

cosicché $\gamma'(t) = ie^{it}$ e $|\gamma'(t)| = 1$. Si noti che

$$\left| \frac{e^z}{z} \right| = \left| \frac{e^{\cos t + i \sin t}}{e^{it}} \right| = e^{\cos t} \leq e$$

dove abbiamo considerato che z varia sulla curva γ. Allora e è proprio la costante positiva della proposizione precedente, ed essendo pari a π la lunghezza della semicirconferenza, si ha

$$\left| \frac{e^z}{z} \right| \leq e \Longrightarrow \left| \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right| \leq e\pi.$$

3.2 Teorema di Cauchy-Goursat.

Teorema - versione preliminare. Se f è una funzione analitica, con $f'(z)$ continua, in un dominio $A \subset \mathbb{C}$ racchiuso da una curva semplice e chiusa γ, allora

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Dimostrazione. Scrivendo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, e $dz = dx + idy$,

$$\int_\gamma f(z) = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udx + vdy).$$

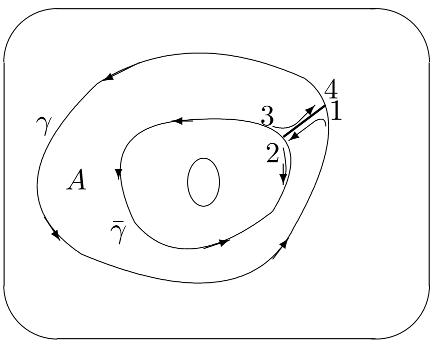
Ciascuno di questi integrali di linea può essere trasformato in un integrale di superficie, sulla base del teorema di Green[5]:

$$\int_\gamma (udx - vdy) = \int \int_A \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy, \qquad \int_\gamma (udx + vdy) = \int \int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

che si annullano in virtú delle equazioni di Cauchy-Riemann.

Una conseguenza fondamentale di questo teorema è il
Teorema della deformazione: se f è analitica in un dominio A l'integrale lungo una curva semplice chiusa $\gamma \in A$ è uguale all'integrale calcolato lungo qualsiasi curva semplice chiusa $\bar{\gamma} \in A$ **omotetica** a γ:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\bar{\gamma}} f(z)dz.$$



La curve γ e $\bar{\gamma}$ sono immerse in un dominio generico e non sono necessariamente i bordi di una regione. Chiediamo solo che le due curve siano omotetiche, cioè che si possa deformare con continuità una curva fino a sovrapporla sull'altra senza incontrare ostacoli topologici (A non ha *buchi* tra γ e $\bar{\gamma}$); A non è però necessariamente semplicemente connessa, e dunque la funzione $f(z)$ della proposizione non è necessariamente analitica **all'interno** di γ, né deve essere $\int_\gamma f dz = 0$. L'idea della dimostrazione è di costruire una curca chiusa, percorrendo dapprima tutta γ in senso antiorario dal punto 4 al punto 1 (punti tra di loro infinitamente vicini), di aggiungere un tratto *"rettilineo"* γ_0 (da 1 a 2) che permette di connettere γ a $\bar{\gamma}$, di percorrere tutta $\bar{\gamma}$ in senso **orario** (da 2 a 3) e infine di tornare al punto di partenza percorrendo γ_0 all'incontrario (da 3 a 4).

Il percorso chiuso descritto dalla figura racchiude una regione in cui $f(z)$ è analitica. Dunque, per il teorema di Cauchy,

$$\int_{\gamma+\gamma_0-\bar{\gamma}-\gamma_0} f(z)dz = 0 = \int_\gamma f dz + \int_{\gamma_0} f dz - \int_{\bar{\gamma}} f dz - \int_{\gamma_0} f dz,$$

dove si è assunto che le curve percorse in senso antiorario corrispondano all'incremento positivo del parametro, per cui $\int_{-\bar{\gamma}} = - \int_{\bar{\gamma}}$. Per tale motivo i due contributi lungo γ_0 si annullano e resta dimostrata

[5] il teorema di Green richiede esplicitamente la continuità delle derivate parziali delle funzioni u e v.

la tesi.
Si noti che questo teorema è la base per una generalizzazione del teorema di Cauchy a domini molteplicemente connessi. L'idea è che regioni come A della figura siano da considerarsi semplicemente connesse, relativamente al contorno costruito ad hoc.

Nota su Goursat. *Il contributo di Goursat al teorema di Cauchy consiste nel rimuovere direttamente l'ipotesi di continuità su $f'(z)$, mostrando dapprima che $\int_\gamma f dz = 0$ è vero per ogni funzione analitica in domini di forma triangolare o rettangolare, poi indicando come ricondurre l'integrazione lungo curve chiuse a quella lungo spezzate triangolari o rettangolari.*[6]

Corollario al teorema di Cauchy. Supponiamo che f sia analitica in una regione A semplicemente connessa. Allora, qualsiasi siano due curve Γ_1 e γ che congiungono due punti z_1 e z_2 di A,

$$\int_\Gamma f dz = \int_\gamma f dz.$$

Corollario al teorema di Cauchy. Se f è analitica su una regione semplicemente connessa A, esiste una funzione F definita in A (unica a parte costanti additive) tale che

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in A.$$

Conseguenza pratica di questo paragrafo. La possibilità di deformare il contorno dell'integrale curvilineo, anche in regioni dove una funzione non è analitica, permetterà in molti esercizi e applicazioni di calcolare gli integrali su un contorno molto semplice quale quello circolare. In tal caso, infatti, per una circonferenza di raggio R e centro a, abbiamo

$$\gamma(t) = a + Re^{i\theta} \Longrightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))Rie^{it}dt.$$

3.3 Particolari integrali di funzioni non analitiche

Di grande utilità si mostra il calcolo di questi semplici integrali:

1. $\int_\gamma \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$, con $n = 2, 3, 4, \ldots$.
2. $\int_\gamma \dfrac{dz}{(z-z_0)}$
3. e la stima di $|\int f(z)dz|$ per una qualsiasi funzione analitica in un dominio $A \backslash \{z_0\}$ ma che in un intorno di z_0 è limitata da una costante: $|f(z)| \leq M$.

Consideriamo come contorno chiuso nei primi due casi la circonferenza di raggio unitario e centro z_0

$$\gamma(t) = z_0 + e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Mentre nel primo caso esiste nella regione delimitata dalla circonferenza e privata di z_0 l'integrando ammette la primitiva

$$\frac{1}{1-n}\frac{1}{(z-z_0)^{n-1}},$$

[6] Si veda p.es. la dettagliata trattazione nel paragrafo 2.3 del testo *Basic Complex Analysis* di Marsden e Hoffman.

nel secondo caso, come abbiamo visto in un esercizio precedente, la primitiva non è definita perché il logaritmo, possibile candidato, non è derivabile in tale dominio. Un calcolo diretto, cioè sostituendo $z = \gamma(t)$, mostra proprio che

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0, \qquad \text{con} \quad n = 2, 3, 4, \ldots; \qquad\qquad \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)} = 2\pi i.$$

Per quel che riguarda il terzo caso, si noti che deformando il contorno γ a una circonferenza γ_ϵ di raggio ϵ piccolo a piacere attorno a z_0, si ottiene sicuramente che

$$\int_\gamma f dz = \int_{\gamma_\epsilon} f dz,$$

e, potendo scegliere ϵ, ci si può restringere all'intorno di z_0 in cui $|f(z)| \leq M$. Ma in quell'intorno, per un risultato già dimostrato, abbiamo che

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} f dz \right| \leq M 2\pi\epsilon,$$

e facendo tendere ϵ a zero, abbiamo il notevole risultato:

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

3.4 Le formule integrali di Cauchy

<u>Teorema</u>. Sia f una funzione analitica in un dominio A e $\gamma \in A$ una curva chiusa omotopica a un punto. Per un arbitrario $z_0 \in A$ ma $\notin \gamma$, vale

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz}$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{se } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

allora g è sicuramente continua in z_0, perché f è differenziabile, e analitica altrove. Per quanto precedentemente dimostrato, siccome in un intorno di z_0, g è sicuramente limitata in valore assoluto, $\int_\gamma g = 0$. Di conseguenza

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_\gamma g(z) dz = 0$$

ma già sappiamo che

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

e il teorema resta cosí dimostrato.

<u>Osservazioni</u>.

- Si noti che il valore di f per ogni punto interno a γ è completamente determinato dai valori di f calcolati sui punti di γ.

- Si osservi anche che la funzione integranda dell'enunciato è analitica in $A\backslash\{z_0\}$ e dunque l'integrale non può essere annullato in virtú del teorema di Cauchy.

- Il teorema può essere facilmente esteso a curve non semplici. Infatti, detto

$$I(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz$$

il numero di avvolgimenti attorno a z_0, è sufficiente modificare la formula di Cauchy in

$$f(z_0)I(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Ci limiteremo comunque a considerare curve semplici.

Teorema. Sia f una funzione analitica in un dominio A. Allora in A tutte le derivate di f sono definite. Inoltre, se $\gamma \in A$ è una curva chiusa omotopica a un punto e $z_0 \in A$ ma $\notin \gamma$, vale

$$\boxed{f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz}$$

Osservazioni.

- La dimostrazione, che omettiamo, si basa sulla possibilità di derivare la formula di Cauchy in entrambi i membri rispetto a z_0. Essenzialmente si deve dimostrare, per es., che

$$\frac{\partial}{\partial z_0}f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z_0}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right),$$

e cosí di seguito per le derivate successive, ricordando che z è la variabile sulla curva, z_0 sull'interno.

- Conseguenza fondamentale: una funzione differenziabile di variabile complessa è infinitamente differenziabile.

Esempio. Si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z^2+1)^2}, \qquad \text{per } t>0, \qquad \text{sulla circonferenza } \gamma(\theta) = 3e^{i\theta}.$$

È facile verificare che

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(z+i)(z-i)} - \frac{z^2-1}{(z+i)^2(z-i)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right) - \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{(z+i)^2}\right].$$

In tal modo si può suddividere l'integrazione richiesta in quattro separate integrazioni in cui si sfruttano sia la formula di Cauchy che quella per le derivate:

$$e^{tz}(i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{tz}}{z-i}dz; \quad e^{tz}(-i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{tz}}{z+i}dz;$$

$$\frac{d}{dz}e^{tz}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{tz}}{(z-i)^2}dz; \ \frac{d}{dz}e^{tz}\bigg|_{z=-i} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{tz}}{(z+i)^2}dz.$$

Allora, riordinando i risultati, si ha che

$$\int_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left[\int_\gamma \frac{e^{tz}dz}{i(z-i)} - \int_\gamma \frac{e^{tz}dz}{i(z+i)} - \int_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z-i)^2} - \int_\gamma \frac{e^{tz}dz}{(z+i)^2}\right] =$$

$$= \pi i\left[\frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} - t\frac{e^{it}}{2} - t\frac{e^{-it}}{2}\right] = \pi i(\sin t - t\cos t).$$

3.5 Conseguenze delle formule integrali di Cauchy

La prima conseguenza risponde a una domanda sensata riguardante la formula per le derivate: se esistono infinite derivate, il termine $k!$ rende infinitamente grandi le derivate di ordine elevato? La risposta è nella seguente proposizione.

La disuguaglianza di Cauchy. Supponiamo che f sia analitica in una regione A e che γ sia una circonferenza di centro z_0 e raggio R; γ e il suo interno siano contenuti in A. Se f su γ è limitata (cioè $|f(z)| \leq M \ \forall z \in \gamma$), allora

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k}M, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dimostrazione. Prendendo il modulo di entrambi i membri nella formula per le derivate, si ha

$$|f^{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\right|;$$

tenendo conto della limitazione su $|f|$ e di $|z - z_0| = R$,

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right| \leq \frac{M}{R^{k+1}} \Longrightarrow \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\right| \leq \frac{M}{R^{k+1}} \cdot s(\gamma) = \frac{M}{R^k}2\pi,$$

da cui segue la tesi.

Teorema di Liouville. Se f è intera ed esiste una costante positiva M tale che

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

allora f è costante.

Dimostrazione. Con $k = 1$, la disuguaglianza di Cauchy diventa

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Fissando z_0 e prendendo $R \to \infty$, concludiamo che $|f'(z_0)| = 0$ e che dunque $f'(z_0) = 0$. Basta ripetere la valutazione in ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ e il teorema è dimostrato.

Teorema fondamentale dell'algebra. Siano $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ con $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Si consideri il polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

Allora esiste un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$. Il teorema garantisce che le equazioni algebriche in campo complesso hanno sempre n radici (senza specificare il grado di molteplicità). Potremo sempre scrivere l'equazione come

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = 0$$

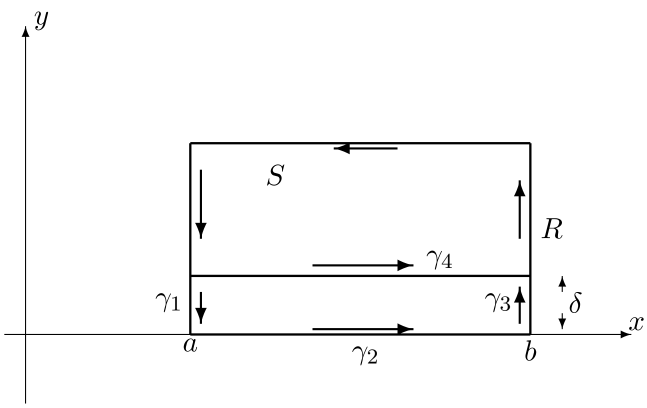
senza richiedere che le radici siano tra loro distinte. La dimostrazione si basa sul teorema di Liouville.

Teorema di Morera. Supponiamo che $\int_\gamma f dz = 0$ per ogni curva chiusa della regione A e che f sia continua in A. Allora f è analitica in A e esiste una funzione F analitica in A tale che $f = F'$.

Dimostrazione. L'annullarsi di ogni integrale su curve chiuse garantisce l'esistenza di una primitiva F, sicuramente analitica in quanto la sua derivata esiste. Per la formula integrale di Cauchy per le derivate, F ammette tutte le derivate e dunque anche f. Il teorema costituisce una sorta di inverso del teorema di Cauchy.

Corollario. Se una funzione f è analitica in una regione $A \backslash \{z_0\}$ e continua in z_0 allora è analitica su tutto A.

Esempio. Supponiamo che una funzione sia analitica dappertutto tranne che sull'asse reale, dove è continua. Mostriamo che f è conseguentemente analitica anche sull'asse reale. Per essere operativi, supponiamo che f sia analitica in una regione A rettangolare, tranne che su lato che giace su $\mathbb{R}$.



R è il rettangolo che poggia sull'asse reale, S è un rettangolo interno a R, con una base parallela all'asse $0x$, a distanza δ da esso. I domini sono compatti, per cui dove f è continua, è anche uniformemente continua: $\exists \delta > 0$ tale che $\forall \epsilon > 0$

$$|z_1 - z_2| \leq \delta \Longrightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

Con riferimento alla figura,

$$\left| \int_R f - \int_S f \right| = \left| \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f - \int_{\gamma_4} f \right| \leq \left| \int_{\gamma_1} f \right| + \left| \int_{\gamma_2} f - \int_{\gamma_4} \right| + \left| \int_{\gamma_3} f \right|$$

Poiché f è analitica ovunque e continua sull'intervallo $[a, b]$, è limitata da un numero M: $|f(z)| < M$, e conseguentemente gli integrali lungo le direzioni parallele all'asse Oy sono limitati da M per la lunghezza della curva (δ) . Inoltre, possiamo scrivere il modulo della differenza tra gli integrali lungo γ_2 e γ_4 come

$$\left| \int_a^b [f(x) - f(x + \delta i)] dx \right|$$

e, in virtú della uniforme continuità,

$$\left| \int_R f - \int_S f \right| \leq M\delta + \int_a^b |f(x) - f(x + \delta i)| dx + M\delta \leq 2M\delta + \epsilon(b - a)$$

ed essendo ϵ piccolo a piacere e scegliendo $\delta < \epsilon$, si ha

$$\int_R f - \int_S f = 0 \Longrightarrow \int_R f = 0$$

in quanto l'integrazione su S si annulla, essendo f analitica. La conseguenza è che f è analitica in tutto R.

Teorema del massimo modulo. Sia $A \subset \mathbb{C}$ una regione aperta e connessa e sia $f : \bar{A} \to \mathbb{C}$ analitica in A e continua sulla sua chiusura $\bar{A}$. Allora $|f|$ ha un valore massimo (finito) su $\bar{A}$, assunto sulla frontiera di A. Se il valore massimo dovesse essere assunto anche in punti interni, allora f dovrebbe essere costante su $\bar{A}$.

Esempio. Si trovi il massimo modulo di e^z sul disco $|z| \leq 1$. La circonferenza $\gamma = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ è la frontiera dell'aperto $A = \{z||z| < 1\}$. Su tale frontiera $|e^1| = e$.

4 Rappresentazione delle funzioni analitiche in termini di serie di potenze

4.1 preliminari sulla convergenza di successioni e serie

Le definizioni riguardanti successioni e serie in campo complesso ricalcano quelle già studiate in campo reale.

- Per esempio, il numero complesso (funzione di n)

$$z_n = \frac{n^2 i^n}{n^3 + 1}$$

  è il termine n-esimo della **successione** $z_1, z_2, z_3, \ldots$.

- mediante i singoli termini della successione si possono definire delle **somme parziali**

$$S_1 = z_1; \quad S_2 = z_1 + z_2; \quad S_3 = z_1 + z_2 + z_3; \quad S_n = z_1 + z_2 + \ldots z_n;$$

  la **somma parziale n-esima** dei primi n termini è, nel nostro esempio,

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots z_n = \frac{i}{2} - \frac{4}{9} + \ldots + \frac{n^2 i^n}{n^3 + 1}.$$

- La successione definita mediante l'n-esimo termine della somma parziale

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

  è la **serie** $\quad \dfrac{i}{2} - \dfrac{4}{9} + \ldots + \dfrac{n^2 i^n}{n^3 + 1} + \ldots$

- una **successione di funzioni** è invece, per esempio,

$$f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} z \mapsto 1 + \frac{z}{n}$$

  (ad ogni n associamo una funzione, il cui valore dipende da z). Anche in questo caso si possono formare somme parziali

$$S_n(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$$

e, mediante la corrispondente successione, si definisce una **serie di funzioni**

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(z).$$

Definizione. Una successione z_n di numeri complessi converge a un numero complesso z_0 ($z_n \to z_0$) se $\forall \epsilon > 0$ esiste un intero N tale che

$$n \geq N \quad \text{implica che} \quad |z_n - z_0| < \epsilon.$$

Definizione. Se la successione delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

converge a S, cioè se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, allora avremo la convergenza della serie di numeri complessi

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S.$$

In $\mathbb{C}$, come in $\mathbb{R}$, le successioni di Cauchy sono convergenti:

Definizione. Una successione z_n è di **Cauchy** se, comunque si fissi un $\epsilon > 0$, esiste un intero N tale che $\forall n, m \geq N$ si abbia $|z_n - z_m| < \epsilon$.
Questa definizione induce una condizione di convergenza sulle serie (per ottenerla si valuti $|S_{n+p} - S_n|$):

Criterio di Cauchy per le serie. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge se e solo se $\forall \epsilon > 0$ esiste un intero N tale che $n \geq N$ implica che

$$\left| \sum_{k+1}^{n+p} z_k \right| < \epsilon \quad \forall\, p = 1, 2, 3, \ldots$$

Definizione. Un serie $\sum_{k=1}^{\infty}$ è **assolutamente convergente** se converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_n|.$$

Proposizione. Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty}$ converge assolutamente, allora è convergente[7].

Questa proposizione è importante perchè la serie dei moduli è una serie reale, per la quale valgono tutti i criteri di convergenza studiati in campo reale. Ricordiamo essenzialmente:

serie geometrica Solo se $|r| < 1$, abbiamo convergenza:

$$\sum_{r=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

criterio del confronto Se $0 \leq a_k \leq b_k$

$$\text{la convergenza di} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_k \Longrightarrow [\ \text{convergenza di} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_k.$$

[7] il viceversa non è vero come si verifica con la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che, infatti, diverge

potenze di n Solo se $p > 1$ abbiamo convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

criterio del rapporto Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; se il limite è > 1 diverge, se $= 1$ il criterio non dà risposte.

criterio della radice Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; se il limite è > 1 diverge, se $= 1$ il criterio non dà risposte.

4.2 Convergenza uniforme

I criteri di convergenza per le successioni e le serie di funzioni ricalcano quelle numeriche. Si deve osservare comunque, che quando si dice che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{se } \forall\epsilon > 0 \ \exists N \quad \text{tale che } n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

è sottointeso che N dipende da z e da ϵ. Parleremo in tal caso di **convergenza puntuale**, e analogamente parleremo di convergenza puntuale delle serie. Ma se si mostra che per uno stesso N, comunque si scelga ϵ e per ogni punto del dominio delle $f_n(z)$ si ha convergenza, avremo **convergenza uniforme**. Potremo allora applicare il criterio di convergenza di Cauchy:
Teorema.

(i) Una successione $f_n(z)$ converge uniformemente in A se e solo se $\forall\epsilon > 0$ esiste un intero N tale che
$$n \geq N \Longrightarrow |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \epsilon \quad \forall z \in A \text{ e per tutti i } p = 1, 2, 3, \ldots$$

(ii) Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente in A se e solo se $\forall\epsilon > 0$ esiste un intero N tale che
$$n \geq N \Longrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \epsilon \quad \forall z \in A \text{ e per tutti i } p = 1, 2, 3, \ldots$$

Esempio. Si studi la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n(1-z)$ nel disco $D = \{z | \, |z| < 1\}$. Si noti che:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n(1-z) - (1-z)$

(ii) $S_n(z) = z(1-z) + z^2(1-z) + \ldots + z^n(1-z) = z - z^{n+1}$.

La condizione (i) assieme al fatto che nel disco D, come vedremo nel prossimo esempio,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{(1-z)},$$

ci dice che la serie converge a z. Verifichiamolo con la definizione, tenendo conto della (ii):

$$\forall\epsilon > 0, \quad \text{deve esistere un } N \text{ tale che, } n \geq N \text{ implica che} \quad |S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \epsilon.$$

Discutiamo se esiste l'intero N e se esso è indipendente da ϵ e dal punto z nel disco (uniformità). Usando i logaritmi (di variabile reale), si ha

$$(n+1)ln|z| < \ln\epsilon \Longrightarrow n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|z|},\ z \neq 0$$

la disuguaglianza $<$ ha cambiato verso ($>$) perchè abbiamo diviso per un numero sicuramente negativo ($\ln r,\ 0 < r < 1$). Esaminiamo ora il comportamento del rapporto (positivo) $\frac{\ln\epsilon}{\ln|z|}$: nell'intorno di $|z| = 1$ il rapporto cresce indefinitamente e sicuramente riusciamo a determinare l'intero N, ma esso dipenderà sensibilmente da quanto ci si avvicina al bordo del dominio. Dunque abbiamo convergenza ma non in senso uniforme. Se spostassimo il bordo all'interno, anche di poco, rifacendo tutti i conti per il disco

$$D' = \{z|\,|z| \leq \frac{9}{10}\},$$

notiamo che in $|z| = \frac{9}{10}$, $|ln|z||$ ha il valore minimo e, dunque, $\frac{\ln\epsilon}{\ln\frac{9}{10}}$ ha il valore massimo. Allora per ogni z del disco

$$n \geq N = \frac{\ln\epsilon}{\ln\frac{9}{10}} - 1 \Longrightarrow |S_n(z) - z| < \epsilon \qquad \text{convergenza uniforme.}$$

La condizione di uniforme convergenza ha alcune importanti conseguenze: permette di trasferire continuità e analiticità degli elementi della successione (e serie) di funzioni sulla funzione limite. È quanto contenuto nelle seguenti due proposizioni.

Convergenza continua. Se le funzioni della successione $f_n(z)$ sono continue su $A \subset \mathbb{C}$ e la convergenza $f_n \to f$ è uniforme, allora f è continua su A. Sotto le stesse condizioni, se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ su A, allora f è continua su A.

Convergenza analitica (Weierstrass). Sia f_n una successione di funzioni analitiche definite su un aperto $A \subset \mathbb{C}$;

(i) se $f_n \to f$ su ogni **disco chiuso** appartenente ad A, f è analitica. Per di piú f'_n converge puntualmente a f' su A e uniformemente su ogni disco chiuso di A;

(ii) se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge a f uniformemente su ogni **disco chiuso** appartenente ad A, allora f è analitica su A. Per di piú $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ converge puntualmente su A e uniformemente su ogni disco chiuso di A;

Questo secondo teorema mostra, oltre al trasferimento delle proprietà di analiticità, che si può derivare termine a termine la serie delle f_n. Si osservi che il termine disco chiuso appartenente ad A, significa semplicemente che la regione

$$D = \{z|\,|z - z_0| \leq r\}$$

comprende anche la frontiera e, essendo A un aperto, non deve avere punti in comune con la chiusura di A.

Come decidere che una convergenza è uniforme? Molto spesso si ricorre a un importante criterio:

Criterio M di Weierstrass. Sia f_n una successione di funzioni definite su un aperto $A \subset \mathbb{C}$; supponiamo che esista una successione di numeri reali positivi M_n con le seguenti proprietà:

(i) $|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in A$;

(ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ è convergente.

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge assolutamente e uniformemente su A

Esempio. Mediante il criterio di Weierstrass si dimostri che su ogni disco $D = \{z|\,|z| \leq r,\ r < 1\}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge assolutamente e uniformemente alla funzione analitica $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Applichiamo il criterio M: $|z|^n < r^n$ e, d'altra parte, la serie di elementi (di numeri reali positivi) $M_n = r^n$ è proprio la serie geometrica convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

e per il criterio di Weierstrass si ha convergenza assoluta e uniforme. Volendo ricavare il limite della serie, notiamo che

$$(1-z)(1+z+z^2+\ldots+z^n) = 1-z^{n+1};$$

dividendo termine a termine per $z-1$, si ottiene che

$$\left|\frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Ma $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ quando $r < 1$ e si ha dunque il limite previsto.

4.3 Serie di potenze

Partiamo da tre proposizioni fondamentali, che caratterizzano la convergenza di una generica serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dove, evidentemente, ciascun termine della serie è una funzione intera; tutte le volte che proviamo uniforme convergenza, possiamo dunque applicare il teorema sulla convergenza analitica del precedente paragrafo.

Convergenza. *Esiste un unico numero $R \geq 0$ (anche uguale a $+\infty$) detto* ***raggio di convergenza****, tale che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \begin{cases} \textit{converge} & \textit{se } |z-z_0| < R \\ \textit{diverge} & \textit{se } |z-z_0| > R. \end{cases}$$

Inoltre, la convergenza è uniforme e assoluta su ogni disco chiuso in $A = \{z|\ |z-z_0| < R\}$. Sui punti del bordo del disco non si può formulare alcuna ipotesi a priori.

L'uniforme convergenza e il teorema sulla convergenza analitica hanno come conseguenza la seguente

Proposizione. *Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ è una funzione analitica all'interno del proprio* ***cerchio di convergenza****.*

Derivata di serie di potenze. Anche la serie delle derivate converge, e nello stesso cerchio di convergenza. Inoltre, i coefficienti a_n sono proprio

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

La derivabilità consegue anch'essa dal teorema della convergenza analitica. Inoltre, si noti che

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Longrightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \\
\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} &= 1 \cdot a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \Longrightarrow f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2} \\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(z) = n! a_n &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}.
\end{aligned}$$

Conseguentemente, $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$.

Per il calcolo del raggio di convergenza risultano particolarmente utili le seguenti due proprietà per una generica serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$:

formula del rapporto. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

questo è esattamente il raggio di convergenza per la serie.

formula della radice. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

questo è esattamente il reciproco del raggio di convergenza per la serie.

Esempio. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$ è dato da

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^n (n+1)}{n!(n+1) n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Esempio. Si valuti la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ e quella della serie ottenuta per derivazione.

Qui R è evidentemente uguale a $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Come garantito dal teorema della convergenza analitica, anche la serie ottenuta con una derivata, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ ha il medesimo raggio di convergenza, 1. Le due serie si comportano però diversamente sul bordo, dove il teorema della convergenza non dà informazioni. Infatti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| \overset{|z|=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

e la serie è assolutamente convergente. La seconda serie sul bordo può diventare una serie armonica e divergere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} \overset{z=1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Alla fine, dopo aver dimostrato che le serie di potenze convergono uniformemente a funzioni analitiche, le cui derivate uguagliano i coefficienti della serie, invertiamo il punto di vista, mostrando che una funzione analitica è sempre sviluppabile in serie di Taylor.

Teorema di Taylor. f sia una funzione analitica su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Per un punto $z_0 \in A$ designiamo con $A_r = \{z \in A |\ |z - z_0| < r\}$ un disco contenuto in A (in genere quello di massimo raggio, cosicché se $A_r = A = \mathbb{C}$, $r = \infty$). Allora, per ogni $z \in A_r$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge in A_r (cioè ha raggio di convergenza $\geq r$), proprio a $f(z)$. Questa è la serie di taylor di f nell'intorno del punto z_0.

Zeri di una funzione analitica. Conseguenza della precedente teoria è la possibilità di caratterizzare i punti in cui una funzione analitica si annulla. Sia f una funzione analitica nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$ e $D(z_0, r)$ il disco aperto di convergenza per la sua serie di Taylor. Se in z_0 la funzione si annulla, possono in sintesi verificarsi due evetualità:

$$f(z_0) \begin{cases} f^{(k)}(z_0) = 0 \ \ \forall k & \Longrightarrow \ f(z) \quad \text{è identicamente nulla in } D \\ f^{(k)}(z_0) = 0 \text{ per } k < n \quad \text{ma } f^{(n)}(z_0) \neq 0 & \Longrightarrow \ f \text{ ha in } z_0 \text{ uno zero di ordine } n \end{cases}$$

Nel secondo caso, la serie di Taylor residua è della forma

$$f(z) = (z - z_0)^{n+1}[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots]$$

e la serie nella parentesi quadra converge in $D(z_0, r)$ a una funzione analitica $\varphi(z)$, che ha la proprietà $\varphi(z_0) = a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Possiamo allora dire che una funzione f ha uno **zero di ordine n in** z_0 se può essere fattorizzata in un intorno di z_0 come

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad \varphi \text{ analitica in un intorno di } z_0 \text{ e } \varphi(z_0) \neq 0.$$

Osservazione. È evidente che, per continuità, φ è diversa da zero in un intorno di z_0 e si può dunque pensare a un disco D' interno a D nel quale f abbia uno zero solo in z_0. Per es. si consideri $f(z) = 1 - \cos z$ nell'origine. La serie di Taylor di f attorno a tale punto è

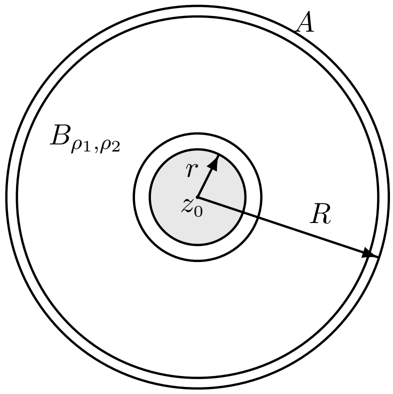
$$f(z) = (z - 0)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24}(z - 0)^2 + \cdots\right] \Longrightarrow \varphi(z) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24}z^2 + \frac{1}{720}z^4 - \cdots\right]$$

e naturalmente $\varphi(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. Siccome poi

$$\varphi(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2},$$

tale funzione è diversa da zero all'interno dell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$. Questo verifica che **gli zeri di f sono punti isolati**.

4.4 La serie di Laurent



A è la regione aperta compresa tra le due circonferenze di raggior r e R:

$$A = \{z \in \mathbb{C} | r < |z - z_0| < R\}$$

Le due circonferenze di raggio ρ_1 e ρ_2 sono interne ad A e definiscono

$$B_{\rho_1,\rho_2} = \{z | \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\},$$

essendo $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. f è analitica in A, tipicamente non nella circonferenza interna, come nel caso $f = \dfrac{1}{z - z_0}$. La distinzione tra A e B è fatta per evitare i casi patologici di non uniforme continuità.

Teorema di Laurent. Se f è analitica in A, possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

ed entrambe le serie convergono assolutamente in A e anche uniformemente in B. La serie è detta **serie di Laurent** di f nell'intorno di z_0 nella corona circolare (annulus) A. Inoltre si mostra che per ogni circonferenza γ di centro z_0 e raggio compreso in (r, R), i coefficienti della serie sono dati da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \qquad && n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \qquad && n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Osservazioni.

- Non essendo analitica la funzione in un intorno di z_0, non sono definite le sue derivate $f^{(n)}(z_0)$; dunque in nessun caso potremo pensare di calcolare i coefficienti a_n come se fossero quelli di una serie di Taylor. D'altra parte, essendo una serie di potenze convergente, deve convergere a una funzione analitica all'interno del cerchio di convergenza di raggio R, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = h(z) \neq f(z)$ (in generale).

- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ è detta **parte analitica** della serie di L aurent, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{(z - z_0)^n}$ ne rappresenta la **parte principale**.

- Per ogni regione A esiste una e una sola serie di Laurent.

Ipotesi di **singolarità isolata**. Nelle definizioni che seguono e nelle proposizioni a esse correlate, faremo l'ipotesi che f sia analitica in tutto un disco tranne che nel centro z_0; ciò significa che in ogni intorno di z_0, privato di tale punto, $f(z)$ è analitica e che la corona circolare del teorema di Laurent ha $r = 0$. Naturalmente una funzione può avere piú singolarità isolate, ciascuna circondata da dischi non autointersecantesi. La serie di Laurent converge allora in $0 < |z - z_0| < R$.

DEFINIZIONI PER SINGOLARITÀ ISOLATE

La singolarità in z_0 (a parte l'ultima nella lista) è classificata in base all'espressione effettiva della serie di Laurent.

1. **SINGOLARITÀ ELIMINABILE**. Tutti i coefficienti b_k sono nulli. Deve essere possibile definire f in z_0 in modo che f risulti analitica anche in tale punto.
2. **POLO SEMPLICE**. Solo il coefficiente b_1 della parte principale è diverso da zero.
3. **POLO DI ORDINE** ≥ 1. C'è un numero finito di coefficienti b_k: l'ordine del polo è dato dall'intero k piú grande.
4. **SINGOLARITÀ ESSENZIALE**. I coefficienti della parte principale sono in numero infinito.
5. **PUNTO DI DIRAMAZIONE**. Questa singolarità nulla ha che vedere con la serie di Laurent. Si ha quando percorrendo un circuito chiuso attorno a z_0, la funzione cambia ramo, dunque nello stesso punto del piano complesso assume un diverso valore (polidromìa).

CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI

Chiamiamo con $U(z_0)$ un intorno privato del punto z_0. La singolarità isolata z_0 è per la funzione f

1. una singolarità eliminabile se e solo se valgono tutte le seguenti proprietà:
$$\text{(i) } f \text{ è limitata in } U; \quad \text{(ii) esiste il } \lim_{z\to z_0} f(z); \quad \text{(iii) } \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0.$$
2. un polo semplice se e solo se
$$\text{esiste il } \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \quad \text{ed è} \neq 0.$$
3. un polo di ordine $k \geq 1$ se e solo se valgono tutte le seguenti proprietà:
$$\text{(i) } \exists M > 0 \to |f(z)| \leq \frac{M}{|z-z_0|^k}, z \in U(z_0); \quad \text{(ii) } \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k+1}f(z) = 0;$$
$$\text{(iii) } \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) \quad \text{ed è} \neq 0.$$

3-bis. un polo di ordine $k \geq 1$ se e solo se esiste una funzione ϕ analitica e diversa da zero in $U(z_0)$ tale che
$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k} \qquad \forall z \in U,\ z \neq z_0.$$

4. una singolarità essenziale se non esiste il $\lim_{z\to z_0} f(z)$, in quanto tale limite assume un valore diverso a seconda della direzione con cui z si avvicina a z_0.

Nel caso di polo semplice
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} \Longrightarrow \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = b_1 \neq 0;$$

l'esistenza del limite, in ogni caso, non permette che esistano ulteriori termini nella parte principale, quindi la condizione è necessaria e sufficiente. Inoltre,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)b_1 = 0 \Longrightarrow \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 f(z) = 0.$$

b_1 è detto **residuo della funzione f nel punto $\mathbf{z_0}$**: $b_1 = \mathrm{Res}\,(f; z_0)$.

Esempio. Si sviluppi in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \qquad \text{attorno a } z = 0.$$

Per la regola di de l'Hôpital, $\lim_{z\to 0}(z-0)\dfrac{1}{e^z-1} = \lim_{z\to 0}\dfrac{1}{e^z} = 1$, che implica che $z = 0$ sia un polo semplice e che Res $\left(\dfrac{1}{e^z-1}; 0\right) = 1$. Naturalmente non possiamo sviluppare $f(z)$ in serie di Taylor, perché non è analitica. Però in base al teorema di Laurent possiamo scrivere che, per $z \neq 0$,

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \Longrightarrow 1 = \left(\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$\Longrightarrow 1 = 1 + \left(a_0 + \frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + \frac{1}{6}\right)z^2 + \left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2 + \frac{1}{24}\right)z^3 + \ldots$$

che fornisce, nell'ordine, i primi tre coefficienti della parte analitica:

$$a_0 = -\frac{1}{2}; \quad a_1 = \frac{1}{12}; \quad a_2 = 0.$$

Osservazione. Spesso, negli esercizi si fa uso di una proprietà la cui dimostrazione è sottointesa: *se f e g ammettono uno sviluppo in serie di Laurent in $0 < |z - z_0| < R$, la serie di Laurent per la funzione prodotto fg è ottenuta dalla moltiplicazione formale delle due serie.*

5 Il teorema dei residui

5.1 Calcolo dei residui

Di grande utilità nel calcolo dei residui sono alcune proposizioni riguardanti il rapporto tra due funzioni analitiche nei punti singolari. Indichiamo con

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

tale rapporto e z_0 sia una singolarità isolata per F.

Proposizione 1. f e g hanno in z_0 uno zero dello stesso ordine. Allora in tal punto F ha una singolarità eliminabile.

Proposizione 2. Siano f e g due funzioni analitiche in z_0 e sia $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$. Allora la funzione $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ ha un polo semplice in z_0 e

$$\mathrm{Res}\,(F; z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dimostrazione. Sotto le ipotesi della proposizione,

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \Longrightarrow \frac{1}{g'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{g(z)}.$$

Allora, poiché esiste ed è diverso da zero il limite

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)},$$

z_0 è un polo semplice e il limite è proprio il residuo.

Proposizione 3. $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) = 0$, $g''(z_0) \neq 0$. Allora z_0 è un polo doppio e il residuo in tal punto è

$$\text{Res}\,(F; z_0) = \frac{1}{2} \frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{f(z_0) g'''(z_0)}{|g''(z_0)|^2}.$$

Proposizione 4. $f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}$ (f ha uno zero di ordine k); $g(z) = (z - z_0)^{k+1} \tilde{g}$ (g ha uno zero di ordine $k + 1$). Allora F ha in z_0 un polo semplice e

$$\text{Res}\,(F; z_0) = (k + 1) \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k+1)}(z_0)}.$$

Prop. 5: Poli di ordine ≥ 2. In tal caso, esiste il $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ e $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$ è analitica. Inoltre,

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k - 1)!}.$$

Esempio. Si valuti $\text{Res}\left(\dfrac{e^z}{(z^2 - 1)^2}; 1 \right)$.

La funzione ha in $z = 1$ un polo del secondo ordine:

$$\lim_{z \to 1} (z - 1)^2 \frac{e^z}{(z + 1)^2 (z - 1)^2} = \frac{e}{4} \neq 0; \qquad \lim_{z \to 1} (z - 1)^3 \frac{e^z}{(z + 1)^2 (z - 1)^2} = 0.$$

Indicando con $f = \dfrac{e^z}{(z + 1)^2}$ e con $g = (z - 1)^2$, notiamo che:

$$f'(1) = \left. \frac{e^z (z - 1)}{(z + 1)^3} \right|_{z=1} = 0; \qquad g'(z) = 2(z - 1) \Rightarrow g''(z) = 2 \Rightarrow g'''(z) = 0.$$

Quindi, usando la formula della Proposizione 3 (o della 5), si vede che il residuo cercato è identicamente nullo.

Esempio. Si valutino i residui di $\dfrac{e^z}{z(1 - z)^3}$ nei suoi punti singolari.

$z = 0$ è evidentemente un polo semplice. Possiamo applicare la Proposizione 2 o, direttamente

$$\text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1 - z)^3}; 0 \right) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{(1 - z)^3} = 1.$$

In $z = 1$ la funzione ha un polo del terzo ordine. Usiamo la proposizione 5:

$$\text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3};1\right) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(-\frac{e^z}{z}\right)\Bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}\frac{e^z(z^2-2z+2)}{z^3}\Bigg|_{z=1} = -\frac{e}{2}.$$

<u>Esempio</u>. Si scriva la parte principale della serie di Laurent della funzione $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ nell'intorno della sua singolarità.

Con il cambio di variabile $w = z - 1$, $\dfrac{e^{2+2w}}{w^3}$ ha una singolarità in $w = 0$. Sviluppando l'esponenziale, la funzione diventa

$$\frac{e^2}{w^3}\left(1+2w+\frac{(2w)^2}{2!}+\frac{(2w)^3}{3!}+\frac{(2w)^4}{4!}+\cdots\right) = \frac{e^2}{w^3}+\frac{2e^2}{w^2}+\frac{2e^2}{w}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2}{3}e^2w+\cdots$$

$$\text{Allora} \qquad b_1 = 2e^2; \quad b_2 = 2e^2; \quad b_3 = e^2 \qquad \left(\text{e} \quad a_0 = \frac{4}{3}e^2;\ a_1 = \frac{2}{3}e^2 \cdots\right)$$

che palesemente confermano che $w = 0$ (o $z = 1$) è un polo del terz'ordine. Si noti che il residuo poteva essere calcolato con la proposizione 5, ponendo $\phi = e^2e^{2w}$:

$$\text{Res}\left(\frac{e^{2+2w}}{w^3};0\right) = \frac{1}{2!}\frac{d^2\phi}{dw^2}\Bigg|_{w=0} = 2e^2.$$

<u>Teorema dei residui</u>. *Sia γ una curva semplice chiusa in una regione A, con la parte interna appartenente tutta ad A. Se f è una funzione analitica in $A\backslash\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ (cioè tranne che in un numero finito di singolarità isolate), allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res }(f, z_k).$$

<u>Il lemma di Jordan</u>.
Lungo la semicirconferenza di raggio R e giacente nel semipiano superiore $\mathcal{H}$

$$\frac{1}{2}C_R(\theta) = Re^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi,$$

consideriamo l'integrale (curvilineo) $\qquad \displaystyle\int_{\frac{1}{2}C_R} f(z)e^{ikz}dz, \quad k > 0.$

Se la funzione f, sui punti della semicirconferenza, è limitata perchè esiste un numero positivo M tale che

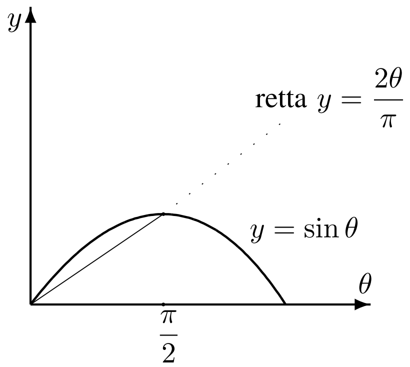
$$|f(z)| \le \frac{M}{R^p}, \quad p > 0$$

$$\text{allora} \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{2}C_R} f(z)e^{ikz}dz = 0$$

<u>Dimostrazione</u>. Con il cambio di variabile $z = Re^{i\theta}$, l'integrale diventa

$$\int_0^{\pi} e^{ik(R\cos\theta+iR\sin\theta)} iRe^{i\theta} f(z)d\theta \Longrightarrow$$

$$\left|\int_0^{\pi} e^{ik(R\cos\theta+iR\sin\theta)} iRe^{i\theta} f(z)d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta} R|f(z)|d\theta \leq \frac{M}{R^{p-1}} \int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta} d\theta$$



Prima di tutto si noti che, con la sostituzione $\theta = \pi - \theta'$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-kR\sin\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-kR\sin(\pi-\theta')} d(-\theta') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kR\sin\theta'} d(\theta').$$

Dalla figura, si vede inoltre che la corda che congiunge l'origine con il punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ha ordinata sempre minore o uguale a quella di $\sin\theta$:

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kR\sin\theta} d(\theta) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kR\frac{2\theta}{\pi}} d(\theta).$$

Allora, la disuguaglianza diventa

$$\left|\int_0^{\pi} e^{ik(R\cos\theta+iR\sin\theta)} iRe^{i\theta} f(z)d\theta\right| \leq \frac{2M}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kR\frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{2M}{R^{p-1}} \frac{\pi}{2kR} \int_0^{kR} e^{-t} dt = \frac{\pi M}{kR^p} \left(1 - e^{-kR}\right)$$

che evidentemente tende a zero per $R \to \infty$.

Il Valore Principale di Cauchy.
Quando una funzione reale ha un punto di discontinuità x_0, si definisce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\mu\to 0} \int_{x_0+\mu}^{\infty} f(x)dx,$$

dove il modo in cui ci si avvicina a x_0 non è indifferente:

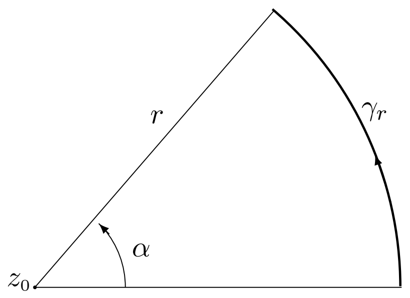
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{0-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\mu\to 0} \int_{0+\mu}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0} \left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right) + \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\mu^2}.$$

Dunque ciascuno dei due integrali diverge, cosí come la loro somma, a meno che non si richieda che $\epsilon = \mu$. In tal caso l'integrale converge a 0.

Quando succede che i due integrali $\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)dx$ e $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{x_0+\mu}^{\infty} f(x)dx$ divergono separatamente, ma la loro somma converge a un numero finito al tendere a zero di uno stesso ϵ, tale numero finito rappresenta il **Valore Principale** dell'integrale e viene indicato con

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Lemma: integrale per poli semplici.



La funzione $f(z)$ sia analitica tranne che in un punto z_0 , che rappresenta un polo semplice per f. Si consideri un arco γ_r di una circonferenza di raggio r, centro z_0 e angolo al centro α. Si ha allora che

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz = i\alpha\,\mathrm{Res}\,(f; z_0).$$

I poli semplici sull'asse reale.
In particolare, quando si calcolano gli integrali real impropri con punti di discontinuità per la funzione integranda $f(x)$ che siano poli semplici per la corrispondente $f(z)$, si costruiscono circuiti chiusi che, per escludere questi poli, percorrono semicirconferenze infinitesime. con gli estremi sull'asse reale e centrate in ciascun polo, il cui raggio verrà fatto tendere a zero, mentre si fa tendere all'infinito altre dimensioni del circuito stesso. Il contributo all'integrale sulla curva chiusa dato da questi poli semplici sarà, in base al lemma precedente (con $\alpha = \pi$), pari a

$$\pi i \sum_j \mathrm{Res}\,(f(x); x_j).$$

6 Calcolo di integrali definiti

Esamineremo ora alcune tipologie di integrali in campo reale (impropri e non), il cui calcolo è reso particolarmente efficace dall'uso del teorema dei residui e dai lemmi e corollari che abbiamo riportato.

6.1 Funzioni razionali di seno e coseno

6.2 Integrali impropri

6.3 Trasformata di Fourier

6.4 Valore Principale

6.5 Funzioni polidrome

7 Il prolungamento analitico

Come sappiamo, la serie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge alla funzione $\dfrac{1}{1-z}$ solo all'interno di un disco A centrato nell'origine e di raggio unitario. D'altra parte, questa non è l'unica serie che converge a tale funzione. Infatti, considerando che

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(1-z_0)}\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-z_0}{1-z_0}\right)} \qquad \text{e che} \qquad \frac{1}{1-\left(\dfrac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^k,$$

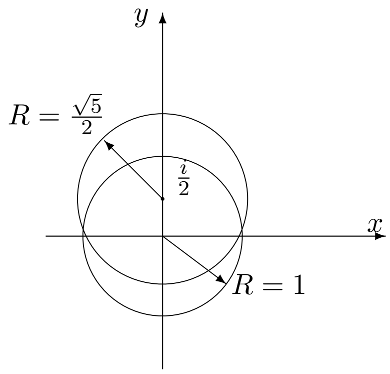
$$\text{la serie} \qquad \frac{1}{(1-z_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-z_0)^k}(z-z_0)^k \qquad \text{converge a} \qquad \frac{1}{1-z}$$

nel cerchio di convergenza con centro in z_0 e raggio

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{|(1-z_0)^{k+1}|}{|(1-z_0)^k|} = |(1-z_0)|.$$

Cosí, per esempio, scegliendo $z_0 = \frac{i}{2}$, si ha che $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ è il raggio del disco B di convergenza di

$$g(z) = \frac{1}{(1-\frac{i}{2})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\frac{i}{2})^k}\left(z-\frac{i}{2}\right)^k.$$



Siccome $f = \frac{1}{1-z}$ in A, mentre $g = \frac{1}{1-z}$ in B, f e g coincidono in $A \cap B$. Si ottiene la funzione g **prolungando** la funzione f oltre il proprio disco di convergenza. Diremo anche che $\dfrac{1}{1-z}$ è il prolungamento di $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ a $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

Definizione. Siano $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ analitiche nelle regioni A e B. Se $A \cap B \neq \emptyset$ e $f = g$ in $A \cap B$, definendo

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in A \\ g(z) & \text{se } z \in B, \end{cases}$$

diremo che h è un **prolungamento analitico** di f (o di g).

Proposizione. Se una funzione analitica in $A \subset \mathbb{C}$ è identicamente nulla in $A' \subset A$, allora è identicamente nulla in tutto A.

Come conseguenza di questa proposizione, abbiamo il

Teorema dell'identità. Se f(z) e g(z), analitiche in A, coincidono in $A' \subset A$, allora coincidono su tutto A.

Sulla base di queste proposizioni, si ha anche l'unicità del prolungamento analitico.

7.1 Punti regolari e singolari

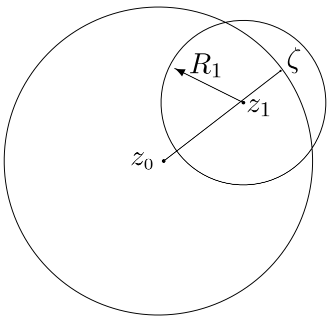
Consideriamo prolungamenti mediante cerchi. Supponiamo che la serie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ converga nel disco A di raggio R. Scegliamo un punto ζ sulla circonferenza di tale disco. Se esiste un intorno circolare U_ζ in cui una funzione $g(z)$ coincide con la f in $A \cap U_\zeta$, allora il punto ζ è detto **regolare** per $(A, f(z))$. Se questo procedimento non è possibile, tale punto è invece **singolare**.

Osservazioni.

1. Se il raggio di convergenza è finito ($< \infty$), allora deve esistere almeno un punto singolare sulla frontiera. Infatti, se cosí non fosse, ogni punto della frontiera darebbe origine a un prolungamento e l'inviluppo di tutti gli intorni di tutti i punti della frontiera costituirebbe un cerchio di convergenza di raggio pigrande di quello fissato.

2. Tutti i punti della serie geometrica sono regolari, benché in essi la serie diverga, tranne che $z = 1$ (il polo della funzione); qui, infatti, il prolungamento richiede che $f(z)$ uguagli $F(z) = \frac{1}{1-z}$ in $A \cap U_1$. Ma in questo intorno $F(z)$ diverge, e non è una funzione analitica.

3. La funzione
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{n^2}$$
converge assolutamente e uniformemente su tutti i punti della frontiera, con $R = 1$. Eppure almeno un punto della frontiera deve essere singolare.



Come verificare direttamente la regolarità di un punto? Si prenda un punto ζ sul bordo del disco di convergenza A di una funzione
$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$
Lungo il segmento che congiunge z_0 a ζ si scelga un punto z_1. È evidente che il prolungamento di f a una funzione
$$g(z) = \sum_{0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n$$
implica che quest'ultima abbia un disco di convergenza B che fuoriesce da quello di f.

Naturalmente g deve coincidere con f in $A \cap B$, per cui i coefficienti della sua serie sono dati da
$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}$$
e la condizione per il prolungamento di f (e la regolarità di ζ), si esprime come:
$$R_1 > R - |z_0 - z_1|.$$
Questa condizione è direttamente verificabile in quanto
$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}\right|}.$$
Naturalmente, se $R_1 = R - |z_0 - z_1|$, il punto ζ è singolare.

7.2 La barriera essenziale

Se tutti i punti del bordo sono singolari, allora non è possibile prolungare analiticamente una funzione. È questo il caso della funzione

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots .$$

Per dimostrarlo, notiamo che

$$\begin{aligned} f(z^2) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2 \cdot 2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots . \\ f(z^4) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{4 \cdot 2^n} = 1 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots . \\ f(z^8) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{8 \cdot 2^n} = 1 + z^8 + +z^{16} + z^{32} + \cdots . \\ \cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Vale a dire, $f(z) = z + f(z^2)$, $f(z) = z + z^2 + f(z^4)$, $f(z) = z + z^2 + z^4 + f(z^8)$ etc. Ma in $z = 1$, evidentemente, $f(z)$ diverge, in quanto si somma infinite volte il numero 1; inoltre, anche in $z^2 = 1$, in quanto diverge la serie per $f(z^2)$. E cosí via, $f(z)$ diverge in $z^n = 1$ perché $f(z^{2^n})$ è ancora la somma del numero 1 iterata infinite volte. Ciò significa che la serie diverge su tutte le radici dell'unità, che sono dense sulla frontiera.

7.3 Principio di riflessione di Schwarz

Supponiamo che una funzione f sia analitica in una regione A del semipiano superiore ($y > 0$), la cui frontiera interseca un intervallo $]a, b[$ dell'asse reale. Indichiamo con $A^* = \{z|\bar{z} \in A\}$ l'insieme speculare del semipiano inferiore e con $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, definita in A^*. Se f è reale su $]a, b]$, allora g è analitica e costituisce l'unico prolungamento analitico di f alla regione

$$A \cup]a, b[\cup A^*$$